УДК 372.851
DOI: 10.17277/voprosy.2023.01.pp.121-130

ЗАДАЧНЫЙ ПОДХОД К ФОРМИРОВАНИЮ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

А. Д. Нахман

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов, Россия

Ключевые слова: задачный материал; моделирование; стохастика; стохастическая ситуация.

Аннотация: Рассмотрено понятие стохастической компетенции. Выделены и охарактеризованы этапы становления данной компетенции, прослежена динамика процесса ее формирования, в качестве соответствующего инструмента предложен задачный подход. Приведены характеристики каждого из указанных типов. В контексте моделирования стохастических ситуаций установлено, что обратная задача представляет собой задание по нахождению некоторых входных параметров, если известен выход модели. Обратные задачи, как важный компонент технологии укрупненных дидактических единиц, встраивается в триаду «упражнение – его обращение – обобщение». Данная триада реализована на конкретном примере.

Введение

В настоящее время стохастические знания, вероятностное мышление, умение строить научно обоснованные прогнозы становятся как нельзя востребованными. Деятельность в условиях неопределенности, умения анализировать степень объективной возможности наступления тех или иных событий предполагают наличие соответствующей вероятностно-статистической подготовки. В соответствии с требованиями обновленных стандартов общего и высшего образования (см. [1 – 3]) выпускник школы должен обладать определенным уровнем так называемой стохастической грамотности [4, 5], а выпускник вуза инженерного или экономического профиля – в достаточной степени сформированной стохастической компетенцией [6].

Вместе с тем средства формирования стохастической грамотности и стохастической компетенции нуждаются в дальнейшем изучении. В нашем понимании стохастическая компетенция есть способность к моделированию стохастических ситуаций.

Нахман Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», e-mail: alextmb@mail.ru, ТамбГТУ, Тамбов, Россия.

Характерной чертой утверждающейся в системе образования компетентностной парадигмы является освоение учащимися новых понятий, методов и фактов в процессе активной познавательной деятельности. Такой деятельности способствует задачный подход. В настоящей работе обсуждаются инновационные задачные системы в качестве инструментов формирования практико-ориентированных стохастических знаний и умений, восходящих к способности стохастического моделирования.

Понятие стохастической компетенции

Выстраивая стохастическую содержательно-методическую линию применительно к системе «школа – вуз», можно выделить три основных этапа данного процесса:

1. Ознакомление с простейшими комбинаторными, вероятностными и статистическими понятиями и формулами и их применение к игровым и прочим простейшим жизненным ситуациям.

2. Становление стохастической грамотности как разновидности грамотности математической. Здесь формируются система представлений о случайных явлениях в окружающей жизни, а также соответствующие умения как в действиях со стохастическими понятиями и фактами, так и в приложениях этих действий к решению практических задач. Стохастическую грамотность, таким образом, можно понимать как своего рода «предкомпетенцию».

3. Формирование стохастической компетенции. Здесь, прежде всего, необходимо сформулировать наше понимание компетенции (компетентности) в общем случае. Проанализировав имеющиеся в литературе определения (см., [7, 8] и др.), приходим к следующим формулировкам.

Компетенция (в широком смысле) – это способность (потенциал) личности на основе освоенных знаний и умений выполнять определенный вид деятельности. Компетентность – это «компетенция в действии», то есть готовность на основе накопленного потенциала получать конечный результат в данном виде деятельности.

Компетенция и компетентность – системные качества личности. Так, говоря о стохастической компетенции, выделим когнитивный компонент (знания и умения в области комбинаторики, теории вероятностей и статистики, теории случайных процессов), мотивационно-ценностный (аксиологический) компонент (мотивацию к решению стохастических задач), конативный (навыки, опыт соответствующей математической деятельности, предрасположенность к ней), личностный (саморегуляция, рефлексия и другие личностные качества, приобретаемые в процессе освоения и применения стохастики).

Употребляя в настоящем контексте термин «деятельность», мы имеем в виду деятельность по анализу так называемых стохастических ситуаций. Эти ситуации (процессы, явления и т.п.) характеризуются непредсказуемостью (исход ситуации невозможно заранее предсказать с абсолютной точностью), воспроизводимостью (ситуация может быть воспроизведена как угодно много раз в остающихся неизменными условиях), наличием свойства устойчивости частот рассматриваемых случайных событий (в этой связи далее вводится понятие стохастического детерминизма).

Стохастическая компетенция предполагает способность к деятельности на основе именно стохастических знаний и умений. Речь, по сути, идет о математической формализации стохастической ситуации, решении получаемой при этом математической задачи и последующей интерпретации результата, то есть выявлении требуемых характеристик анализируемой ситуации. Указанный трехшаговый процесс именуется, как известно, математическим моделированием.

Таким образом, в узком, деятельностном контексте, *стохастическую компетенцию* будем рассматривать как *способность моделировать стохастические ситуации*.

Стохастические модели

Математические модели можно подразделить на детерминированные и стохастические. В первом случае модели описывают поведение объекта или явления с позиций «незыблемости» управляющих им законов, полной определенности в настоящем и будущем; так, для данной совокупности входных характеристик ситуации на выходе модели наблюдается единственный результат.

В отличие от детерминированной, стохастическая (вероятностная) модель дает возможность спрогнозировать *множество всех возможных состояний* стохастической ситуации, охарактеризовать данную ситуацию в терминах вероятностей случайных событий и распределений случайных величин [9], [10, с. 6–7].

Выделяя укрупненные блоки стохастической модели, ее структуру можно представить схематически (рис. 1).

Традиционные задачи теории вероятностей и математической статистики могут рассматриваться как простейшие задачи стохастического моделирования, поскольку предполагают анализ (средствами математики) процессов и явлений, носящих случайный характер.

Обсуждая концепцию стохастического моделирования, следует упомянуть о понятии стохастического детерминизма, которое отражает объективно существующую тенденцию проявления закономерностей в совокупности массовых случайных явлений [11].

Рис. 1. Структура модели

Математическая форма стохастического детерминизма выражается в терминах сходимости по вероятности. А именно, случайные параметры математической модели (частоты, средние значения и др.) практически гарантированно становятся заданно близкими к некоторым неслучайным значениям, если имеет место свойство массовости однотипных стохастических ситуаций:

стохастическая модель -------► детерминированная модель;

«прерывистая» стрелка употребляется по аналогии с обозначением сходимости по вероятности.

Задачный подход. Динамика формирования стохастической компетенции

В условиях перехода от знаниевой к компетентностной парадигме обучения на центральное место выходит системно-деятельностный подход к организации учебного процесса. Ведущая роль теперь отводится активной, разносторонней и максимально самостоятельной познавательной деятельность обучающегося. В свою очередь в рамках системно-деятельностного подхода рассмотрим задачный подход как инструмент формирования знаний и умений (в том числе, умений прикладных) средствами решения систем учебных задач. Наконец, для достижения сформулированной цели предлагаем контекстный задачный материал, включающий в себя задачи-кейсы, задачи-трансформеры (термин автора), обратные стохастические задачи. Сюжеты заданий носят практико-ориентированный или профессионально-ориентированный характер. Соответствующий задачный материал можно считать инновационным в соответствии с концепцией [12], согласно которой инновации характеризуются определенной степенью новизны и нацеленностью на востребованный результат.

Динамика формирования стохастической компетеции/компетентности средствами задачного подхода представлена на рис. 2.

Решение сюжетных задач стохастического содержания возможно уже в рамках начальной школы. При этом отрабатываются понятия случайных событий, элементарных исходов опыта, классической вероятности события и др.

Простейшие сюжетные вероятностно-статистические задачи → стохастические знания и умения

↓

Задачи практико-ориентированного содержания → стохастическая грамотность

↓

Профессионально-ориентированные задания → стохастическая компетенция

↓

Квазипрофессиональные и профессиональные задания → стохастическая компетентность

Рис. 2. Динамика формирования компетенции

Например, может быть предложен вероятностный анализ следующей простой житейской ситуации. В копилке 7 монет по 2 рубля, 10 монет по 5 рублей и 3 – по 10 рублей. Если хорошо потрясти копилку, то через щель выскочит монетка. Какова вероятность, что это будет десятирублевая монета?

Решение заданий практико-ориентированного содержания предполагает наличие у обучающегося хотя бы минимального опыта по анализу типичных практических ситуаций в сочетании с простейшими инструментами стохастики. Здесь востребованы стандартные вероятностные схемы, распределения случайных величин, статистические распределения выборок и др. Например, в задаче речь может идти об анализе коммунальных платежей (выборка квитанций за календарный год, группировка данных о ежемесячных расходах электроэнергии, ее среднемесячное потребление и т.п.).

Простейшие задания с профессионально-ориентированным содержанием могут быть рассмотрены в рамках курса математических дисциплин (см., напр., [9]), задания более сложные и квазипрофессиональные служат предметом рассмотрения соответствующих специализированных кафедр.

Кейсы, трансформеры, обратные задачи

Роли и значению кейс-заданий в формировании и развитии стохастической компетенции посвящена работа [13], поэтому ограничимся кратким рассмотрением. Стохастические кейсы, согласно [13], представляют собой комплексные компетентностно-ориентированные учебные задания по моделированию стохастических ситуаций. Их решение требует оптимального сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности обучающихся. Проанализируем, для примера, следующее кейс-задание.

На пути автомобиля по улице Зеленой 4 светофора, каждый из которых может остановить автомобиль с вероятностью $p = \frac{1}{3}$. Какова вероятность хотя бы одной остановки автомобиля при движении по этой улице? Какова вероятность ровно двух остановок? Не менее двух остановок?

Постройте ряд распределения числа остановок на светофорах. Каково среднее число остановок при постоянной езде по улице Зеленой?

Можно выбрать равный по расстоянию маршрут по улице Весенней, на которой 6 светофоров. Среднее число остановок при постоянной езде по улице Весенней равно 1. Что вероятней: проехать без остановок по улице Зеленой или по улице Весенней? Какой из этих двух маршрутов предпочтительнее с точки зрения экономии времени?

Для решения данного задания необходимо освоение теоретического материала в рамках темы «Вероятностная схема Бернулли». А именно, требуется знание формулы Бернулли и числовых характеристик биномиального распределения. Востребованы также умения строить и анализировать ряды распределения дискретных случайных величин, навыки работы с формулами вероятностей суммы событий, вероятностью наступления хотя бы одного события и др. Поиск ответа на последний вопрос основан на простом житейском опыте: надо найти наиболее вероятное число μ остановок на светофорах на каждой из улиц и сравнить результаты.

Задачи-трансформеры представляют собой задания на моделирование ситуаций или процессов в целях их изучения одновременно в детерминистском и стохастическом направлении в зависимости от вопроса задачи.

Обсудим, например, следующее задание. Биржевыми аналитиками установлено, что стоимость акций компании в последний месяц года должна изменяться по закону $y=(x-8)^2 \mathrm{e}^{15-x}$, где x – календарная дата, $x=1, 2, ..., 30$ (предпраздничный день 31 декабря исключается из рассмотрения). Какого числа следует продать акции, чтобы получить максимальный доход? Какова вероятность, что в случайно выбранный день месяца стоимость акций находится на подъеме?

Очевидно, что для ответа на первый вопрос следует обратиться к детерминированной модели ситуации. Акции выгоднее всего продавать на максимуме роста, следовательно, производная $y'=(x-8)(10-x)\mathrm{e}^{10-x}$ в соответствующей точке должна изменить знак с плюса на минус. Очевидно, что такой точкой будет $x = 10$, то есть акции надо продать 10 декабря.

Второй вопрос предполагает наличие стохастической ситуации, поскольку выбор даты $x \in \{1, 2, ..., 30\}$ случаен. При этом благоприятных исходов, то есть дней роста стоимости акций, всего три: 8, 9, 10 декабря. Искомая вероятность $p=\dfrac{3}{30}$, или $p = 0{,}1$.

Решение обратных стохастических задач является эффективным технологическим приемом для формирования целостности и системности знаний. Обратные задачи – важный компонент технологии укрупненных дидактических единиц (**УДЕ**), которая представляет собой интеграцию целого ряда конкретных подходов к обучению. Ключевой элемент технологии УДЕ – это упражнение: триада «исходная задача – ее обращение – обобщение».

С точки зрения моделирования стохастических ситуаций обратная задача представляет собой задание по нахождению некоторых входных параметров модели по ее известному выходу. Оператор модели при этом может быть полностью известен («прозрачный, белый ящик»), известен в самом общем виде, но не конкретизирован применительно к данному заданию («серый ящик»), либо полностью неизвестен («черный ящик»).

Обсудим в указанном контексте выстраивание упомянутой выше триады применительно к случаю биномиального распределения. Имеем стохастическую ситуацию повторения опытов, в каждом из которых данное событие A имеет одну и ту же вероятность p. В стандартном случае прямой задачи известно число n проводимых опытов и, как правило, отыскиваются вероятности наступления события заданное количество раз. Оператором модели служит формула Бернулли и числовые характеристики распределения. В обратных задачах задействованы следствия, не всегда известные обучающемуся, так что может возникнуть ситуация «серого ящика».

Рассмотрим простейший пример обратной задачи.

При проведении n = 100 одинаковых опытов среднее число наступлений данного события a = 25. Какова вероятность p наступления этого события в каждом из опытов?

Решение. Имеем вектор входных параметров (n, p), где параметр p подлежит отысканию. Оператор модели (в данном случае – формула математического ожидания) полностью известен: $a = np$. На выходе $a = 25$. Следовательно, искомое значение параметра $p = 0{,}25$.

В случае «серого ящика» математической модели рассмотрение следует начинать с прямой задачи. Так, например, для некоторого производства закупаются сигнализаторы в количестве n штук, каждый из которых при возникновении аварийной ситуации срабатывает с заданной вероятностью p. Какова вероятность, что при угрозе аварии сработает не менее k_0 сигнализаторов?

Для решения следует, очевидно, получить (а затем – использовать) в качестве оператора модели такое следствие формулы Бернулли

$$P(k_0 \le k \le n) = \sum_{k=k_0}^{n} P_n(k) \ , \tag{1}$$

где

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} . \tag{2}$$

Теперь можно перейти к следующей обратной стохастической задаче.

При возникновении на производстве аварийной ситуации каждый из сигнализаторов срабатывает с вероятностью $p = \frac{2}{3}$. Какое наименьшее количество таких сигнализаторов надо закупить, чтобы как минимум два из них сработало с вероятностью не менее $\rho = \frac{8}{9}$?

Мы находимся в рамках все той же схемы Бернулли с числом опытов n, вероятностью события в каждом опыте p и числом наступления события $k \ge 2$. На входе модели имеем вектор (n, p, k), где $p = \frac{2}{3}$, $k \ge 2$, а параметр n следует отыскать. Поскольку в равенстве (1) значение n неизвестно, то оператор модели (а именно, соотношение (1)) подлежит дальнейшему уточнению. Так, возможен переход к противоположному событию

$$P_n(k \ge 2) = 1 - (P_n(0) + P_n(1)) .$$

По условию

$$1 - P_n(0) - P_n(1) \ge \rho \quad \text{или} \quad P_n(0) + P_n(1) \le 1 - \rho .$$

Имеем, согласно (1) и (2),

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)^n + \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{n-1} \le 1 - \frac{8}{9}, \text{ откуда } \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 + 2n) \le \frac{1}{9} ,$$

так что простым перебором $n = 1, 2, \ldots$ получаем наименьшее значение $n = 4$.

В качестве обобщения приведенных рассуждений учащийся легко приходит к следующему простому результату. Если требуется (в рамках схемы Бернулли) найти вероятность $P_n(k \geq k_0)$, где $k_0 \leq \frac{n}{2}$ (или n неизвестно), то, на основании формул вероятности суммы попарно несовместных событий и перехода к противоположному событию, целесообразно использовать соотношение

$$P_n(k \geq k_0) = 1 - \sum_{k=0}^{k_0-1} P_n(k), \ k_0 = 1, 2, ..., n-1; \quad n = 2, 3, ...$$

Заключение

Формирование стохастической компетенции обучающихся в системе «школа – вуз» – длительный процесс, затрагивающий все ступени общего образования и продолжающийся на этапе высшего образования. С деятельностной точки зрения происходит становление способности к моделированию стохастических ситуаций, которая и представляет собой «ядро» стохастической компетенции. К таким ситуациям относятся сюжеты вероятностных задач, подлежащие математической обработке данные статистических выборок и другие контекстные задания, в конечном счете – профессионально-ориентированные. Задания традиционной формы, с точки зрения автора, должны быть дополнены заданиями инновационного характера (кейсы, трансформеры, обратные задачи). Их решение способствует комплексному, всестороннему анализу стохастических ситуаций, формированию у обучающихся целостности и системности знаний в области математики и ее приложений.

Список литературы

1. Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования : приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 г. № 287. – Текст : электронный. – URL : http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 (дата обращения: 20.06.2022).

2. Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования : приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.05.2012 г. № 413. – Текст : электронный. – URL : https://docs.cntd.ru/document/902350579 (дата обращения: 20.06.2022).

3. Федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования (3++) по направлениям бакалавриата, ФГОС ВО (3++) по направлениям специалитета. – Текст : электронный. – URL : https://fgosvo.ru/fgosvo/index/24 (дата обращения: 20.06.22).

4. Гомзякова, Л. Ф. О стохастической грамотности школьников / Л. Ф. Гомзякова, О. И. Чикунова // Успехи соврем. естествознания. – 2012. – № 5. – С. 84–85.

5. Рослова, Л. О. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности / Л. О. Рослова, К. А. Краснянская, Е. С. Квитко // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2019. – Т. 1, № 4 (61). – С. 58 – 79.

6. Китаева, И. В. Проблемы формирования стохастической компетентности учащихся / И. В. Китаева // Актуальные проблемы естественно-математического образования : материалы Межрегиональной науч.-практ. конф. – Липецк : ЛИРО, 2012. – С. 39 – 41.

7. Зимняя, И. А. Компетентностный подход. Каково его место в системе современных подходов к проблемам образования? (Теоретико-методологический аспект) / И. А. Зимняя // Высшее образование сегодня. – 2006. – № 8. – С. 20 – 26.

8. Ильязова, М. Д. Компетентностный подход к формированию модели выпускника вуза / М. Д. Ильязова // Вестн. Университета Российской академии образования. – 2007. – № 3. – С. 52–53.

9. Нахман, А. Д. Математика как средство профессионального самоопределения обучающихся / А. Д. Нахман // Вопр. соврем. науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. – 2020. – № 4 (78). – С. 145 – 157. doi: 10.17277/voprosy.2020.04.pp.145-157

10. Нахман, А. Д. Введение в стохастическое моделирование : учеб. пособие / А. Д. Нахман, Ю. В. Родионов. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 89 с.

11. Нахман, А. Д. Стохастические задачи: детерминистский аспект / А. Д. Нахман // Сб. тр. V Междунар. науч.-техн. форума СТНО-2022 : в 10-ти томах. – Рязань, 2022. – Т. 10. – С. 143 – 146.

12. Ващенко, В. П. О сущности инновационной деятельности и ее нормативно-правовой базе / В. П. Ващенко // Наука и промышленность России. – 2002. – № 2-3. – С. 29 – 36.

13. Nakhman, A. D. Case Tasks as a Means of Formation of Stochastic Competence / A. D. Nakhman, I. Yu. Ivanova, T. V. Selyanskaya // Вопр. соврем. науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. – 2015. – № 3 (57). – С. 123 – 130. doi: 10.17277/voprosy.2015.03.pp.123-130

References

1. http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 (accessed 20 June 2022).

2. https://docs.cntd.ru/document/902350579 (accessed 20 June 2022).

3. https://fgosvo.ru/fgosvo/index/24 (accessed 20 June 2022).

4. Gomzyakova L.F., Chikunova O.I. [On the stochastic literacy of schoolchildren], *Uspekhi sovremennogo yestestvoznaniya* [Successes of modern natural science], 2012, no. 5, pp. 84-85. (In Russ.)

5. Roslova L.O., Krasnyanskaya K.A., Kvitko Ye.S. [Conceptual foundations for the formation and evaluation of mathematical literacy], *Otechestvennaya i zarubezhnaya pedagogika* [Domestic and foreign pedagogy], 2019, vol. 1, no. 4 (61), pp. 58-79. (In Russ., abstract in Eng.)

6. Kitayeva I.V. *Aktual'nyye problemy yestestvenno-matematicheskogo obrazovaniya* [Actual problems of natural and mathematical education], Proceedings of the Interregional scientific and practical conference, Lipetsk, 2012, pp. 39-41. (In Russ.)

7. Zimnyaya I.A. [Competence-based approach. What is its place in the system of modern approaches to the problems of education? (Theoretical and methodological aspect)], *Vyssheye obrazovaniye segodnya* [Higher education today], 2006, no. 8, pp. 20-26. (In Russ.)

8. Il'yazova M.D. [Competence-based approach to the formation of a university graduate model], *Vestnik Universiteta Rossiyskoy akademii obrazovaniya* [Bulletin of the University of the Russian Academy of Education], 2007, no. 3, pp. 52-53. (In Russ.)

9. Nakhman A.D. [Mathematics as a means of professional self-determination of students], *Voprosy sovremennoy nauki i praktiki. Universitet im. V. I. Vernadskogo* [Problems of Contemporary Science and Practice. Vernadsky University], 2020, no. 4 (78), pp. 145-157, doi: 10.17277/voprosy.2020.04.pp.145-157 (In Russ., abstract in Eng.)

10. Nakhman A.D., Rodionov Yu.V. *Vvedeniye v stokhasticheskoye modelirovaniye: uchebnoye posobiye* [Introduction to stochastic modeling: textbook], Saratov: Ay Pi Er Media, 2018, 89 p. (In Russ.)

11. Nakhman A.D. [Stochastic problems: a deterministic aspect], *Sbornik trudov V Mezhdunarodnogo nauchno-tekhnicheskogo foruma STNOR-2022: v 10-ti tomakh* [Proceedings of the V International Scientific and Technical Forum STNO-2022: in 10 volumes], Ryazan', 2022, vol. 10, pp. 143-146. (In Russ.)

12. Vashchenko V.P. [On the essence of innovation activity and its regulatory framework], *Nauka i promyshlennost' Rossii* [Science and Industry of Russia], 2002, no. 2-3, pp. 29-36. (In Russ.)

13. Nakhman A.D., Ivanova I.Yu., Selyanskaya T.V. Case Tasks as a Means of Formation of Stochastic Competence, *Voprosy sovremennoy nauki i praktiki. Universitet im. V. I. Vernadskogo* [Problems of Contemporary Science and Practice. Vernadsky University], 2015, no. 3 (57), pp. 123-130, doi: 10.17277/voprosy.2015.03.pp.123-130 (In Eng., abstract in Russ.)

Problem-Based Approach to the Formation of Stochastic Competence of Students

A. D. Nakhman

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: problem sets; modeling; stochastics; stochastic situation.

Abstract: The concept of stochastic competence is considered. The stages of formation of this competence are identified and characterized; the dynamics of the process of its formation is traced, and a task approach is proposed as an appropriate tool. The characteristics of each of these types are given. In the context of modeling stochastic situations, it is established that the inverse problem is a task of finding some input parameters if the output of the model is known. Inverse problems, as an important component of the technology of enlarged didactic units, are embedded into the "exercise – its conversion – generalization" triad. This triad is implemented on a specific example.
