

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БИФУРКАЦИИ СОСУДА, ОРИЕНТИРОВАННАЯ НА КАРДИОХИРУРГИЧЕСКУЮ КЛИНИКУ

В.А. Лищук, Д.Ш. Газизова, С.В. Фролов, С.Н. Маковеев, С.Г. Фареа

Научный центр сердечно-сосудистой хирургии

им. А.Н. Бакулева РАМН, г. Москва;

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Ключевые слова и фразы: бифуркация; математическая модель; сосуд.

Аннотация: Представлено математическое описание модели бифуркации сосуда. Учтены объём, давление и поток, а также их зависимость от жёсткости, тонуса, сопротивления и инерционности. Модель построена в терминах, позволяющих включить бифуркацию в состав разветвлённой многоуровневой системы сосудов.

В настоящее время для изучения сосудистого русла применяются математические модели, описанные как в частных производных [1], так и в обыкновенных [2]. Независимо от формы представления, модель сосуда (совместно с сердцем) является основой для описания сердечно-сосудистой системы (ССС) в целом [3; 4]. Для построения модели ССС необходимо, наряду с моделью элементарного участка сосуда, наличие модели бифуркации сосуда, исследование и обоснование которой до настоящего времени уделялось меньше внимания. Математическая модель бифуркации сосудистого участка совместима с моделью элементарного сосуда и может быть включена в разветвлённую сосудистую сеть.

В статье будут использованы следующие обозначения:

b, g, j, k, m, v – индексы сосудистых участков;

e – жёсткость сосудов, тор/см³;

I – обратная величина инерционности, см³/(тор*с²);

P_T – давление, обусловленное гравитацией, тор;

P_T – тканевое давление, тор;

P – давление в сосуде, тор;

P_O – онкотическое давление, тор;

q – поток, см³/с;

q_T – тканевый поток, см³/с;

U – ненапряжённый объём или тонус, см³;

t – время, с;

V – объём, см³;

P – проницаемость или проводимость, см³/(тор*с);

P_{cs} – проницаемость или проводимость жидкости под действием онкотических сил, см³/(тор*с).

Реальный клинический контроль требует, чтобы математическая модель отражала объём (V), давление (P , гемодинамическое и тканевое) и объёмный поток крови (q) в сосудистый участок из других сосудов и из него в другие участки сосудистой системы, а также объёмный поток жидкости из рассматриваемого сосуда в ткани, а из тканей в сосудистый участок. Эти переменные (V, P, q) характеризуют функции участка сосудистой системы.

Функции зависят от свойств сосудистого участка и прилегающих к нему тканей: средней жёсткости сосудистой стенки (e) вместе с прилегающими тканями, максимального объёма сосуда, который при наполнении его кровью расправляется, но ещё не определяется растяжением стенок (U), резистивного сопротивления кровотоку (ρ^{-1}), индуктивного сопротивления (t^{-1}), зависящего от массы крови и тканей, участвующих в изменении движения

(накапливает энергию), и, наконец, от проводимости (ρ_T) стенок сосуда (как активной, так и пассивной), которая отражает обмен между сосудистой системой и тканями. Эти параметры (e , U , ρ), характеризующие свойства сосуда, изменяются, как правило, значительно более медленно, чем оценки функции (V , P , q).

В задачах клинической практики необходимо отображать ветвящуюся сеть участков сосудистого русла разных конфигураций для каждого индивидуального случая. Сеть участков удобно представлять отдельными модулями (сосуд, бифуркация, сосуд, содержащий клапан). Эта задача синтеза модели сосудистого русла индивидуальной конфигурации должна опираться на общие характеристики и представления, свойственные здоровым людям или всему классу больных при данном заболевании.

Рассмотрим сосудистую сеть [5], состоящую из участков k, j, v, b, g, m . Описание будем вести для участков j, v, b . Смежными примем участки k, g и m . Каждый участок обладает свойствами: e – жёсткость (обратная величина эластичности ϵ) и U – ненапряжённый объём; Кровоток, вытекающий из j -го участка сосуда, состоит из двух кровотоков: $q_{jv}(t)$ и $q_{jb}(t)$.

Гидравлическое давление крови в участках сосуда примем тем большим, чем больше крови в сосуде. Примем допущение, что больной находится в горизонтальном положении (лежащий на койке), тогда силы гравитации, действующие на сосуд, рассматривать не будем: $P_{jg}(t) = P_{gv}(t) = P_{bg}(t) = 0$ или постоянная малая величина [3]. Тогда гидравлическое давление крови определяется:

$$P_j(t) = e_j[V_j(t) - U_j] + P_{jg}(t), \quad (1)$$

$$P_v(t) = e_v[V_v(t) - U_v] + P_{jv}(t), \quad (2)$$

$$P_b(t) = e_b[V_b(t) - U_b] + P_{jb}(t). \quad (3)$$

Жёсткости e_j , e_v , и e_b стенок сосудистых участков всегда остаются постоянными в рабочем диапазоне.

Изменение объёма крови в сосуде обуславливается её притоком $q_{jg}(t)$ и оттоком из сосудистых участков, а также диффузией жидкости через стенки сосуда:

$$\frac{dV_j(t)}{dt} = q_{jg}(t) - q_{jv}(t) - q_{jb}(t) - q_{jd}(t) + q_{jg}(t), \quad (4)$$

$$\frac{dV_v(t)}{dt} = q_{jv}(t) - q_{vg}(t) - q_{vd}(t) + q_{vg}(t), \quad (5)$$

$$\frac{dV_b(t)}{dt} = q_{jb}(t) - q_{bg}(t) - q_{bd}(t) + q_{bg}(t). \quad (6)$$

Для больших сосудов и при исследовании гемодинамики потоком жидкости через стенку сосуда обычно пренебрегают ($q_{jd}(t) = q_{vd}(t) = q_{bd}(t) = 0$ и $q_{jg}(t) = q_{vg}(t) = q_{bg}(t) = 0$), так как в этом случае величины $q_{jd}(t)$, $q_{vd}(t)$, $q_{bd}(t)$, $q_{jg}(t)$, $q_{vg}(t)$, $q_{bg}(t)$ малы по сравнению с кровотоком по сосуду.

Входные и выходные потоки ($q_{jg}(t)$, $q_{jv}(t)$, $q_{jb}(t)$, $q_{bg}(t)$, $q_{vg}(t)$) будут зависеть от градиента давлений $P_k(t) - P_j(t)$, $P_j(t) - P_v(t)$, $P_j(t) - P_b(t)$, $P_b(t) - P_m(t)$, $P_v(t) - P_g(t)$, проводимостей (P_{jv} , P_{jb} , P_{bg} , P_{vg}) между участками (k, j, v, b, g, m), а также обратных величин инерционностей (I_{jv} , I_{jb} , I_{bg} , I_{vg}) потоков и перемещающихся вследствие изменения потоков стенок сосуда и прилегающих к ним тканей:

$$\frac{dq_{jg}(t)}{dt} = I_{jg} \left[P_k(t) - P_j(t) - \frac{1}{P_{jg}} q_{jg}(t) \right], \quad (7)$$

$$\frac{dq_{jv}(t)}{dt} = I_{jv} \left[P_j(t) - P_v(t) - \frac{1}{P_{jv}} q_{jv}(t) \right], \quad (8)$$

$$\frac{dq_{jb}(t)}{dt} = l_{jb} \left[P_j(t) - P_b(t) - \frac{1}{P_{jb}} \cdot q_{jb}(t) \right], \quad (9)$$

$$\frac{dq_{va}(t)}{dt} = l_{va} \left[P_v(t) - P_a(t) - \frac{1}{P_{va}} \cdot q_{va}(t) \right], \quad (10)$$

$$\frac{dq_{bm}(t)}{dt} = l_{bm} \left[P_b(t) - P_m(t) - \frac{1}{P_{bm}} \cdot q_{bm}(t) \right]. \quad (11)$$

Нужно учесть потоки из сосудистых участков в ткань (q_{jb}^0 , q_{va}^0 , q_{bm}^0) под действием разности гидростатических давлений ($P_j(t) - P_b(t)$, $P_v(t) - P_a(t)$, $P_b(t) - P_m(t)$) и из ткани в сосудистые участки (q_{jb}^1 , q_{va}^1 , q_{bm}^1) через стенку последнего под действием разностей онкотических давлений ($P_b^0(t) - P_j^0(t)$, $P_a^0(t) - P_v^0(t)$, $P_m^0(t) - P_b^0(t)$). Потоки между сосудом и тканью представляются следующим образом:

$$q_{jb}^0(t) = P_{jb}^0(t) \cdot [P_j(t) - P_b(t)], \quad (12)$$

$$q_{va}^0(t) = P_{va}^0(t) \cdot [P_v(t) - P_a(t)], \quad (13)$$

$$q_{bm}^0(t) = P_{bm}^0(t) \cdot [P_b(t) - P_m(t)], \quad (14)$$

$$q_{jb}^1(t) = P_{jb}^1(t) \cdot [P_b^0(t) - P_j^0(t)], \quad (15)$$

$$q_{va}^1(t) = P_{va}^1(t) \cdot [P_a^0(t) - P_v^0(t)], \quad (16)$$

$$q_{bm}^1(t) = P_{bm}^1(t) \cdot [P_m^0(t) - P_b^0(t)]. \quad (17)$$

Эти выражения описывают перемещение жидкости через стенки сосуда, преимущественно капилляров. Составляющую потока жидкости из сосуда в ткань (q_{jT} , q_{vT} , q_{bT}) называют фильтрацией, а из ткани в сосуд (q_{Tj} , q_{Ta} , q_{Tb}) – реабсорбцией.

Соотношения (1)–(17) образуют систему уравнений, которые определяют математическую модель бифуркации сосуда. Входами в сосудистый участок j являются давления в соседних сосудах (P_a , P_v , P_b), тканевое давление (P_b^0), приведённое к давлению действие гравитации (P_{bv}); в участки v и b – давления в соседних сосудах P_j , P_a и P_j , P_m , тканевое давление P_v^0 и P_b^0 , приведённое к давлению действие гравитации P_{bv} и P_{bm} соответственно. В результате взаимодействия участков определяются кровотоки между ними (q_{jv} , q_{jb} , q_{va} , q_{vm} , q_{bv}). Математическая модель (1)–(17) позволяет провести исследования статических и динамических режимов участка бифуркации сосудистого русла и выявить опасности, влияющие на целостность эндотелия сосудов и операционных швов. Эта модель эффективна для определения средних значений основных характеристик динамики кровотока и анализа переходных процессов в участке бифуркации. Представленная математическая модель может быть использована в системе поддержки принятия решений врача кардиохирургической клиники.

Список литературы:

1. Лищук, В.А. Математическая модель сосуда в частных производных / В.А. Лищук, Г.Г. Амосов, Г.Г. Амосов (мл), С.В. Фролов // Клиническая физиология кровообращения. – 2006. – Ч. 1. – № 3. – С. 37–44.
2. Лищук, В.А. Математическая модель сосуда в обыкновенных производных как инструмент для исследования сосудистой патологии / В.А. Лищук, С.В. Фролов, Д.Ш. Газизова, Л.В. Сазыкина, С.Н. Маковеев // Клиническая физиология кровообращения. – 2007. – Ч. 2. – № 1. – С. 64–70.
3. Лищук, В.А. Математическая теория кровообращения. / В.А. Лищук. – М. : Медицина, 1991. – 256 с.

4. Маковеев, С.Н. Разработка математической модели сердечно-сосудистой системы в среде LabVIEW / С.Н. Маковеев, С.В. Фролов // Вопросы современной науки и практики. Ун-т им. В.И. Вернадского. Серия – технические науки. – 2008. – Т. 2. – № 1(11). – С. 79–83.

5. Маковеев, С.Н. Дослідження математичної моделі біфуркації судинної ділянки з детальністю, що відповідає контролю хворого в середовищі LabVIEW / С.Н. Маковеев, Д.Ш. Газизова, А.А. Горбач, В.А. Ліщук, С.В. Фролов // Медична інформатика та інженерія. – 2008. – № 4. – С. 25–45.

Mathematical Model of Vessel Bifurcation Oriented at Cardio Surgery Clinic

V.A. Lishchuk, D.Sh. Gazizova, S.V. Frolov, S.N. Makoveev, S.G. Farea

*Research Center of Cardiovascular surgery named after
A.N. Bakulev, RAMS, Moscow;
Tambov State Technical University, Tambov*

Key words and phrases: bifurcation; mathematical model; vessel.

Abstract: The paper presents mathematical description of vessel bifurcation model. The volume, pressure and flow as well as their dependence on rigidity, tonus, resistance and persistence are taken into account. The model is constructed in terms enabling to include bifurcation in the composition of the bifurcated multi-level vessel system.

© В.А. Лищук, Д.Ш. Газизова, С.В. Фролов, С.Н. Маковеев,

С.Г. Фареа, 2009