УДК 372.851
DOI: 10.17277/voprosy.2025.04.pp.138-147

ОБРАТНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ

А. Д. Нахман

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов, Россия

Ключевые слова: прием обращения; принцип вариативности; стохастические модели.

Аннотация: В рамках развития стохастической содержательно-методической линии предлагается соответствующие задачные системы дополнить обращенными задачами. Реализация этого предложения открывает путь к более полным интерпретациям результатов стохастического моделирования. В качестве механизма обращения используется подробно описанный и проиллюстрированный примерами принцип вариативности. Важной функцией процесса обращения является возможность обеспечения заданных границ вероятностей выходных состояний стохастической модели. Выделен случай Байесовской обратимости, в рамках которой происходит переоценка вероятностей априорных гипотез. Утверждается, что прием обращения является распространением технологии укрупненных дидактических единиц на курс стохастики.

Введение

В настоящей работе рассматриваются вопросы обратимости вероятностных задач в контексте ранее введенного понятия инновационных задачных систем [1]. Воспользуемся следующими основными понятиями:

– стохастическая ситуация – ситуация, неопределенная в том смысле, что все ее возможные исходы представляют собою случайные события;

– стохастическая модель – модель стохастической ситуации, реализуемая в терминах вероятностно-статистической теории;

– оператор стохастической модели – механизм (алгоритм, закон, формула), обеспечивающий нахождение выходных параметров модели по заданным исходным значениям;

– прямая и обратная вероятностные задачи: в первом случае отыскивается результат действия оператора стохастической модели, во втором – результат действия обратного оператора (общая теория обратных задач [2]).

В применении к учебной практике понятие обращенной/обратной вероятностной задачи, по меньшей мере, трехаспектно: здесь присутствуют

Нахман Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», e-mail: alextmb@mail.ru, ТамбГТУ, Тамбов, Россия.

общефилософский, операторный и собственно дидактический аспекты. С философской точки зрения речь идет об обращении причинно-следственной связи – отыскании неизвестных причин по известным следствиям. Операторный аспект связан с отысканием входных параметров моделируемой ситуации (системы) по ее выходным параметрам в предположении, что оператор модели известен или может быть определен в процессе решения «прямой» задачи. В частности, в результате обращения стохастической модели возникает возможность обеспечения заданной степени надежности того или иного выходного состояния путем регулирования некоторых параметров входа (см. п. 3 настоящей работы).

С дидактической точки зрения использование приема обращения задач обеспечивает более глубокое осознание взаимосвязей и отношений, присущих заданной задачной ситуации, способствует развитию креативности и гибкости мышления обучающихся. Прием обращения «вписывается» в технологию укрупненных дидактических единиц (**УДЕ**), поскольку одной из важных ее составляющих является совместное рассмотрение прямых и обратных действий, теорем, задач [3]. Представляется поэтому, что идею обращения следовало бы распространить на стохастический компонент школьной и вузовской программ по математике. Добавим к этому, что самостоятельное конструирование учащимися обращенных задач может рассматриваться как полезный элемент математического творчества.

В силу вышесказанного предлагаем (в контексте дидактического аспекта) имеющиеся, а также и вновь конструируемые вероятностно-статистические задачные системы дополнить обращенными задачами. Реализация этого предложения может способствовать обнаружению дополнительных связей между структурными элементами стохастических моделей, что, в свою очередь, открывает путь к более полным интерпретациям результатов соответствующего моделирования.

Отметим, что результаты данной работы были частично анонсированы в [4].

1. Принцип вариативности

Обсудим вопросы однозначности/неоднозначности обращения вероятностных задач. Начнем с имеющегося в литературе [5, 6] предложения разграничить понятия обращенной и обратной задачи. Обращенной следует называть задачу «…получаемую из исходной путем извлечения из ее условия части или даже всех данных и включения их в требование», тогда как из него, соответственно, исключаются некоторые или все параметры (прежде бывшие искомыми) и переводятся в условие [5]. В частном («предельном») случае, когда все условия и требования прямой задачи поменяются ролями, говорят об обратной задаче.

В нашей интерпретации данного разграничения, в отношении «прямой» задачи действует *принцип вариативности обращения*, если отысканию подлежит лишь часть входных данных при известном выходе модели и известных оставшихся параметрах входа, так что известные и искомые параметры входа можно варьировать – менять ролями. Принцип вариативности допускает следующую формализацию:

$$A\{p\}=\{r\}, \quad A^{-1}\{r\}\subseteq\{p\},$$

где p – вектор входных параметров задачи; r – вектор выхода; A – оператор прямой задачи; A^{-1} – обратный оператор; знак $\subseteq$ включения показывает, что в результате действия обратного оператора восстанавливаются, вообще говоря, не все входные параметры (вариативность); случай знака равенства (вместо знака включения) соответствует обратной задаче.

Проиллюстрируем сказанное простыми примерами. Пусть p_1 и p_2 – вероятности выигрыша шахматной партии при игре, соответственно, белыми и черными фигурами ($p_1 \ge p_2$; результаты игр считаем событиями независимыми, ничьи исключены). Тогда вероятность выигрыша в обеих партиях (прямая задача) найдется в виде $P = p_1 \cdot p_2$. Обращение же задачи вариативно: ставить вопрос о нахождении обеих p_1 и p_2 (по известной вероятности P и без каких-либо дополнительных ограничений) бессмысленно – решений будет бесконечно много; если же извлечь из координат входного вектора прямой задачи одну из компонент (например, p_2) и дополнить ею параметры выхода, то ответ в получаемой обращенной задаче станет вполне определенным: $p_1 = \dfrac{P}{p_2}$.

Видоизменим ситуацию: пусть обе партии будут сыграны белыми фигурами. Тогда (прямая задача) $P=(p_1)^2$ и однозначно получаем решение обратной задачи: $p_1=\sqrt{P}$.

Заметим, что ответ может оказаться неоднозначным и при отсутствии вариативности, то есть в обратной задаче. Так обстоит дело в обращении следующей задачи: найти вероятность P ровно одного выигрыша в двух шахматных партиях, сыгранных белыми. Оператор соответствующей стохастической модели имеет вид

$$A: \quad P = 2p_1(1-p_1);$$

обратный оператор A^{-1} будет реализован в виде квадратного уравнения, которое может иметь два различных корня: например, при $P = 0{,}48$ возможны $p_1 = 0{,}6$ и $p_1 = 0{,}4$.

Отметим еще одну особенность процесса обращения: если оператор A стохастической модели задан аналитически, то обратный оператор A^{-1} может не иметь аналитического задания.

2. Обращение задач в схеме Бернулли

Последний из приведенных примеров укладывается в схему повторяющихся независимых испытаний – так называемую схему Бернулли. В общем случае прямая задача и соответствующие ей обращенные представлены в табл. 1.

Таблица 1

Обращение задач в схеме повторяющихся опытов

Прямая задача	Оператор стохастической модели	Обращенная задача
Стохастическая ситуация: конечная серия n повторяющихся опытов, в каждом из которых данное случайное событие A может наступить с вероятностью p; возможные исходы – наперед неизвестное количество k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ наступлений события A; задача состоит в нахождении вероятности $P(n;k)$ ровно k наступлений A	Входные параметры p, n, k. Аналитически заданный оператор – формула Бернулли $P(n;k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$	По известному значению $P(n;k)$: 1) определить вероятность $p = p(A)$, считая известными значения входных параметров n и k; 2) определить, какое число k наступлений события A ожидается, если входные значения n и p известны; 3) определить число n проведенных опытов при известных p и k
Стохастическая ситуация: массовые испытания (число повторяющихся опытов n велико) с редкими равновероятными успехами (вероятность p успеха в каждом опыте мала). Нахождение $P(n;k)$ в асимптотическом случае $n \to \infty,\ \lambda = np = \text{const}$	Входные параметры p, n, k, либо $\lambda = np$ и k. Аналитически заданный оператор – формула Пуассона $P:\ P(n;k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	Вышеприведенные задачи 1) – 3) и 4) определить математическое ожидание λ числа наступлений события A при известном k

Приведем примеры.

1. В книжной лотерее в среднем каждый второй билет выигрывает. При каком количестве n купленных билетов вероятность ровно одного выигрыша будет наибольшей?

Прямая задача состояла бы в нахождении $P(n;1)$ при заданных значениях параметров n и p=0,5. Получение информации о количестве n купленных билетов можно отнести к обращенным задачам (см. задачу типа 3 в правой колонке таблицы 1). При $k=1$ оператор модели принимает вид $P(n;1) = 0{,}5^n n$. Полученная последовательность при $n \ge 2$ убывает, следовательно, наибольшая вероятность $P(2;1) = 0{,}5$ достигается, если n=2. Но и $P(1;1)$ также равна 0,5 . Значит, искомое n=1 или n=2.

2. Случайная величина X распределена по закону Пуассона, при этом вероятность наступления данного события 4 раза втрое меньше вероятности двукратного наступления. Каково математическое ожидание λ величины X?

Данная задача служит одним из возможных обращений следующей стандартной задачи: зная среднее число успехов (математическое ожидание) $\lambda = np$, определить вероятность $P(n;k)$ заданного количества $k = 2$ и $k = 4$ успехов.

Оператор модели – формула Пуассона. Результатом действия обратного оператора P^{-1} будет (как легко проверить) соотношение

$$\lambda^2 = (k+1)(k+2)\frac{P(n;k+2)}{P(n;k)}.$$

При $k = 2$, согласно условию обратной задачи, $\frac{P(n;4)}{P(n;2)} = \frac{1}{3}$, откуда $\lambda^2 = 4$, и, следовательно, искомое математическое ожидание равно 2.

3. Обеспечение заданных границ вероятностей выходных состояний

Один из наиболее важных типов таких задач: каковы должны быть входные параметры модели, чтобы вероятность одного из возможных выходных состояний была заключена в заданных пределах. Такого рода задачи возникают, когда требуется принять определенное решение в зависимости от степени осуществимости того или иного прогноза. Так, если исход N некоторой стохастической ситуации имеет вероятность $P(N)$, не превышающую заданного значения p_0 (или, наоборот, превышающую p_0) то целесообразно принять решение R, иначе – решение S. Требуется определить входные вероятности модели, для которых выполнялось бы соотношение $P(N) \le p_0$ (или, соответственно, $P(N) > p_0$), порождающее решение R?

В учебной практике речь может идти об обращении задачи следующего типа.

В цехе химического комбината установлены три сигнализатора превышения ПДК (предельно допустимой концентрации) некоторого газа. Вероятность своевременного срабатывания каждого из них p=0,9. Какова вероятность срабатывания хотя бы одного из них?

Ясно, что вычисление искомой вероятности может быть осуществлено по формуле (служащей оператором модели)

$$P(X \ge 1) = 1 - (1-p)^n \text{; в данном случае } n = 3.$$

Ясно также, что оператор допускает обращение как в отношении нахождения параметра n, так и в отношении параметра p. Имеем, таким образом, две следующие задачи.

1. Вероятность своевременного срабатывания каждого из сигнализаторов в случае превышении ПДК равна 0,9. Какое минимальное количество таких сигнализаторов следует установить, чтобы в указанном случае хотя бы один сигнал поступил с вероятностью не менее 0,999?

2. В каких границах должна быть вероятность срабатывания каждого из трех одинаковых сигнализаторов ПДК, чтобы вероятность поступления хотя бы одного сигнала была не менее 0,999?

В первой обращенной задаче

$$1 - (1 - 0{,}9)^n \geq 0{,}999, \text{ откуда } n \geq 3,$$

то есть следует принять решение об установке как минимум трех сигнализаторов. Во второй задаче

$$1 - (1 - p)^3 \geq 0{,}999, \text{ откуда } p \geq 0{,}9,$$

то есть надежность каждого из устанавливаемых сигнализаторов должна быть не менее 90 %.

4. Байесовская обратимость

Возможности обращения задач представляют интерес и в рамках схемы гипотез. Здесь, при известной полной вероятности события, можно ставить вопрос о нахождении априорных вероятностей гипотез, а также – в случае наступления события – отыскивать апостериорные их вероятности. В последнем случае говорят о так называемой Байесовской обратимости. Продемонстрируем описываемый круг задач на примере следующего стохастического кейса.

При поиске нужной информации случайным образом с вероятностью 0,6 выбирается сайт H_1, выбор сайта H_2 возможен с вероятностью 0,4. На сайте H_1 в среднем 90 % информации достоверно, на сайте H_2 – 80 %. Какова вероятность, что:

а) полученная таким образом информация окажется достоверной?

б) при двукратном обращении к информации на случайно выбранном сайте получаемые сведения остаются достоверными?

в) в ситуации п. б) ровно один раз получена достоверная информация?

г) обе попытки закончились получением фейковой информации?

Здесь оперируем событием A, состоящем в получении достоверной информации; событию A предшествует наступление одного из двух противоположных событий – гипотез H_1 и H_2 (случайный выбор одноименного сайта); соответствующие условные вероятности известны: $P(A / H_1) = 0{,}9$; $P(A / H_2) = 0{,}8$.

Решение кейса основано на нахождении полной вероятности [7, с. 18]

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2), \text{ то есть } P(A) = 0{,}86.$$

В пп. б) и г) требуется найти, соответственно, $P^2(A)$ и $P^2(\overline{A})$; в п. в) приходим к ответу $2P(A) \cdot P(\overline{A})$.

Одно из возможных обращений описываемой стохастической ситуации: вероятность успеха (получение достоверной информации) при случайном выборе сайта должна составить 0,86, при этом условные вероятности события A остаются прежними . Какова вероятность, что выбран

– сайт H_1?

– сайт H_2?

Здесь полная вероятность («выход» прямой задачи) $P(A)$ = 0,86 известна, так что

$$0{,}9P(H_1) + 0{,}8(1 - P(H_1)) = 0{,}86,$$

откуда находим априорные вероятности $P(H_1) = 0{,}6$ и $P(H_2) = 0{,}4$.

Возможно и другое обращение: какова вероятность, что информация почерпнута с сайта H_1, если она оказалась

– достоверной?

– фейковой?

(условные вероятности события A остаются прежними).

Нахождению подлежат $P(H_1/A)$ и $P(H_1/\overline{A})$ соответственно; то есть следует переоценить вероятность гипотезы H_1 по получении сведений о характере поступившей информации. Как хорошо известно [7, с. 20], в подобных случаях в роли обратного оператора выступают формулы Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} \text{ и } P(H_2/\overline{A}) = \frac{P(H_2)\cdot P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})},$$

откуда

$$P(H_1/A) = \frac{27}{43} \approx 0{,}63 \text{ и } P(H_2/\overline{A}) = \frac{16}{43} \approx 0{,}37.$$

Следует обратить внимание на принципиальное отличие этих двух обращенных задач. В первой находится вероятность априорной гипотезы (точный исход стохастической ситуации неизвестен, известна лишь вероятность положительного исхода), во второй – вероятность апостериорной гипотезы (переоценка априорной гипотезы). Здесь вышеупомянутая «Байесовская обратимость» реализуется в виде формализации степени уверенности в некотором утверждении и корректировки этой степени по мере поступления информации относительно исследуемой ситуации. А именно, происходит обращение информации об априорных гипотезах в информацию о вероятности каждой апостериорной гипотезы.

Рассмотрим еще один пример, в котором идея обращения используется дважды.

Показания группы подозреваемых проверяются на детекторе лжи (полиграфе). Ложь подтверждается в 86 % случаев, правда – в 94 %. Известно, что в среднем в 10 % случаев полиграф выдает результат «ложь». При проверке показаний одного из подозреваемых полиграф показал «ложь». Какова вероятность, что этот человек действительно солгал?

Здесь событию A – полиграф показал «ложь» – предшествуют две гипотезы с неизвестными вероятностями: H_1 – подозреваемый солгал – и H_2 – сказал правду. Вероятность $P(A)$=0,1 и соответствующие условные вероятности события A даны: $P(A/H_1)$=0,86 и $P(A/H_2) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06$. На первом шаге происходит обращение формулы полной вероятности (см. предыдущую задачу), в результате чего $P(H_1)$=0,05. Теперь применима формула Байеса (переоценка вероятности гипотезы H_1):

$$P(H_1 / A) = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}86}{0{,}1}, \text{ то есть } P(H_1 / A) = 0{,}43.$$

5. Распределения случайных величин: обращение задач

Ограничимся рассмотрением одного типа обращенных заданий: по известным числовым характеристикам распределений восстановить другие входные параметры.

Пример 1. Дисперсия индикатора $\eta = \eta(A)$ события A равна 0,21, при этом более вероятно, что A не наступит, чем наступит. Какова вероятность $p = p(A)$?

В «прямой» задаче определяем дисперсию: $D(\eta) = p(1 - p)$, далее (обращение задачи) $p(1-p) = 0{,}21$, откуда $p = 0{,}7$ или $p = 0{,}3$. Условию задачи отвечает $p = 0{,}3$.

Пример 2. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на некотором интервале, при этом ее математическое ожидание и дисперсия равны соответственно 3 и 3. Восстановите плотность распределения.

Для получения ответа достаточен «возврат» от заданных числовых характеристик величины X к изначальным параметрам – концам интервала $(a;b)$, на котором плотность равномерного распределения $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ [7, с. 85]. Согласно известным (см. там же) формулам для математического ожидания и дисперсии будем иметь соответственно

$$\frac{a+b}{2} = 3 \text{ и } \frac{(a-b)^2}{12} = 3,$$

откуда (при $a < b$) получаем $a = 0, b = 6$. Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & x \in (0;6) \\ 0, & x \notin (0;6) \end{cases}.$$

В связи с последним примером отметим, что при переходе к специальным распределениям (геометрическому, биномиальному, показательному, нормальному и др.) открываются широкие возможности варьирования (в вышеуказанном смысле) параметров распределений и, следовательно, конструирования обращенных/обратных задач.

Заключение

В настоящей работе предпринята попытка «встраивания» идеи обращения вероятностных задач в концепцию инновационных задачных систем; инновационность понимается при этом как наличие новизны, востребованность, ориентированность на практику.

Считаем полезным в процессе обучения математике рассматривать идею обращения как одну из возможных иллюстраций общефилософской категории причинно-следственной зависимости. Обсуждается принцип вариативности, на основе которого рекомендуется строить обращенные вероятностные задачи. Действие принципа может быть продемонстрировано на примере схемы Бернулли.

Важной функцией процесса обратимости является возможность обеспечения заданных границ вероятностей выходных состояний стохастической модели. Может быть также рекомендован случай Байесовской обратимости, в рамках которой происходит переоценка вероятностей априорных гипотез.

Рассмотрение обращенных вероятностных задач успешно согласуется с технологией УДЕ. Конструирование и решение учащимися обращенных/обратных вероятностных задач способствовало бы более глубокому погружению в моделируемую стохастическую ситуацию, формированию исследовательских навыков и элементов математического творчества, осознанию внутрипредметных (внутриматематических) связей.

Список литературы

1. Нахман, А. Д. Инновационные математические задачные системы / А. Д. Нахман // Международный журнал экспериментального образования. – 2022. – № 5. – С. 55 – 58.

2. Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач / А. Л. Бухгейм. – Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1988. – 181 с.

3. Эрдниев, П. М. Обучение математике методом укрупнения дидактических единиц / П. М. Эрдниев. – Элиста : Калм. кн. изд-во, 1979. – 258 с.

4. Нахман, А. Д. Обращение задач как инновационный прием обучения стохастике / А. Д. Нахман // Сборник трудов 7 Международного научно-технического форума СТНО-2024. Т.10. – Рязань, 2024. – С. 106 – 109.

5. Абрамова, О. М. О функциональных и структурных отличиях понятий обратной и обращенной задачи / О. М. Абрамова // Мир науки, культуры, образования. – 2012. – № 6(37). – С. 152 – 154.

6. Абрамова, О. М. Окрестность обращенных задач как средство достижения полноты решения задачи в процессе обучения математике школьников / О. М. Абрамова // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8 (часть 2). – С. 426 – 432.

7. Гутер, Р. С. Основы теории вероятностей / Р. С. Гутер, Б. В. Овчинский. – М. : Просвещение, 1967. – 162 с.

References

1. Nakhman A.D. [Innovative Mathematical Problem Systems], *Mezhdunarodnyy zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya* [International Journal of Experimental Education], 2022, no. 5, pp. 55-58 (In Russ., abstract in Eng.).

2. Bukhgeym A.L. *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Problems], Novosibirsk: Nauka. Sibirskoe otdelenie, 1988, 181 p. (In Russ.).

3. Erdniev P.M. *Obuchenie matematike metodom ukrupneniya didakticheskikh edinits* [Teaching Mathematics by Enlarging Didactic Units], Elista: Kalm. kn. izd-vo, 1979, 258 p. (In Russ.).

4. Nakhman A.D. [Problems inversion as an innovative method of teaching stochastics], *Sbornik trudov 7 Mezhdunarodnogo nauchno-tekhnicheskogo foruma*

STNO-2024 [Collection of works of the 7th International scientific and technical forum STNO-2024], vol.10, Ryazan', 2024, pp.106-109 (In Russ.).

5. Abramova O.M. [On the functional and structural differences between the concepts of inverse and reversed problems], *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya* [World of science, culture, education], 2012, no. 6(37), pp.152-154 (In Russ.).

6. Abramova O.M. [The neighborhood of inverted problems as a means of achieving completeness of the solution of the problem in the process of teaching mathematics to schoolchildren], *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental research], 2014, no. 8 (part 2), pp.426-432 (In Russ.).

7. Guter R.S., Ovchinskiy B.V. *Osnova teorii veroyatnostey* [The basis of probability theory], Moscow: Prosveshcheniye, 1967, 162 p. (In Russ.).

Inverse Probabilistic Problems

A. D. Nakhman

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: inversion technique; variability principle; stochastic models.

Abstract: As part of the development of a stochastic content-methodological approach, it is proposed to supplement the corresponding problem systems with inverse problems. Implementation of this proposal opens the way to more comprehensive interpretations of stochastic modeling results. The inversion mechanism utilizes the variability principle, described in detail and illustrated with examples. An important function of the inversion process is the ability to ensure specified probability boundaries for the output states of a stochastic model. A case of Bayesian reversibility is highlighted, within which the probabilities of a priori hypotheses are reassessed. It is argued that the inversion technique represents an extension of the technology of coarse-grained didactic units to a stochastics course.
