

## ФРАКТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗЕМЛЕДЕЛЬЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

А. А. Завражнов, А. И. Завражнов, В. Ю. Ланцев

ФГБНУ «Всероссийский НИИ садоводства  
имени И. В. Мичурина», г. Мичуринск;  
ФГБОУ ВПО «Мичуринский государственный  
аграрный университет», г. Мичуринск

Рецензент д-р техн. наук, профессор С. И. Дворецкий

**Ключевые слова и фразы:** механический состав почвы; удельные показатели; фрактальная геометрия.

**Аннотация:** Обоснована возможность энергетической оценки почвообрабатывающих машин на основе расчета удельной поверхности агрегатного состава почвы. Приведено доказательство, что с точки зрения теории вероятности, расчет удельных показателей возможен при принятии логнормального закона распределения фракционного состава почвы. При математическом моделировании использованы методы фрактального исчисления. Приведены формулы для расчета удельной поверхности почвы в зависимости ее типа и структуры.

Одним из методов проведения энергетической оценки в зависимости от типа почвообрабатывающих машин, условий их работы и технологических показателей является определение суммарной поверхностной энергии вновь измельченных агрегатов почвы. В основе данного метода лежит понятие *удельной поверхности почвы*, величина которой напрямую влияет на затраты энергии и одновременно характеризует технологические показатели работы.

В земледельческой практике расчет удельной поверхности проводится на основе фракционного анализа до и после прохода почвообрабатывающего орудия, который показывает весовое распределение агрегатов и частиц почвы по размерам. Разделение на фракции производится ситовым методом с использованием наборов сит с отверстиями диаметром  $d_i = 100; 50; 25; 10; 7; 5; 3; 1; 0,5; 0,25$  мм,  $i = 1, \dots, n$ .

---

Завражнов Андрей Анатольевич – кандидат технических наук, начальник Инженерного центра, ФГБНУ «Всероссийский НИИ садоводства имени И. В. Мичурина», г. Мичуринск; Завражнов Анатолий Иванович – доктор технических наук, профессор, академик РАН, главный научный сотрудник, e-mail: president@mgau; Ланцев Владимир Юрьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры транспортно-технологических машин и основ конструирования, ФГБОУ ВПО «Мичуринский государственный аграрный университет», г. Мичуринск.

Удельная площадь поверхности агрегата  $s_i$  в натуральном выражении определяется как  $s_i = S_i/V_i = \gamma a_i^{-1}$ , где  $S_i$  и  $V_i$  – площадь поверхности и объем агрегата;  $a_i$  – характерный размер,  $a_i = (d_i + d_{i+1})/2$ ;  $\gamma$  – коэффициент, который зависит от формы агрегата и способа определения характерного размера.

При фракционном анализе по функции распределения  $\omega_a(\varepsilon)$  определяется функция  $\omega_a(\varepsilon)\Delta\varepsilon$  – весовая доля агрегатов, размеры которых лежат в интервале от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ . Функция распределения агрегатов по удельным поверхностям  $\omega_s(\varepsilon)$  определяется на основе формулы  $\omega_s ds = \omega_a \left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right) \frac{\gamma}{\varepsilon^2}$ , которая позволяет по экспериментально или теоретически найденной функции  $\omega_a(\varepsilon)$  найти функцию  $\omega_s(\varepsilon)$ . Дополнительный множитель  $\frac{\gamma}{\varepsilon^2}$  в формуле показывает, что равномерному разбиению  $a$  будет соответствовать неравномерное разбиение  $s$  и наоборот. Тем не менее, экспериментальную гистограмму и ее аппроксимацию  $\omega_a(\varepsilon)$  можно использовать для нахождения среднего  $M(s)$  и дисперсии  $D(s)$ .

Следует отметить, что аппроксимация гистограммы функцией нормального распределения (как это делают ряд авторов) методически некорректна из-за ненулевой вероятности при  $a = 0$ , что приводит к расхождению значений  $M(s)$  по верхнему пределу. Данное противоречие разрешается, если для аппроксимации гистограммы использовать функцию логнормального распределения. Математическими преобразованиями получены соотношения связывающие  $M(s)$  с  $M(a)$  и  $D(s)$  с  $D(a)$ .

Далее представлены расчетные формулы (1) – (3) и значения (табл. 1) удельной поверхности агрегатов почвы согласно принятого закона распределения размеров агрегатов вновь измельченной почвы.

Формулы для расчета среднего значения удельной поверхности:

– нормальный закон

$$M(s) = \frac{\gamma}{M(a)}; \quad (1)$$

– логнормальный закон

$$M(s) = \gamma \frac{1}{M(a)} \left( 1 + \frac{D(a)}{M^2(a)} \right); \quad (2)$$

– реальная гистограмма

$$M(s) = \gamma \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{a_i}. \quad (3)$$

Расчет по различным методикам выявил значительные расхождения в значениях  $M(s)$ , что требует проведения отдельных исследований при выборе функции распределения размеров агрегатов. Определено, что с уменьшением дисперсии (рассеивания) значений средневзвешенных размеров агрегатов значения удельных поверхностей становятся практически одинаковыми.

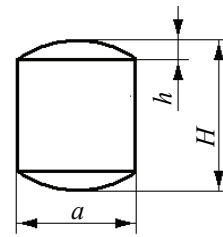
Таблица 1

**Значения удельной поверхности,  
рассчитанной по различным методикам\***

Способ обработки	Процентное содержание различных фракций, мм								$d_{ср}$ , мм	Удельная поверхность, $мм^{-1}$ , по расчетным формулам		
	0,25	0,25...1	1...10	10...20	20...30	30...50	50...100	100		(1)	(2)	(3)
I	7,2	25,10	28,40	10,20	8,10	9,15	9,60	1,39	17,64	0,056	0,165	0,764
II	5,2	14,55	21,40	9,15	7,93	9,82	13,76	22,00	40,88	0,024	0,047	0,495
III	0,4	1,67	5,17	0,92	2,57	2,11	3,20	83,94	88,26	0,011	0,012	0,064

\* При расчете удельной поверхности использовались результаты сравнительных испытаний ротационного и лемешного плугов в Московской области, предоставленными доктором технических наук И. М. Пановым: I – роторный плуг РП-200; II – лемешной плуг ПН-3-35; III – естественно сложенная почва.

Рассмотрим расчет коэффициента  $\gamma$ . Традиционно, агрегаты почвы представляют в форме сферы или куба ( $\gamma = 6$ ). Реальные агрегаты имеют весьма разнородную форму и значения  $\gamma$  в диапазоне  $d_i...d_{i+1}$  значительно отличаются друг от друга. Для количественного описания формы агрегатов обоснована геометрическая модель (рис. 1) и выведена зависимость (4), позволяющая определять значение  $\gamma_{\phi}$  при любой возможной форме агрегата,



**Рис. 1. Геометрическая модель структурных агрегатов почвы (исходная форма):**  
 $H = \alpha a$ ;  $h = \theta a$

$$\gamma_{\phi} = \frac{12\alpha + (24\theta^2 - 24\theta + 6)}{3\alpha + (4\theta^3 - 3\theta)}, \quad (4)$$

где  $\alpha$  и  $\theta$  – геометрические коэффициенты,  $\alpha = 0,4...5$ ;  $\theta = 0...0,5$ .


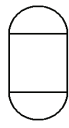





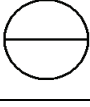









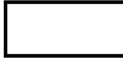
В основу модели положена описательная классификация С. А. Захарова, который разделял структурные агрегаты почвы на три основных типа: призмовидный, кубовидный и плитовидный. В таблице 2 представлены результаты расчета  $\gamma_{\phi}$ .

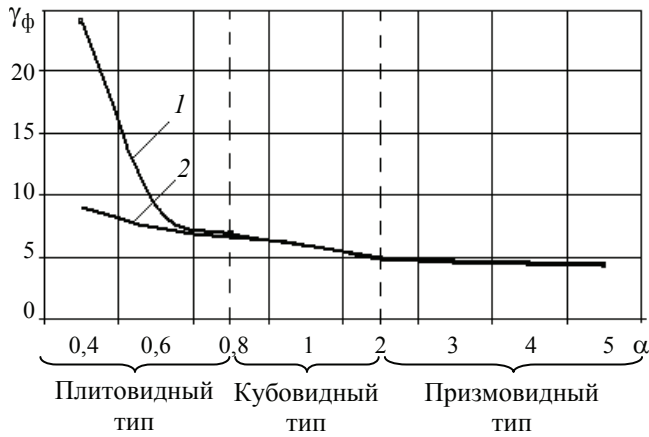
Зависимость изменения коэффициента  $\gamma_{\phi}$  при трансформации формы структурного агрегата почвы показана на рис. 2, из которого видно, что моделирование формы агрегатов почвы на основе сравнительно простых геометрических фигур недостаточно полно раскрывает физическую сущность удельной поверхности. Реальные структурные и вновь образованные при измельчении почвы агрегаты представляют собой пространственные конгломераты, образованные в результате конденсации (слипания, склеивания) исходных элементов (гранул) почвы в сложных неравновесных условиях. Описание агрегатов подобного рода возможно с привлечением фрактальной геометрии, в основе которой лежит принцип «самоподобия» Б. Мандельброта. Согласно данному принципа длина  $L_D$  любого участка произвольной кривой определяется как  $L_D = C\mu^{1-D}$ , где  $\mu$  – масштаб измерения;  $D$  – фрактальная размерность, которая рассчитывается по результатам гранулометрического и агрегатного анализа измельченной почвы.

Для обоснования фрактальной модели почвенного агрегата воспользуемся гипотезой последовательного объединения гранул почвы в конгломераты, то есть исходные элементы (гранулы) почвы образуют агрегаты, последовательное объединение которых, в свою очередь, образуют агрегаты большего размера и т.д.

Таблица 2

**Тип и форма структурных агрегатов почвы и результаты расчета  $\gamma_{\Phi}$**

Форма	$\alpha$	$\theta$	Внешний вид	Геометрическая модель	$\gamma_{\Phi}$
<b>Призмовидный тип</b>					
Столбовидная ( $H \approx 30 \dots 50$ мм)	5...2	0,5			4,2...4,8
Столбчатая ( $H \approx 30 \dots 50$ мм)	5...2	0,5...0			4,3...4,9
Призматическая ( $H \approx 10 \dots 50$ мм)	5...2	0			4,4...5,0
<b>Кубовидный тип</b>					
Комковатая ( $a \approx 0,5 \dots 30$ мм)	2...0,8	0,5			4,8...6,8
Ореховатая ( $a \approx 5 \dots 10$ мм)					4,8...6,4
Зернистая ( $a \approx 0,5 \dots 5$ мм)	2...0,8	0,5...0			4,8...6,4
Глыбистая ( $a \approx 30 \dots 100$ мм)	2...0,8	0			5,0...6,5
<b>Плитовидный тип</b>					
Чешуйчатая ( $a \approx 1 \dots 3$ мм)	0,8...0,4	0,5...0			6,4...24,0
Плитчатая ( $a \approx 1 \dots 50$ мм)	0,8...0,4	0			6,5...9,0



**Рис. 2. Зависимость коэффициента  $\gamma_\phi$  от типа морфологической структуры почвы и формы агрегатов:**  
 $1 - \theta = 0,5; 2 - \theta = 0$

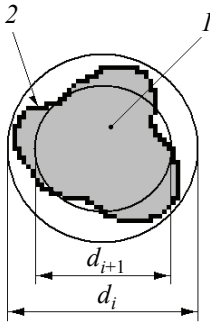
На рисунках 3 и 4 представлена фрактальная модель агрегата почвы. Расчетные зависимости для определения параметров модели имеют вид:  
 – для отдельного почвенного агрегата

$$L_D = \frac{2d_{i+1}}{\mu^{n(D-1)}},$$

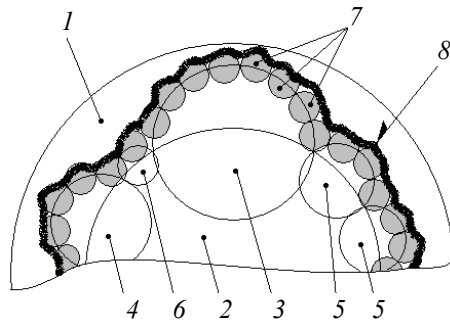
где  $\mu = 0,5; D = \frac{\ln \pi}{\ln 2} = 1,651\dots; n = \ln\left(\frac{d_i - d_{i+1}}{\delta} - 1\right) / \ln \alpha, \alpha$  – коэффициент укладки исходных гранул почвы (для гексагональной укладки  $\alpha = 3$ );  
 – для среднестатистического почвенного агрегата

$$L_D = \frac{2M(a)}{\mu^{n(D-1)}},$$

где  $\mu = 0,5; D = \frac{\ln \pi}{\ln 2} = 1,651\dots; n = \ln\left(\frac{M(a) - 2\sqrt{D(a)}}{\delta} - 1\right) / \ln \alpha.$



**Рис. 3. Проекция реального агрегата почвы:**  
 1 – проекция почвенного агрегата;  
 2 – фрактальная образующая проекции агрегата



**Рис. 4. Схема формирования агрегата почвы:**  
 1, 2 – отверстия сит с размерами  $d_i$  и  $d_{i+1}$ ;  
 3, 4, 5, 6 – почвенные конгломераты;  
 7 – исходные гранулы почвы, размером  $\delta$ ;  
 8 – фрактальная образующая (фрагмент)

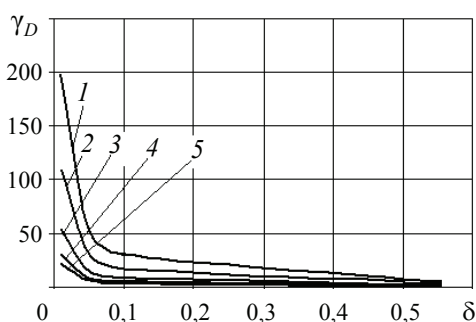


Рис. 5. Зависимость  $\gamma_D$  от размера гранул  $\delta$  для агрегатов, размеры которых находятся в диапазонах: 1 – 100...50; 2 – 50...25; 3 – 25...10; 4 – 10...7; 5 – 7...5

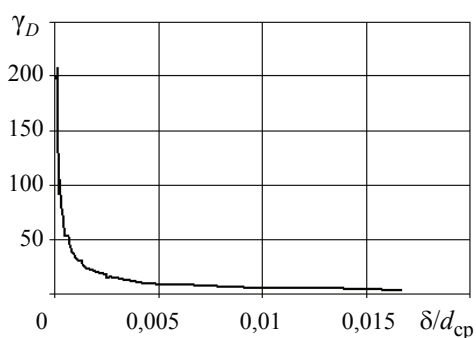


Рис. 6. Вид зависимости  $\gamma_D$  от  $\delta/d_{cp}$

Совпадение вида зависимости  $\gamma_D$  при различных диапазонах  $\delta/d_{cp}$  (см. рис. 6)

$$\delta/d_{cp} = 1,18 \cdot 10^{-4} \dots 1,66 \cdot 10^{-2}, \gamma_D = 3 \dots 210, \gamma_D = 0,1166 \left( \delta/d_{cp} \right)^{-0,8259};$$

$$\delta/d_{cp} = 1,33 \cdot 10^{-6} \dots 5,88 \cdot 10^{-2}, \gamma_D = 1 \dots 8600, \gamma_D = 0,1117 \left( \delta/d_{cp} \right)^{-0,8304}$$

подтверждает принцип «самоподобия» фрактальных образований и достоверность принятой модели для описания агрегатов почвы.

В итоге получим

$$\gamma = \gamma_{\phi} \gamma_D \approx 0,1 \left( \frac{\delta}{M(a)} \right)^{-0,83} \left( \frac{12\alpha + (24\theta^2 - 24\theta + 6)}{3\alpha + (4\theta^3 - 3\theta)} \right).$$

Приведенные выкладки расширяют физическое понятие и конкретизируют расчет удельной поверхности почвы и позволяют проводить сравнение энергетических показателей почвообрабатывающих машин на почвах с различным механическим составом.

#### Список литературы

1. Балханов, В. К. Введение в теорию фрактального исчисления / В. К. Балханов. – Улан-Удэ : Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2001. – 58 с.
2. Вадюнина, А. Ф. Методы исследований физических свойств почв / А. Ф. Вадюнина, З. А. Корчагина. – М. : Агропромиздат, 1986. – 415 с.

Следуя принципам «самоподобия» фрактальной кривой, определяем фрактальный коэффициент удельной поверхности почвы

$$\gamma_D = \left( \frac{L_D}{L_{M(a)}} \right)^2,$$

где  $L_{M(a)}$  – длина проекции сферы размера  $M(a)$ .

Исследование фрактальной модели позволяет сделать вывод, что общая длина фрактальной образующей проекции почвенных агрегатов при ситовом способе измерения их размеров в основном зависит от отношения среднестатистического размера гранул почвы и среднестатистического размера вновь образованных при измельчении почвы агрегатов.

На рисунках 5 и 6 представлены результаты исследования фрактальной модели и расчета значений коэффициента  $\gamma_D$  в диапазонах размеров почвенных гранул  $\delta = 0,0001 \dots 1$  мм и почвенных агрегатов  $d_{cp} = 0,25 \dots 100$  мм.

3. ГОСТ 12536–79. Грунты. Методы лабораторного определения гранулометрического (зернового) и микроагрегатного состава. – Взамен ГОСТ 12536–67 ; введ. 1980–07–01. – М. : Изд-во стандартов, 2008. – 16 с.
4. Далин, А. Д. Ротационные грунтообрабатывающие и землеройные машины / А. Д. Далин, П. В. Павлов. – М. : Машгиз, 1950. – 258 с.
5. Нагорный, Н. Н. Энергетическая оценка почвообрабатывающих орудий / Н. Н. Нагорный, М. П. Белоткач // Тракторы и сельскохозяйств. машины. – 1980. – № 7. – С. 12 – 13.
6. Смирнов, В. М. Физика фрактальных кластеров / В. М. Смирнов. – М. : Наука, 1991. – 250 с.
7. Федер, Е. Фракталы : пер. с англ. / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 260 с.

#### References

1. Balkhanov V.K. *Vvedenie v teoriyu fraktal'nogo ischisleniya* (Introduction to the theory of fractal calculation), Ulan-Ude: Izdatel'stvo Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta, 2001, 58 p.
2. Vadyunina A.F., Korchagina Z.A. *Metody issledovaniy fizicheskikh svoystv pochv* (Research methods of the physical properties of soils), Moscow: Agropromizdat, 1986, 415 p.
3. USSR State Committee for Construction, *GOST 12536-79. Grunty. Metody laboratornogo opredeleniya granulometricheskogo (zernovogo) i mikroagregatnogo sostava* (Russian Interstate Standard 12536-79. Soils. Methods of laboratory granulometric (grain-size) and microaggregate distribution), Moscow: Izdatel'stvo standartov, 2008, 16 p.
4. Dalin A.D., Pavlov P.V. *Rotatsionnye gruntoobrabatyvayushchie i zemleroinye mashiny* (), Moscow: Mashgiz, 1950, 258 p.
5. Nagorni N.N., Belotkach M.P. *Traktory i sel'skokhozyaistvennyye mashiny*, 1980, no. 7, pp. 12-13.
6. Smirnov V.M. *Fizika fraktal'nykh klasterov* (Physics of fractal clusters), Moscow: Nauka, 1991, 250 p.
7. Feder J. *Fractals*, NewYork: Plenum Press, 1988, 283 p.

---

### Fractal Modeling in Agricultural Mechanics

A. A. Zavrazhnov, A. I. Zavrazhnov, V. Yu. Lantsev

*All-Russian Research Institute of Horticulture  
named after I. V. Michurin, Michurinsk;  
Michurinsk State Agrarian University, Michurinsk*

**Key words and phrases:** fractal geometry; mechanical composition of soil; specific indicators.

**Abstract:** The paper verified the possibility of power assessment of tillers based on the calculation of specific surface of the soil aggregate composition. It was proved that from the perspective of the theory of probability, the calculation of specific indicators is possible when making a log-normal distribution law of the fractional composition of the soil. In mathematical modeling the fractal methods were used. The formulae for calculating the specific surface of the soil according to the type and structure energy were described.

---

© А. А. Завражнов, А. И. Завражнов, В. Ю. Ланцев, 2014

*Статья поступила в редакцию 02.11.2014 г.*