УДК 539.3

УПРАВЛЕНИЕ ФОРМОЙ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ НАКЛАДКАМИ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

С.В. Плотникова, М.Г. Куликов

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент д-р техн. наук, профессор Ю.В. Литовка

Ключевые слова и фразы: композитная пластина; метод конечных элементов; пьезоэлектрические накладки; термоэлектроупругость; управление формой.

Аннотация: Рассмотрена задача нахождения напряжений на пьезоэлектрических накладках, оптимизирующих форму композитной пластины. С учетом физических характеристик материалов заданы ограничения на напряжения, то есть решается задача условной оптимизации. Математическая модель основана на конечно-элементных уравнениях, полученных для трехмерных геометрически точных элементов многослойных термоэлектроупругих анизотропных оболочек. В численных примерах исследованы возможности предложенного подхода к моделированию формы композитной пластины при термомеханическом воздействии.

Во многих областях техники для придания конструкции нужной формы используется обратный пьезоэлектрический эффект. В данной работе рассматривается задача статического управления формой, когда механическая и температурная нагрузки на пластину заранее известны и требуется найти подаваемое на пьезоэлектрик напряжение, которое придаст пластине требуемую форму. При численном решении задача минимизация функционала сводится к задаче минимизации функции нескольких переменных. Задача моделирования формы решается совместно с задачей моделирования напряженно-деформированного состояния пластины, поэтому выбор конечно-элементной модели здесь особенно важен. В настоящей работе используется разработанный авторами конечный элемент для рас-

Плотникова Светлана Валерьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика», e-mail: psvetlana1962@rambler.ru; Куликов Михаил Геннадьевич – аспирант кафедры «Прикладная математика и механика», ТамбГТУ, г. Тамбов.

чета оболочек с пьезоэлектрическими накладками [4, 6], основанный на 7-параметрической теории оболочек [2, 3, 8, 9].

Рассмотрим анизотропную композитную пластину, на лицевые поверхности которой наклеены накладки из пьезоэлектрического материала. Пусть h – толщина композитной основы пластины; h_b и h_t – толщины нижнего и верхнего пьезоэлектрических слоев (рис. 1). Предположим, что пластина разбита на два вида элементов: базовые, которые содержат только композитную основу, и пьезоэлектрические, которые наряду с композитной основой содержат пьезоэлектрические слои.

При расчете таких конструкций используются уравнения состояния термоэлектроупругости [5]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha}\Theta, \quad \mathbf{D} = \mathbf{d}\sigma + \boldsymbol{\zeta}\mathbf{E} + \mathbf{r}\Theta, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{22}\ \varepsilon_{33}\ 2\varepsilon_{23}\ 2\varepsilon_{13}\ 2\varepsilon_{12}]^{\mathrm{T}}$ – вектор деформаций; $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}$ – матрица податливостей материала при постоянном электрическом поле; $\mathbf{C}$ – матрица упругих констант; $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{33}\ \sigma_{23}\ \sigma_{13}\ \sigma_{12}]^{\mathrm{T}}$ – вектор напряжений; $\mathbf{d}$ – матрица пьезоэлектрических констант; $\mathbf{E} = [E_1\ E_2\ E_3]^{\mathrm{T}}$ – вектор напряженности электрического поля; $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор температурного расширения; $\Theta = T - T_0$ – прирост температуры от естественного состояния; T_0 – температура естественного состояния по шкале Кельвина; $\mathbf{D} = [D_1\ D_2\ D_3]^{\mathrm{T}}$ – вектор смещения электрического поля; $\boldsymbol{\zeta}$ – матрица диэлектрических констант; $\mathbf{r}$ – вектор пироэлектрических постоянных.

В качестве независимых перемещений выбираем u_i^- и u_i^+ – перемещения точек лицевых поверхностей Ω^- и Ω^+ в направлениях координатных осей, где $i = 1, 2, 3$; u_3^{M} – поперечное перемещение точек срединной поверхности. Для тангенциальных перемещений используем линейную аппроксимацию по толщине оболочки, а для поперечного перемещения – квадратичную аппроксимацию. Согласно [8] полагаем, что тангенциальные деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и поперечные нормальные деформации ε_{33} распределены по толщине линейно, а сдвиговые деформации $\varepsilon_{\alpha 3}$ постоянны по толщине (индексы α, β принимают значения 1, 2).

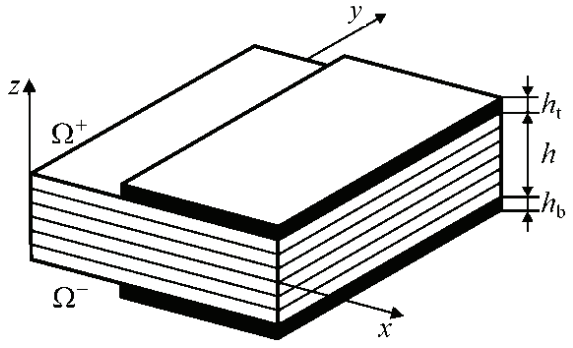

Рис. 1. Композитная пластина с пьезоэлектрическими накладками

Вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ выражается через электрический потенциал: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Предполагаем, что потенциал имеет линейное распределение по толщине пьезоэлектрического слоя. Здесь будем рассматривать актюаторные задачи, когда на электроды, расположенные на внешних поверхностях пьезоэлектрических накладок, подается постоянное напряжение φ_{t} и φ_{b}, а на поверхностях раздела композитной основы и пьезоэлектрических слоев электроды заземлены, то есть напряжение принимается равным 0. В этом случае получаем:

$$E_{\alpha}^{\mathrm{t}} = E_{\alpha}^{\mathrm{b}} = 0, \quad E_{3}^{\mathrm{t}} = -\frac{1}{h_{\mathrm{t}}}\varphi_{\mathrm{t}}, \quad E_{3}^{\mathrm{b}} = \frac{1}{h_{\mathrm{b}}}\varphi_{\mathrm{b}}. \tag{6}$$

Для температуры используем линейную аппроксимацию по толщине пластины:

$$\Theta = N^{-}\Theta^{-} + N^{+}\Theta^{+}, \tag{7}$$

где Θ^{-}, Θ^{+} – значения температуры на лицевых поверхностях пластины.

Рассмотрим четырехузловой прямоугольный элемент. Неизвестными в r-м узле элемента являются 7 перемещений

$$\mathbf{v}_r = \left[u_{1r}^{-}\ u_{1r}^{+}\ u_{2r}^{-}\ u_{2r}^{+}\ u_{3r}^{-}\ u_{3r}^{+}\ u_{3r}^{\mathrm{M}}\right].$$

Применяя на элементе билинейную аппроксимацию перемещений и зависимых от перемещений деформаций, вводя независимые деформации и результирующие напряжения [8], получим уравнение равновесия четырехузлового прямоугольного элемента:

$$\mathbf{K}^{e}\mathbf{V}^{e} = -\mathbf{B}_{\mathrm{t}}^{e}\varphi_{\mathrm{t}}^{e} - \mathbf{B}_{\mathrm{b}}^{e}\varphi_{\mathrm{b}}^{e} + \mathbf{F}^{e}, \tag{8}$$

$$\mathbf{F}^{e} = \mathbf{F}_{\mathrm{м}}^{e} + \mathbf{F}_{\mathrm{т}}^{e},$$

где $\mathbf{V}^{e} = \left[\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\ \mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}\ \mathbf{v}_3^{\mathrm{T}}\ \mathbf{v}_4^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор узловых перемещений элемента; $\mathbf{F}_{\mathrm{м}}^{e}$ – вектор механических нагрузок, действующих на элементе; $\mathbf{F}_{\mathrm{т}}^{e}$ – вектор температурных нагрузок, действующих на элементе; $\mathbf{K}^{e}$ – симметричная матрица жесткости элемента; $\mathbf{B}_{\mathrm{t}}^{e}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{b}}^{e}$ – векторы электромеханической связи на элементе. Вид этих матриц приведен в [4]. Для базовых элементов, не содержащих пьезоэлектрических слоев, первые два слагаемых в правой части уравнения (8) полагаем равными нулю.

Для каждого элемента введем проективную матрицу $\mathbf{P}^{e}$, отражающую вклад элемента в глобальную систему элементов. После сборки элементов в ансамбль получаем уравнение равновесия конструкции

$$\mathbf{KU} = -\sum_{e=1}^{N^{e}}\left[(\mathbf{P}^{e})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{\mathrm{t}}^{e}\varphi_{\mathrm{t}}^{e} + (\mathbf{P}^{e})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{\mathrm{b}}^{e}\varphi_{\mathrm{b}}^{e}\right] + \mathbf{F}, \tag{9}$$

где N^{e} – общее число элементов; $\mathbf{U}$ – глобальный вектор узловых перемещений; $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N^{e}}(\mathbf{P}^{e})^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{e}\mathbf{P}^{e}$ – глобальная матрица жесткости; $\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{N^{e}}(\mathbf{P}^{e})^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{e}$ – глобальный вектор механических нагрузок.

Полагаем, что $2N^p$ пьезоэлектрических накладок располагаются симметрично на верхней и нижней поверхностях пластины. Пусть $\mathbf{\Phi}$ – вектор напряжений, подаваемых на электроды верхних накладок, на электроды нижних накладок подается вектор напряжений с обратным знаком $-\mathbf{\Phi}$. Это предположение актуально в случае решения задачи, когда требуемая форма пластины определяется в основном изгибными деформациями, на которые оказывает влияние лишь разность электрических потенциалов. Введем векторы соответствия между пьезоэлектрическими накладками и элементами $\mathbf{Q}^e$. Компоненты этого вектора принимают значение 1, если соответствующая накладка попадает на элемент e и значение 0 – в противоположном случае. Тогда из (9) получим следующую зависимость между вектором перемещений и векторами нагружения:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{R\Phi} + \mathbf{F}), \tag{10}$$

$$\mathbf{R} = \sum_{e=1}^{N^e}\left[-(\mathbf{P}^e)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{\mathrm{t}}^e\mathbf{Q}^e + (\mathbf{P}^e)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{\mathrm{b}}^e\mathbf{Q}^e\right].$$

Пусть $\mathbf{U}^{\mathrm{d}}$ – заданный вектор перемещений, соответствующий требуемой форме пластины. Ставится задача: найти такой вектор напряжений на накладках, при котором отклонение формы конструкции от требуемой будет минимальным:

$$W(\mathbf{\Phi}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\mathrm{d}}) + \frac{1}{2}\gamma\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi} \to \min; \tag{11}$$

$$|\mathbf{\Phi}| \le \mathbf{\Phi}_0. \tag{12}$$

Второе слагаемое в (11) придает задаче минимизации вычислительную устойчивость. При этом γ – стабилизирующий параметр, выбор которого зависит от механических и геометрических характеристик пластины, а также от вида граничных условий; $\mathbf{\Phi}_0$ – вектор ограничений на подаваемые напряжения, значения его компонент обусловлены характеристиками пьезоэлектрического материала. Функция $W(\mathbf{\Phi})$ является строго выпуклой и положительно определенной [10], поэтому решение задачи оптимизации существует и единственно.

Решаем задачу (11) с учетом ограничений (12) методом множителей Лагранжа. Используя теорему Куна–Таккера [1], получаем систему уравнений и неравенств:

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} + \lambda_i - \lambda_{N^p+i} = 0, \quad i = \overline{1, N^p}; \tag{13а}$$

$$\lambda_i(\Phi_i - \Phi_{0i}) = 0, \quad \lambda_{N^p+i}(-\Phi_i - \Phi_{0i}) = 0, \quad i = \overline{1, N^p}; \tag{13б}$$

$$\lambda_i \ge 0, \quad i = \overline{0, 2N^p}, \quad \Phi_i \le \Phi_{0i}, \quad -\Phi_i \le \Phi_{0i}, \quad i = \overline{1, N^p}, \tag{13в}$$

где $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{0,2N^p}$ – множители Лагранжа. Решение задачи (13) может быть найдено методом проб и ошибок. Для реализации этого метода разбиваем множество индексов $I = \{1, ..., N^p\}$ на три подмножества $I = I_0 \cup I_+ \cup I_-$; на нулевой итерации полагаем $I_0 = I$. Для нахождения неизвестных напряжений и множителей Лагранжа решаем систему из $3N^p$ уравнений. Первые N^p уравнений системы имеют вид (13а). Остальные уравнения системы строятся следующим образом: при $i \in I_0$ система дополняется уравнениями $\lambda_i = 0, \lambda_{N^p+i} = 0$; при $i \in I_1$ – уравнениями $\Phi_i = \Phi_{0i}$, $\lambda_{N^p+i} = 0$; при $i \in I_2$ – уравнениями $\lambda_i = 0$, $\Phi_i = -\Phi_{0i}$. Учитывая, что градиент функции $W(\mathbf{\Phi})$ является линейным по $\mathbf{\Phi}$ и может быть с учетом (10) выражен аналитически

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{\Phi}} = \left(\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\mathbf{K}^{-1})^2\mathbf{R} + \gamma\mathbf{I}\right)\mathbf{\Phi} - \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^{\mathrm{d}} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}), \qquad (14)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица размера $N^p \times N^p$, получим систему из $3N^p$ линейных уравнений для нахождения оптимального распределения напряжений на накладках и множителей Лагранжа. После нахождения решения этой системы проверяется выполнение неравенств (13в). Если для какого-либо индекса одно из неравенств не выполняется, то индекс переводится в другое множество, и система линейных уравнений строится и решается заново. За конечное число шагов решение системы (13) может быть найдено. Заметим, что наиболее вычислительно затратный этап – вычисление матрицы жесткости $\mathbf{K}$ и ее обращение – выполняется один раз на начальном этапе работы алгоритма.

Приведем численные результаты, демонстрирующие возможности предлагаемого метода. Исследуем деформированное состояние шестислойной пластины, изготовленной из углепластика Т300/976 с направлением укладки слоев $[0/45/–45]_s$. Пластина шарнирно оперта вдоль сторон, параллельных оси *oy*, а стороны, параллельные оси *ox*, остаются свободными. На лицевых поверхностях пластины наклеены 30 квадратных накладок из пьезокерамики G1195. Геометрические параметры пластины приведены на рис. 2.

Механические и пьезоэлектрические константы углепластика AS4/3501: $E_{11} = 150$ ГПа; $E_{22} = E_{33} = 9$ ГПа; $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0{,}3$; $G_{12} = G_{13} = 7{,}1$ ГПа; $G_{23} = 2{,}5$ ГПа; $\alpha_{11} = -1{,}1 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 25{,}2 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$. Механические и пьезоэлектрические константы пьезокерамики G1195: $E_{11} = E_{22} = E_{33} = 63$ ГПа; $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0{,}3$; $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 24{,}2$ ГПа, $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 9 \cdot 10^{-7}$ К$^{-1}$; $d_{31} = d_{32} = 2{,}54 \cdot 10^{-10}$ м/В; $d_{33} = 3{,}74 \cdot 10^{-10}$ м/В. Пьезоэлектрические накладки на внутренней и внешней поверхностях пластины поляризованы в противоположных направлениях. Пластина подвергается температурному нагружению: 50 °С на верхней поверхности и –50 °С на нижней при начальной температуре окружающей среды 20 °С. Деформированное состояние пластины при такой нагрузке приведено на рис. 3, *а*.

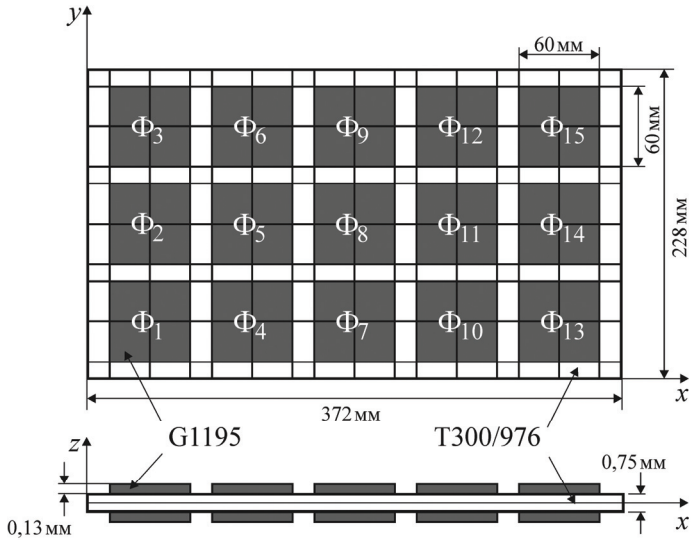

Рис. 2. Шарнирно-опертая пластина: геометрия и конечно-элементная сетка

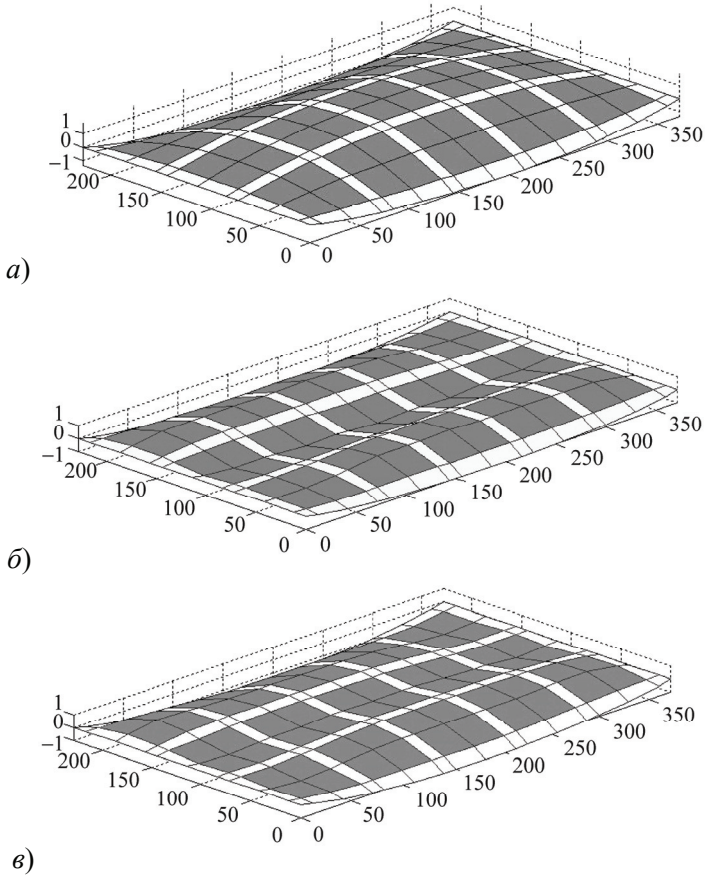

Рис. 3. Шарнирно-опертая пластина:
а – деформированное состояние при температурной нагрузке;
б – решение задачи оптимизации формы без ограничений на напряжения; *в* – решение задачи оптимизации формы при ограничении на напряжения 200 В при $\gamma = 10^{-11}$

Задача моделировалась с помощью неравномерной сетки 16×10 билинейных элементов, изображенной на рис. 2. В работе [4] для этой пластины было продемонстрировано хорошее совпадение результатов расчетов по предлагаемой конечно-элементной модели с результатами, полученными с использованием трехмерного изопараметрического конечного элемента [7], при заданной электрической нагрузке. Здесь решаем задачу нахождения оптимальных напряжений на пьезоэлектрических накладках, приближающих пластину к недеформированному состоянию, то есть в (11) полагаем $\mathbf{U}^{\mathrm{d}} = \mathbf{0}$. Задачу решаем в двух постановках: без ограничений на напряжения (табл. 1, рис. 2, *б*) и с ограничениями 200 В (табл. 2, рис. 2, *в*).

В таблицах 1, 2 приведены значения оптимальных напряжений на накладках при трех значениях параметра регуляризации γ. В таблице 3 приведено значение среднего отклонения $W_0 = \sqrt{\left(\mathbf{U}-\mathbf{U}^{\mathrm{d}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{U}-\mathbf{U}^{\mathrm{d}}\right)/7N}$,

Таблица 1

Оптимальные напряжения в задаче без ограничений

γ	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8	Φ_9	Φ_{10}	Φ_{11}	Φ_{12}	Φ_{13}	Φ_{14}	Φ_{15}
10^{-12}	74	257	–176	–186	357	–135	–189	454	–188	–145	367	–187	–160	250	72
10^{-11}	57	222	–147	–155	357	–132	–175	412	–178	–138	357	–154	–142	222	56
10^{-10}	37	127	–82	–51	240	–97	–97	269	–97	–97	240	–51	–82	127	37

Таблица 2

Оптимальные напряжения при ограничении на напряжения 200 В

γ	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8	Φ_9	Φ_{10}	Φ_{11}	Φ_{12}	Φ_{13}	Φ_{14}	Φ_{15}
10^{-12}	200	200	–200	–109	200	–43	–66	200	–69	–45	200	–108	–200	200	200
10^{-11}	157	222	–172	–81	200	–59	–72	200	–74	–62	200	–80	–170	200	157
10^{-10}	49	151	–82	–28	200	–84	–71	200	–71	–84	200	–28	–82	151	49

Таблица 3

Значение среднего отклонения W_0 при различных значениях параметра γ

Параметр	Без ограничений на напряжения			Ограничения на напряжения 200 В		
γ	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}
W_0	$2{,}906\cdot10^{-4}$	$2{,}922\cdot10^{-4}$	$3{,}386\cdot10^{-4}$	$3{,}452\cdot10^{-4}$	$3{,}460\cdot10^{-4}$	$3{,}589\cdot10^{-4}$

где N – число узлов. Как видим, если γ слишком мало, то из-за численной неустойчивости нарушается центральная симметрия распределения оптимальных напряжений, обусловленная симметрией задачи и анизотропией пластины; если же γ брать слишком большим, то ухудшается значение показателя W_0. Заметим, что для пластины только под температурным воздействием (см. рис. 3, *а*) значение среднего отклонения от недеформированного состояния $W_0 = 6{,}155 \cdot 10^{-4}$, то есть температурные деформации удается компенсировать в среднем на 50 %.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по теме «Проведение фундаментальных исследований в области естественных, технических и гуманитарных наук» (проект № 2.1.1/10003).

Список литературы

1. Карманов, В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М. : Физматлит, 2004. – 264 с.
2. Куликов, Г.М. Решение связанной задачи термопьезоэлектричества на основе геометрически точного элемента оболочки / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композит. материалов. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 513–534.
3. Куликов, Г.М. Связанная задача электроупругости для слоистой композитной оболочки / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 610–624.
4. Куликов, М.Г. Расчет адаптивных многослойных тонкостенных конструкций, подверженных температурному воздействию / М.Г. Куликов, С.В. Плотникова // Науч. вестн. ВГАСУ. Стр-во и архитектура. – 2010. – № 2. – С. 7–17.
5. Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М. : Мир, 1986. – 160 с.
6. Плотникова, С.В. Применение трехмерного элемента оболочки для расчета композитных конструкций с пьезоэлектрическими накладками / С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 375–386.
7. Ha, S.K. Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators / S.K. Ha, C. Keilers, F.-K. Chang // AIAA Journal. – 1992. – Vol. 30, No. 3. – P. 772–780.
8. Kulikov, G.M. Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // CMES. – 2008. – Vol. 28, No. 1. – P. 15–38.
9. Kulikov, G.M. Exact geometry piezoelectric solid-shell element based on 7-parameter model / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2011. – Vol. 18, No. 2. – P. 133–146.
10. Tong, D. Optimal shape control of composite thin plates with piezoelectric actuators / D. Tong, R.L. Williams, S.K. Agrawal // Journal of intelligent material systems and structures. – 1998. – Vol. 9, No. 6. – P. 458–467.

Shape Control of Composite Plates with Piezoelectric Patches under Thermomechanical Loading

S.V. Plotnikova, M.G. Kulikov

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: composite plate; finite element method; piezoelectric patches; shape control; thermoelectroelasticity.

Abstract: This article deals with the determination of optimal voltages at piezoelectric patches for the optimal shape control of composite plates. Taking into account the physical limitation, a space of electric potentials is restricted, i.e., the control constraints are imposed. The mathematical model is based on the 3D geometrically exact finite elements of thermoelectroelastic multilayered anisotropic plates. In numerical examples, we investigate the ability of the proposed formulation to model shape control problems of laminated composite plates subjected to thermomechanical loading.

© С.В. Плотникова, М.Г. Куликов, 2011