УДК 519.87

СТАТИСТИКА НАПРАВЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ФИНАНСОВЫХ ИНДЕКСОВ

М.А. Бутакова, П.А. Лужецкая

ГОУ ВПО «Ростовский государственный университет путей сообщения»;
ГОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»,
г. Ростов-на-Дону

Ключевые слова и фразы: временная периодичность; поведение финансовых индексов; статистика направленных значений; устойчивые распределения.

Аннотация: Предлагается использование методов статистики направленных значений для моделирования финансовых процессов. Получены основные статистические характеристики для распределения на окружности. Для α-устойчивого распределения получена круговая функция плотности вероят-ности.

Предпосылки использования методов круговой статистики

При моделировании поведения финансовых индексов следует учитывать то, что существует естественный период T на временной оси в эволюции значений финансовых индексов. Это делает оправданным использование распределений на окружности. Для того, чтобы применять этот класс, требуется обоснование, связанное, в основном, с некоторыми видами временной периодичности. Распределения направленных значений получили большее распространение в задачах физики, биологии, географии, чем в задачах моделирования поведения финансовых индексов.

Целью данной статьи является попытка применения и усовершенствование аппарата статистики направленных значений для задач анализа поведения финансовых индексов.

Рассмотрим методы статистики направленных значений более подробно. Впервые данный подход был развит Р. фон Мизесом для случая распределений случайных величин на окружности, а в пространственном виде (на сфере) Н.Т. Фишером [1]. Наиболее современные достижения в этой области на момент написания статьи изложены в [2, 3]. Хорошо известно распределение фон Мизеса – «аналог» нормального распределения:

$$f_{\mu,k}(\theta)=\left[2\pi I_0(k)\right]^{-1}\exp\left[k\cos(\theta-\mu)\right],\quad 0\le k<\infty, \tag{1}$$

где $I_0(k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[k\cos(\varphi)\right]d\varphi=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(1/4\,k^2\right)^j}{(j!)^2}$ – модифицированная функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка; μ – среднее направление концентрированных значений; k – параметр концентрации; θ – случайное значение величины угла.

Без учета периодичности при анализе данных традиционными статистическими методами можно пропустить реально существующую в них закономерность.

Статистические круговые характеристики

Расчет числовых характеристик, аналогов выборочному среднему и выборочной дисперсии направленных значений [3; 4] производится иначе, чем в «традиционных» статистических методах. Приведем пример, поясняющий невозможность применения последних. Для углов 1^0 и 359^0 выборочное среднее значение будет 180^0, выборочные дисперсия и среднее квадратическое отклонение составят соответственно 32 041^0 и 179^0, и очевидно, что эти значения не отражают реальной картины.

Рассмотрим, каким образом определяются числовые характеристики для выборки из n значений, которые условимся далее называть не выборочными, а статистическими.

Для получения естественных оценок вспомним, что выборочное среднее $\bar{x}$ доставляет минимум выражению:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2,$$

а выборочная дисперсия:

$$D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

По аналогии, статистическим средним будем называть

$$\bar{\theta}=\arg\min_{\theta}\sum_{k=1}^{n}\left|e^{i\theta_k}-e^{i\theta}\right|^2=\arg\min_{\theta}\sum_{k=1}^{n}\left((\cos\theta_k-\cos\theta)^2+(\sin\theta_k-\sin\theta)^2\right)=$$

$$=\arg\min_{\theta}\sum_{k=1}^{n}\left(2-2(\cos\theta_k\cos\theta+\sin\theta_k\cos\theta)\right)=\arg\max_{\theta}\left(S_n\cos\theta+C_n\sin\theta\right)=\arg\max_{\theta}\cos(\theta-\varphi).$$

Отсюда $\bar{\theta}=\varphi$, где

$$\varphi=\begin{cases}\mathrm{arctg}(S_n/C_n), & \text{если } C_n>0,\\ \pi/2, & \text{если } C_n=0 \text{ и } S_n>0,\\ -\pi/2 & \text{если } C_n=0 \text{ и } S_n<0,\\ \mathrm{arctg}(S_n/C_n)+\pi & \text{– в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (2)$$

$$(C_n,S_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i,\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i\right)=R.$$

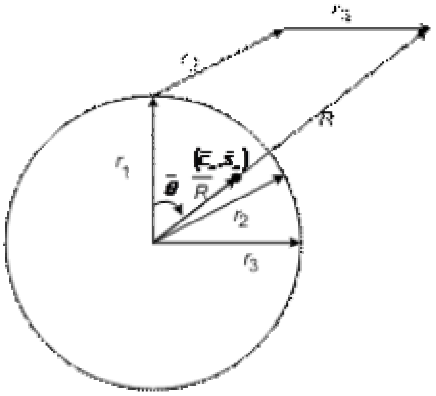

Рис. 1. Характеристики положения направленных значений r_1, r_2, r_3

Статистическая дисперсия определяется как

$$D=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|e^{i\theta_k}-e^{i\theta}\right|^2=1-\frac{1}{n}\sqrt{S_n^2+C_n^2}=1-\frac{1}{n}\|R\|. \qquad (3)$$

Приведем графическую интерпретацию формул (2), (3) на рис. 1.

Выполним расчет характеристик по вышеприведенным формулам для углов 1^0 и 359^0 и получим следующие результаты:

$\bar{R}=\sqrt{(\cos 1+\cos 359)^2+(\sin 1+\sin 359)^2}$ =0,9998477; $\bar{\theta}$ = 0;

D = 0,0001523; S^2 = 0,0003046.

Статистические тригонометрические моменты *p*-того порядка относительно $\bar{\theta}$ определяются формулами:

$$a_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos p(\theta_i - \bar{\theta}), \qquad (4)$$

$$b_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin p(\theta_i - \bar{\theta}). \qquad (5)$$

Заметим, что $b_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_i - \bar{\theta}) = 0$, а величина

$$b_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin 2(\theta_i - \bar{\theta}) \qquad (6)$$

является характеристикой асимметрии направленных значений.

При описании функций и плотностей распределений направленных значений используют подход, основанный на «закручивании» значений случайных величин, имеющих распределение на действительной числовой прямой по окружности с некоторым радиусом. Технически это означает, что каждой «линейной» случайной величине X ставится в соответствие «круговая» случайная величина Y по правилу

$$Y = X - 2\pi \operatorname{int}\left\lfloor \frac{X}{2\pi} \right\rfloor, \qquad (7)$$

где $\operatorname{int}\left\lfloor \frac{X}{2\pi} \right\rfloor$ обозначает целую часть дроби.

Далее будем пользоваться сокращенной записью, аналогичной (7), $Y = X(\operatorname{mod} 2\pi)$. Функция распределения круговых Y будет иметь вид

$$F_c(y) = P(Y \le y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[F(y+2\pi k) - F(2\pi k)\right], \qquad (8)$$

а, следовательно, функция плотности распределения, если существует, будет иметь вид:

$$f_c(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(y+2\pi k), \quad 0 \le y < 2\pi. \qquad (9)$$

Формулы (8) и (9) позволяют вводить круговые аналоги для известных распределений.

Предположим, что плотность $f_c(y)$ разложима в ряд Фурье:

$$f_c(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-iny}.$$

Используя (9), получим, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(y+2\pi k)e^{iny}dy = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\pi(2k-1)}^{\pi(2k+1)} f(y)e^{iny}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{iny}dy = \frac{1}{2\pi}\varphi(n),$$

где $\varphi(y)$ – характеристическая функция распределения F.

Для плотности кругового распределения справедлива формула:

$$f_c(y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n)e^{-iny}. \qquad (10)$$

Продемонстрируем получение плотности кругового экспоненциального распределения. Функция распределения, плотность распределения и характеристическая функция для экспоненциального распределения, соответственно:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \varphi(t) = 1/(1 - it/\lambda), \quad x > 0.$$

В результате

$$f_c(y)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iny}}{(1-in/\lambda)}=\frac{\lambda}{\pi}\left(\frac{1}{2\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda\cos ny-n\sin ny}{\lambda^2+n^2}\right)=\frac{\lambda e^{-\lambda y}}{1-e^{-2\pi\lambda}}.$$

Значительный интерес для задач анализа может представлять круговое распределение, полученное с использованием α-устойчивого распределения с тяжелым хвостом $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ [5]. Отметим, что явный вид плотности известен только для некоторых значений параметров: нормальное распределение, распределение Коши, распределение Леви. Этот факт затрудняет применение устойчивых распределений в задачах моделирования. В тоже время известен замечательный результат теории вероятностей (П. Леви, А.Я. Хинчин) – характеристическая функция α-устойчивого распределения $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ имеет вид:

$$\phi(\theta)=\begin{cases}\exp\left(i\mu\theta-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha\left(1-i\beta Sgn(\theta)tg\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right), & если\ \alpha\neq 1,\\ \exp\left(i\mu\theta-\sigma^\alpha|\theta|\left(1-i\beta\frac{2}{\pi}Sgn(\theta)\right)\right), & если\ \alpha=1,\end{cases} \tag{11}$$

где $\alpha\in(0,2],\ \beta\leq[-1,1],\ \sigma>0,\ \mu\in R$.

Использование (10) и (11) позволяет получить выражение для соответствующей круговой функции плотности в виде быстро сходящегося ряда:

$$f_c(y)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\sigma^\alpha k^\alpha)\cos(k(y-\mu)-\sigma^\alpha k^\alpha\beta tg(\alpha\pi/2)), \tag{12}$$

где $\alpha\in(0,1)\cup(1,2]$. Аналогичное выражение может быть получено для $\alpha=1$.

Заметим, что для симметричного α-устойчивого распределения ($\beta=0$) выражение (12) значительно упрощается

$$f_c(y)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\sigma^\alpha k^\alpha)\cos(k(y-\mu)). \tag{13}$$

В литературе по финансовой эконометрике широкой популярностью пользуются условно-гауссовские модели, в которых финансовые индексы представляются в виде:

$$h_n=\mu_n+\sigma_n\varepsilon_n, \tag{14}$$

где ε – белый шум, μ_n,σ_n – предсказуемые относительно потока σ-алгебр $F_n=\sigma(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ случайные величины.

Использование круговых устойчивых распределений для последовательности ε существенно расширяет возможности моделирования поведения финансовых индексов. В частности позволяет учесть период.

Список литературы

1. Fisher, N.T. Statistical Analysis of Circular Data / N.T. Fisher. – Cambridge University Press, 1995.
2. Jammalamadaka, S. Rao. Topics in Circular Statistics / S. Rao Jammalamadaka, A. Sengupta. – World Scientific Press, Singapore, 2001.
3. Mardia, K.V. Directional Statistics, 2nd Edition / K.V. Mardia, P.E. Jupp. – Wiley, New York, 2000.
4. Мардиа, К.В. Статистический анализ угловых наблюдений / К.В. Мардиа ; Пер. с англ. – М. : Наука, 1978.
5. Золотарев, В.М. Устойчивые законы и их применения. Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика / В.М. Золотарев. – М. : Знание. – 1984. – № 11. – 64 с.