УДК 519.86

АДЕКВАТНОСТЬ МОДЕЛИ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА КРЕДИТНО-ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Д.Н. Протасов

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент И.Н. Дрогобыцкий

Ключевые слова и фразы: динамика развития; дифференциальные уравнения с возмущениями; однофакторные производственные функции; погрешность решения дифференциального уравнения; экономико-математические модели.

Аннотация: Рассматриваются экономико-математические модели, которые позволяют исследовать динамику развития предприятия в зависимости от выбранных инвестиционных стратегий. Данные модели основаны на решении дифференциальных уравнений с возмущениями, которые описывают различные способы инвестирования в бизнесе. Оценивается погрешность полученного решения.

Наблюдаемые в настоящее время условия формирующегося рынка, полная экономическая самостоятельность предприятий, новая система взаимосвязей переменных, принципиально иная налоговая система требуют нового этапа исследований для применения адекватных методов и моделей, позволяющих исследовать динамику развития предприятия, в зависимости от выбранной инвестиционной политики: «чистой» (использование одного инвестиционного источника) и «смешанной» (применение комбинированных схем финансирования), с учетом внешних возмущений, обусловленных влиянием внешних факторов (учет кредитов, налоговых льгот для предприятий) и внешних факторов с импульсным возмущением (изменение курса валют, инфляция и т.п.).

Рассмотрим ранее рассмотренную модель М1 [3], показывающую взаимосвязь между агрегированными переменными (такими как объем выпуска, стоимость основных производственных фондов и темпы их прироста, общая и чистая прибыль, сумма налоговых отчислений и т.д.), разработанную С.Р. Хачатряном и предназначенную для предприятий, функционирующих в условиях, описываемых системой предпосылок, которая используется в модели М1. Однако вместо однофакторной производственной функции будем использовать нелинейные виды производственных функций.

Модель М2 основана на системе предпосылок 1–4 модели М1. Вместо линейной производственной функции (предпосылка 5) используются нелинейные виды однофакторных производственных функций, в том числе:

1) степенная – для описания функционирования новообразованного предприятия, освоившего относительно свободную рыночную нишу и имеющего высокий потенциал развития;

2) экспоненциальная, с затухающими темпами и наличием асимптоты – для предприятия, имеющего ограничения по спросу.

Уравнение (1) описывает динамику прироста основных производственных фондов за счет собственных средств и внешних инвестиций, с учетом непредвиденных факторов. Получим систему уравнений:

$$P(t) = fA(t);$$
$$M^{\text{об}}(t) = (1-c)P(t);$$
$$M(t) = M^{\text{об}}(t) - N(t);$$
$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 K_{\Lambda}(1-\xi)M(t);$$
$$dA/dt = \tilde{a}P(t) + I(t) + \alpha\delta(t); \quad (1)$$

$t \in [0,T]$; $t_0 \in [0,T)$; $\xi \in [0,1]$; $K_\Lambda \in (0,1]$; $\delta(t) = \theta'(t)$,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t - t_0 \geq 0 \\ 0, & \text{при } t - t_0 < 0, \end{cases}$$

где $P(t)$ – выпуск продукции в момент t в стоимостном выражении; f – показатель фондоотдачи; $A(t)$ – стоимость основных производственных фондов; c – удельная себестоимость выпуска продукции в стоимостном выражении; $M^{об}(t)$ – общая прибыль малого предприятия; $M(t)$ – чистая прибыль малого предприятия за вычетом налоговых отчислений; $N(t)$ – сумма налоговых отчислений; τ_1, τ_2 – ставки налогообложения на объем выпуска и прибыль соответственно; ξ – доля чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование, $0 \leq \xi \leq 1$; K_Λ – коэффициент, характеризующий соотношение общей и чистой прибыли предприятия, $K_\Lambda = M^{об}(t)/M(t)$; $\tilde{a}(t) = (1 - c - \tau_1)\xi(t)/1 + \tau_2 K_\Lambda (1 - \xi(t))$ [3]; $I(t)$ – внешние инвестиции; α – внешние возмущения.

Используя соотношение $dA/dt = \tilde{a}P(t) + I(t) + \alpha\delta(t)$, получаем основное уравнение динамики предприятия в случае степенной производственной функции, которое имеет вид

$$dA/dt = \bar{a}[A(t)]^m + I(t) + \alpha\delta(t), \tag{2}$$

где $\bar{a} = \gamma\tilde{a}$; $[A(t)]^m = P(t)/\gamma$.

Анализ уравнения (1) показал, что оно неразрешимо в явном виде. Это уравнение целесообразно решать приближенными методами.

Уравнение (1) разрешимо для случая $I(t) = \beta A(t)$, при котором поток государственных инвестиций пропорционален динамике основных фондов промышленного предприятия с коэффициентом пропорциональности β $(0 < \beta < 1)$, реализуется следующая стратегия финансовой поддержки – чем больше предприятие, тем больше инвестиций ему выделяется. При этом (1) принимает вид

$$dA/dt = \bar{a}[A(t)]^m + \beta A(t) + \alpha\delta(t). \tag{3}$$

Случай экспоненциальной производственной функции. Динамика предприятий часто характеризуется значительной нелинейностью: на первых стадиях их роста могут наблюдаться высокие темпы роста, которые затем снижаются. При этом в модели используются функции, отражающие процесс насыщения производства продукции

$$P(t) = P_0 + \tilde{P}\left(1 - e^{-A(t)}\right), \tag{4}$$

где $P_0 = P(0)$ – начальный уровень производства; $\tilde{P}$ – предел насыщения, $P(t) = P(0) + \tilde{P}$ при $t \to \infty$.

Функция (4) отражает процесс роста уровня производства предприятия до некоторого предела (асимптоты), определяемого внешними условиями (например, сбытом продукции, максимально возможным уровнем интенсификации труда штата сотрудников и т.д.). Дальнейшее падение производства в условиях бизнеса почти всегда означает его свертывание и переход к новому виду продукции, поэтому случаи снижения выпуска продукции в данной модели не рассматриваются.

Используя полученное ранее соотношение, отражающее связь между динамикой основных производственных фондов и производственной функцией при наличии внешних инвестиций, получаем

$$dA/dt = \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 e^{-A(t)} + I(t) + \alpha\delta(t), \tag{5}$$

где $\tilde{a}_1 = \tilde{a}(P_0 + \tilde{P})$ и $\tilde{a}_2 = \tilde{a}\tilde{P}$.

В том случае, если динамика внешних инвестиций известна и задана одним из следующих соотношений:

1) $I(t) = I_0 = \text{const}$;

2) $I(t) = \beta_1 e^{\beta_2 t}$,

из нелинейного дифференциального уравнения (5) получаем следующие варианты динамики основных производственных фондов.

1. Для постоянных инвестиций $I(t) = I_0 = \text{const}$. В этом случае уравнение (4) приобретает вид

$$dA/dt + \tilde{a}_2\, e^{-A(t)} = \tilde{a}_1 + I_0 + \alpha\delta(t).$$

В результате преобразований получаем

$$A(t) = \ln\left[\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1 + I_0 + \alpha\delta(t)} + Ce^{(\tilde{a}_1 + I_0 + \alpha\delta(t))t}\right],$$

где *C* – произвольная постоянная, определяемая из начального условия.

2. Для растущих с темпом β_2 инвестиций $I(t) = \beta_1 e^{\beta_2 t}$.

В этом случае уравнение (4) примет вид

$$dA/dt + \tilde{a}_2 e^{-A(t)} = \tilde{a}_1 + \beta_1 e^{\beta_2 t} + \alpha\delta(t).$$

Решение уравнения (5) для двух вариантов внешнего инвестирования (постоянное и растущее по нелинейному закону) характеризует логарифмический тип роста основных производственных фондов предприятия.

Рассмотрим влияние возмущений на решение исходной дифференциальной задачи Коши:

$$y'(x) - f(x, y(x)) = 0, \quad \text{где } x \in [a, b], \quad y(a) = y_0. \qquad (6)$$

Предполагается, что функция f удовлетворяет условию Липшица по *y*, то есть что существует такая постоянная L, что

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \le L\,\|y_1 - y_2\| \qquad (7)$$

при всех $x \in [a, b]$ и всех y_1, y_2 из интересующей нас области. Это условие обеспечивает единственность решения задачи (6), если оно существует.

Предположим, что $z(x)$ удовлетворяет соотношению

$$z'(x) - f(x, z(x)) = \alpha\delta(x), \qquad (8)$$

где $x \in [a, b]$; $z(a) = y_0 + \alpha\delta_0$, где α мало.

Полагая

$$z(x) = y(x) + \alpha e(x) + O(\alpha^2) \qquad (9)$$

и используя теорему Тейлора, из (8) получаем:

$$y'(x) + \alpha e'(x) - f(x, y(x)) - f_y(x, y(x))\,\alpha e(x) = \alpha\delta(x) + O(\alpha^2),$$

$$y(a) + \alpha e(a) = y(x) + \alpha\delta_0 + O(\alpha^2).$$

Следовательно, функция $e(x)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению:

$$e'(x) - f_y(x, y(x))\, e(x) = \delta(x), \quad e(a) = \delta_0. \qquad (10)$$

Таким образом, если y и z удовлетворяют уравнениям (6) и (8), а $e(x)$ – уравнению (10), то справедливо соотношение (9).

Погрешность приближенного решения задачи (6) удовлетворяет аналогичному уравнению.

Решение задачи (10) представляется в виде

$$e(x) = E(a, x)\delta_0 + \int_a^x E(u, x)\delta(u)\,du, \qquad (11)$$

где

$$E(u,x) = \exp\left[\int_u^x f_y(t, y(t))dt\right]. \qquad (12)$$

Заметим, что если имеется система s уравнений, то $f_y(t, y(t))$ представляет собой $(s \times s)$-матрицу (матрицу Якоби функции f). Такой же матрицей является $E(u,x)$. В этом случае экспонента определяется с помощью бесконечного ряда, который всегда сходится.

Из (11) видно, что влияние возмущения $\delta(x)$ в точке u зависит от функции $E(u,x)$, которая может быть больше или меньше единицы и быть возрастающей или убывающей функцией. Если дифференциальное уравнение имеет вид $y' = \lambda y$, так что $f_y = \lambda$, то $E(u,x) = \exp(\lambda(x-u))$. Если $\lambda > 0$, то влияние погрешности вблизи u на полную погрешность в точке x растет с увеличением x. Если $\lambda < 0$, то происходит обратное. Для других уравнений возможны более сложные типы поведения погрешности.

Функция $e(x)$, которая собственно нас и интересует, должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению (10). Для того чтобы знать $e(x)$, нужно знать s^2 компонент матрицы $E(u,x)$. Необходимый объем работы делает это практически нереальным, за исключением того случая, когда матрица Якоби уже известна, как это бывает в некоторых методах интегрирования жестких уравнений. Обычно мы должны довольствоваться такой локальной погрешностью, которую можно оценить без особого труда.

Это поведение наглядно представляется интегральными кривыми дифференциального уравнения. Множество интегральных кривых уравнения $y'(x) - f(x, y(x)) = 0$ – это множество решений задачи Коши: $y'(x) - f(x, y(x)) = 0$, где $x \in [a,b]$, $y(a) = y_0$, для всех значений y_0. Влияние возмущения состоит в том, чтобы «столкнуть» решение с одной из этих кривых на соседнюю кривую.

Список литературы

1. Хачатрян, С.Р. Методы и модели решения экономических задач / С.Р. Хачатрян. – М. : Экзамен, 2005. – 384 с.
2. Холл, Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Д. Холл, Д. Уатт. – М. : Мир, 1989. – 312 с.
3. Протасов, Д.Н. Развитие модели кредитно инвестиционных ресурсов промышленного предприятия / Д.Н. Протасов // Вопр. современной науки и практики. Ун-т им. В.И. Вернадского. – 2009. – №1. – С. 231–238.

Adequacy of Quality Improvement Model for Industrial Enterprise Credit and Investment Resources

D.N. Protasov

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: growth dynamics; disturbed differential equations; single-factor business functions; error in differential equation solution; economic and mathematical model.

Abstract: The paper studies economic and mathematical models enabling to study the dynamics of industrial enterprise growth based on the preferred investment strategies. These models are based on solving the disturbed differential equations describing different types of business investment. The error of the produced solution is estimated.