УДК 372.851
DOI: 10.17277/voprosy.2024.04.pp.150-159

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ КУРСА СТОХАСТИКИ В СИСТЕМЕ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

А. Д. Нахман

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов, Россия

Ключевые слова: актуализация стохастических знаний; задачный подход, стохастический детерминизм, вероятностные схемы.

Аннотация: Введение в действие обновленных стандартов общего образования диктует необходимость актуализации вероятностно-статистических знаний у педагогов-математиков. Такая актуализация может быть достигнута в условиях дополнительной курсовой подготовки: речь идет о научных основах «школьного» курса стохастики и соответствующем методическом сопровождении. Предложено: включить в опорную базу стохастических понятий и фактов свойства операций в булевых алгебрах; выделить сущностную сторону некоторых основных положений стохастики (в частности, концепции стохастического детерминизма), минимизируя соответствующие математические формулировки; заложить в основу методического сопровождения курса принцип задачного подхода и указать некоторые направления его реализации. В качестве одного из таких направлений предложена вероятностная схема альтернатив. Рекомендованы тематические задания входного и итогового контроля, позволяющие отследить динамику освоения курса стохастики педагогами-математиками.

Введение

Во вводимых в действие обновленных стандартах общего образования предполагается дальнейшее развитие стохастической содержательной линии. В этой связи возникает необходимость актуализации вероятностно-статистических знаний у педагогов-математиков. Речь, прежде всего, должна идти о тех понятиях и фактах, которые педагог призван «транслировать» обучающимся. Соответствующие требования стандарта [1] сформулированы в терминах «…должен свободно оперировать понятиями…». Мы интерпретируем указанный тезис в виде следующего перечня знаний и умений, освоить которые необходимо также и педагогам-математикам:

Нахман Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», e-mail: alextmb@mail.ru, ТамбГТУ, Тамбов, Россия.

– знание отличительных признаков определяемого стохастического объекта и умение выделить его во множестве разнородных объектов;

– знание свойств объекта, описываемых соответствующими теоремами;

– умение использовать эти свойства при решении различных задач, в том числе – из смежных предметных областей, а также задач, порождаемых реальной действительностью.

В настоящей работе мы предлагаем:

– «обозначить» научную базу стохастических понятий и фактов, изучаемых в школьном курсе;

– выделить сущностную сторону некоторых основных положений стохастики (в частности, явления стохастического детерминизма), минимизируя соответствующие математические формулировки;

– заложить в основу методического сопровождения курса принцип задачного подхода и указать некоторые пути его реализации.

Стохастика: метапредметный аспект

С нашей точки зрения, изучению содержания и методов стохастики должен предшествовать метапредметный взгляд на соответствующую теорию. Речь идет о философских категориях «случайное» и «необходимое», которыми порождаются такие понятия как индетерминизм и детерминизм и, далее, их математическая интерпретация. Так, классический детерминизм предполагает обусловленность последующих состояний изучаемой системы ее предыдущими состояниями. В свою очередь, индетерминизм отрицает такую обусловленность.

В некотором роде промежуточную позицию занимает так называемый стохастический детерминизм. Здесь речь идет о системах стохастического характера, в которых предыдущее состояние системы порождает *множество возможных будущих состояний.* При этом каждое такое состояние характеризуется вероятностью, то есть некоторой численной мерой его осуществимости. Явление стохастического детерминизма проявляет себя в процессе накопления информации о *массовых* случайных исходах: элемент случайности наблюдается в каждом отдельном случае, но имеет место устойчивый в совокупности результат.

К понятию стохастического детерминизма автор обращался в работе [2]. Соответствующего «полюсного» понятия стохастического индетерминизма в доступной автору литературе не обнаружено. В нашем понимании стохастический индетерминизм есть концепция, согласно которой рассмотрение ограничивается вероятностным характером тех или иных событий, когда таких событий немного и еще не обнаруживаются некоторые их совокупные общие тенденции, выражаемые математическим языком. Изучение стохастики, таким образом, предполагает параллельное следование обоим этим направлениям:

Случайные события – события практически достоверные
(*или невозможные*);
вероятность – устойчивость частот;
характеристики выборочных совокупностей – параметры генеральных совокупностей (*состоятельность точечных оценок*);
распределения случайных величин – предельные распределения

В условиях ограниченного количества учебных часов при рассмотрении проблематики стохастического детерминизма акцент, по нашему мнению, должен быть смещен в сторону сущностной стороны дела. То есть здесь, в общих чертах, речь можно вести о свойстве устойчивости относительной частоты, обоснование которого содержится в законе больших чисел Бернулли. Закон больших чисел Чебышева может быть представлен как свойство устойчивости эмпирических числовых характеристик выборочных совокупностей. При рассмотрении центральной предельной теоремы (**ЦПТ**), прежде всего, следует отметить «эмпирический аспект» соответствующей проблематики: весьма часто встречающиеся на практике нормальные распределения (например, ошибки различных измерений обычно бывают распределены нормальным образом). Суть же ЦПТ состоит в следующем: суммарное поведение большого количества независимых случайных величин (с малым влиянием каждой на всю сумму) практически не отличается от поведения нормально распределенной случайной величины.

Научные основы «школьной» стохастики

Стохастический модуль, согласно обновленным ФГОС общего образования (основная и старшая школа) представлен элементами комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики. В целях повышения показателей качества и эффективности «школьной» стохастической подготовки мы предлагаем некоторые направления актуализации соответствующих научных знаний средствами повышения квалификации учителей математики. Что же касается методической составляющей, то здесь необходимо освоение имеющегося инновационного опыта. Такое научно-методическое сопровождение способствует решению следующих задач:

– развитие логических умений слушателей;
– развитие умений строить, анализировать и интерпретировать модели реальных стохастических ситуаций;
– осознание слушателями универсальности математических идей и методов, обнаружение и исследование внутрипредметных связей;
– разработка задачного материала и приемов решения типовых и «нестандартных» заданий.

Научно-методическое сопровождение может быть реализовано в следующих формах:

– лекции по научным основам школьного курса стохастики;
– семинары-практикумы по решению задач;
– диагностика;
– консультации;
– мастер-классы;
– дискуссионные круглые столы;
– самостоятельная работ слушателей.

Возможные темы лекций, посвященные научным основам, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Научные основы компонентов содержания учебной дисциплины

Компонент содержания	Научные основы
Виды событий; действия над событиями	Булевы алгебры; семантическое наполнение
Постулаты вероятности; классическая, статистическая и геометрическая вероятности	Понятие об аксиоматическом построении теорий; аксиомы вероятности
Дискретные распределения; моменты распределений, числовые характеристики	Приемы вычисления конечных сумм; суммирование рядов
Распределения непрерывных случайных величин; моменты распределений, числовые характеристики	Интегральное исчисление; P.V.-несобственные интегралы
Закон больших чисел	Концепция стохастического детерминизма

Приведем соответствующие комментарии.

Операции над элементами булевых алгебр и свойства операций могут быть продемонстрированы на примерах алгебр высказываний, множеств, событий и допускают интерпретацию в терминах двузначной функции $\eta: E(\eta) = \{0;1\}$, называемой, соответственно, функцией истинности, функцией принадлежности, индикатором события. В частности, операции над событиями могут быть проиллюстрированы диаграммами Эйлера, а свойства операций (например, законы де Моргана $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$, $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$) обоснованы с помощью таблиц значений индикатора.

Слушателям следует напомнить систему аксиом, описывающих вероятность как неотрицательную нормированную счетно-аддитивную функцию на алгебре событий. Далее, в общем случае устанавливаются ее простейшие свойства, которые затем проверяются на классической, статистической и геометрической моделях.

Нахождение числовых характеристик дискретных распределений основано на приемах вычисления конечных сумм и суммирования степенных рядов. Здесь задействованы свойства степенных рядов в интервале сходимости (в частности, возможность почленного дифференцирования), разложение экспоненциальной функции и др. Понятно, что возможности перенесения соответствующей обосновательной базы в школьный курс весьма ограничены, однако некоторые элементарные подходы можно найти в статье [3].

В связи с распределениями непрерывных случайных величин (**НСВ**) и их числовыми характеристиками нуждаются в актуализации определение и свойства несобственных интегралов. Особенностью здесь является то, что интеграл по всей числовой оси рассматривается в смысле главного значения (P.V.):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} f(x)dx\,.$$

В частности, именно такое понимание интеграла используется для описания классических распределений: показательного, нормального и др.

Методический аспект

В основу методического сопровождения стохастической подготовки мы предлагаем заложить следующие принципы:

1. Принцип деятельности; данный принцип реализуется через задачный подход, являющийся как мотиватором, так и средством развития знаний и умений.

2. Принцип приоритета сущностной стороны понятий и фактов по отношению к их формально-абстрактной стороне. О подобных приоритетах уже говорилось выше, здесь же речь идет о восприятии изучаемых объектов, в первую очередь, посредством интуитивных соображений, основанных на опыте [4, с. 56]. Так, например, условную вероятность события $P(B/A)$ можно понимать как вероятность события B, вычисленную в предположении, что A уже наступило [5, с. 10]; случайную величину X можно, в упрощенной форме, определить как числовую величину, принимающую в каждом опыте одно и только одно значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин [5, с. 74].

3. Принцип интеграции стохастического модуля в общую систему математической подготовки; здесь отчетливо наблюдаются связи собственно стохастических понятий и фактов с понятиями и фактами алгебры, геометрии и анализа: геометрическая вероятность – приемы вычисления площадей, распределения НСВ – элементы дифференциального и интегрального исчислений и др.; в этой связи отметим также работу [6].

Следование сформулированным принципам способствует, как показывает опыт, достижению следующих конкретных целей (практический результат):

– приобретение навыков действий над событиями на основе свойств булевых операций (что является первичным звеном в нахождении вероятностей «комбинированных» событий);

– освоение вероятностных схем гипотез (формул полной вероятностей и Байеса) и Бернулли (повторения независимых опытов); эти схемы предусмотрены стандартами углубленной математической подготовки школьников и с недавних пор представлены в контрольно-измерительных материалах профильного ЕГЭ;

– осознание важности предельных теорем теории вероятностей как средства проявления «теоретического в эмпирическом».

Некоторые особенности задачного подхода

Приведем некоторые соображения, связанные с задачным подходом к изучению тем, представленных в табл. 1. В имеющихся многочисленных задачниках по теории вероятностей и математической статистике (см., напр., [7]) заданиям на действия над случайными событиями уделяется, с нашей точки зрения, недостаточно внимания, тогда как навыки в таких действиях лежат в основе успешности освоения теорем о вероятностях «составных» событий. Так, учащиеся часто испытывают затруднения в казалось бы простом описании события, противоположного наступлению хотя бы одного из данных событий (или ни одного из них). Например, в решении известного задания № 510117 открытого банка задач ЕГЭ (см. [8]) требуется переход от события «в обоих автоматах кофе останется» к противоположному событию. Типичный ошибочный ответ: «кофе закончится в обоих автоматах». Осознанию ситуации может способствовать ее формализация в терминах алгебры событий. Так, если ввести в рассмотрение события A и B, означающие, что кофе останется в первом и втором автоматах соответственно, то следует рассмотреть событие «не (A и B)», которое по закону де Моргана есть «не A или не B», то есть хотя бы одно из «не A» или «не B». Таким образом приходим к ответу: событие, противоположное данному, есть отсутствие кофе хотя бы в одном из автоматов.

Приведем пример еще одного задания в рамках темы «Алгебра событий», в котором требуется формализация стохастической ситуации по ее описанию, и, наоборот, семантическое наполнение данной формулы. В кошельке 10 монет по 5 рублей и 5 монет по 10 рублей. Монеты извлекаются последовательно (по одной). События A и B – извлечения (наугад) десятирублевой и пятирублевой монет соответственно.

1) Выразите через A и B события: извлечено 20 рублей

(ответ: $AA + BBBB + ABB + BAB + BBA$).

2) Какая денежная сумма извлечена, если наступило событие $\overline{A}B$

(ответ: BB, то есть 5 и 5, а значит, 10 рублей).

Считаем полезным проведение с педагогами практикума по конструированию и решению подобных задач, связанных с формализацией действий над событиями.

Изложим теперь некоторые соображения, относящиеся к методике изучения вероятностных схем гипотез и Бернулли.

Простейший случай формулы полной вероятности для двух гипотез предпочтительнее было бы изложить в контексте следующей (предлагаемой нами) схемы альтернатив, которая на языке комбинируемых событий формулируется так: «или H, и тогда A, или не H, и тогда B». В эту же схему укладываются и другие стохастические ситуации. Например, это может быть задача о нахождении вероятности наступления только одного из двух событий: «или A_1 и тогда не A_2, или (наоборот) не A_1 и тогда A_2». Приведем еще один из возможных примеров использования указанной схемы.

Штангист может взять рекордный вес в каждой из попыток с вероятностью 0,7. С какой вероятностью он возьмет рекордный вес хотя бы со второго раза?

Этапы решения:

1) вербальный (описание анализируемого события): вес взят при первой же попытке, или первая попытка была неудачной, но удачным стал второй подход;

2) формализация: $C = H + \overline{H}B$, где C – установление рекорда; H – успех при первой попытке; B – рекорд при втором подходе;

3) использование формул вероятностей суммы (события H и $\overline{H}B$ несовместны) и произведения и, наконец, вычислительный компонент

$$P(C) = P(H) + (\overline{H})P(B / \overline{H}) = 0,7 + 0,30,7 = 0,91.$$

Изучение схемы Бернулли, как правило, сопровождается изложением соответствующих предельных теорем: локальной и интегральной теорем Лапласа и формулы Пуассона. Как нам представляется, здесь акцент должен быть смещен с чисто вычислительного аспекта (применение приближенных формул) на демонстрацию «внутриматематических связей». В этой связи стоит отметить асимптотику факториальных множителей, лежащую в основе локальной формулы Лапласа, реализацию общей схемы построения определенных интегралов при переходе к соответствующей интегральной формуле, второй замечательный предел в доказательстве формулы Пуассона.

Средства контроля

В отношении теоретического материала мы отдаем предпочтение вопросам на осмысление ситуации с привлечением изученных понятий и фактов в отличие от вопросов традиционных, предполагающих ответы репродуктивного характера. Такой подход в больше степени отвечает деятельностному направлению в обучении. Рассмотрим некоторые из таких вопросов.

1. Приведите пример события, которое в одних условиях является случайным, а в других – достоверным (невозможным).

2. Назовите отличия относительной частоты события от его классической вероятности.

3. Вероятность некоторого события A равна единице. Можно ли утверждать, что это событие является достоверным, если речь идет о вероятности: а) геометрической; б) классической?

4. Если $P(A+B) < P(A)+P(B)$, то что можно сказать о событиях A и B?

(ответ: они совместны)

Динамику успешности стохастической подготовки мы прослеживаем по результатам выполнения тематических контрольных заданий. Приведем некоторые из них (первое задание по каждой теме соответствует контролю на входе, второе – на выходе).

По теме «Алгебра событий»:

1) Событие A состоит в отсутствии денежных купюр в каждом из трех банкоматов. В чем состоит событие, противоположное A?

2) Запишите пары несовместных событий среди указанных: $A\overline{B}$, $A + B$, $\overline{A} + B$, AB.

По теме «Классическая вероятность»:

1) Брошено три игральных кубика. С какой вероятностью сумма выпавших очков будет равна 4?

2) В кошельке 4 пятирублевых и 6 десятирублевых монет. Случайным (и независимым) образом извлекаются три монеты. Какова вероятность, что извлеченных денег хватит на покупку мороженого стоимостью 25 рублей?

По теме: «Вероятность суммы и произведения событий»:

1) Игральный кубик брошен 2 раза. Какова вероятность, что 6 очков выпадет ровно 1 раз?

2) а) Вероятность того, что солнечных дней в декабре будет более 5, равна 0,3, а менее 10 – 0,6. Какова вероятность, что количество солнечных дней будет от 6 до 9?

б) Из двух следующих условий задачи выберите корректное:

– вероятность того, что в первый класс вновь построенной школы подадут более 50 заявлений, равна 0,85, а более 49 – 0,9;

– вероятность того, что в первый класс вновь построенной школы подадут более 50 заявлений, равна 0,9, а более 49 – 0,85.

С какой вероятностью будет подано ровно 50 заявлений?

По теме «Схема гипотез»:

1) В пачке экзаменационных билетов имеются 50 заданий по дифференциальному исчислению, среди которых студент может решить 40 заданий, и 20 заданий по интегральному исчислению, среди которых он может решить 10. С какой вероятностью он решит наугад выбранное задание?

2) Богатырь наугад (равновероятным образом) выбирает одну из трех дорог. Мы знаем (но он этого не ведает), что если пойдет налево, то коня сохранит, но с вероятностью 0,4 меч потеряет; если направо, то меч сохранит, но с вероятностью 0,2 коня потеряет. Зато, если пойдет прямо, то встретит раскрасавицу, которая меч омоет от пыли и коня напоит. С какой вероятностью богатырь сохранит и меч, и коня?

По теме «Статистическое распределение выборки»:

1) В течение 10 дней замерялась в полдень температура за окном, результаты были внесены в таблицу (первая строка – указана температура, вторая строка – количество дней), и вычислена средняя температура – она оказалась равна 14,3. Переписывая таблицу в тетрадь, ученик забыл заполнить последний столбец. Восстановите запись.

12	15	16	…
5 дней	1 день	2 дня	… дней

2) Распределение оценок ВПР случайной выборки из 20 учащихся девятого класса представлено эмпирической функцией:

$$F(x) = 0,\ x \le 3;$$

$$F(x) = 0{,}2,\ 3 < x \le 4;$$

$$F(x) = 0{,}7,\ 4 < x \le 5;$$

$$F(x) = 1,\ x > 5.$$

Восстановите информацию о распределении оценок в привычном виде (оценка – количество учащихся, ее получивших).

Заключение

Изучение основных понятий и фактов стохастики должно быть, по нашему мнению, увязано с такими категориями, как индетерминизм и детерминизм. Своего рода промежуточную позицию занимает здесь стохастический детерминизм, выражаемый математически в виде предельных теорем. Научные основы курса стохастики включают в себя также общие свойства булевых алгебр (реализуемые в действиях над событиями), исчисление несобственных интегралов и др. Среди принципов, закладываемых в основу методического сопровождения стохастической подготовки, на первое место мы ставим принцип деятельности, реализуемый средствами задачного подхода. Выделен, в частности, блок задач, укладывающихся в так называемую схему альтернатив.

Среди рекомендуемых средств контроля отметим теоретические вопросы, направленные на осмысление данной стохастической ситуации, а также тематические задания входного и итогового контроля, позволяющие отследить динамику освоения курса стохастики.

Реализация сформулированных положений в области дополнительной стохастической подготовки призвана служить актуализации вероятностно-статистических знаний и умений и в конечном счете развитию предметных компетенций педагогов-математиков.

Список литературы

1. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. – URL: https://fgos.ru/ (дата обращения: 30.06.24).

2. Нахман, А. Д. Концепция стохастического детерминизма в преподавании математики / А. Д. Нахман // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. – 2022. – № 3(85). – С. 124 – 133. doi: 10.17277/voprosy.2022.03.pp.124-133

3. Нахман, А. Д. Конечные суммы членов последовательностей / А. Д. Нахман // Математика в школе. – 2018. –№ 7. – С. 60 – 65.

4. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1988. – 445 с.

5. Гутер, Р. С. Основы теории вероятностей / Р. С. Гутер, Б. В. Овчинский. – М. : Просвещение, 1967. – 162 с.

6. Терехова, Л. А. Элементы стохастики как средство усиления внутрипредметных связей школьного курса математики / Л. А. Терехова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Гуманитарные науки. – 2008. – Вып. 5(61). – С. 347 – 350.

7. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2004. – 404 с.

8. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня [Электронный ресурс]. – URL: https: ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 30.06.2024).

References

1. https://fgos.ru/ (accessed 30 June 2024).

2. Nakhman A.D. [The concept of stochastic determinism in teaching mathematics], *Voprosy sovremennoy nauki i praktiki. Universitet im. V. I. Vernadskogo*

[Problems of Contemporary Science and Practice. Vernadsky University], 2022, no. 3(85), pp. 124-133. doi: 10.17277/voprosy.2022.03.pp.124-133 (In Russ., abstract in Eng.)

3. Nakhman A.D. [Finite sums of sequence members], *Matematika v shkole* [Mathematics in school], 2018, no. 7, pp. 60-65. (In Russ., abstract in Eng.)

4. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostej* [Course in Probability Theory], Moscow: Nauka, 1988, 445 p. (In Russ.)

5. Guter R.S., Ovchinskiy B.V. *Osnova teorii veroyatnostey* [The basis of probability theory], Moscow: Prosveshcheniye, 1967, 162 p. (In Russ.)

6. Terekhova L.A. [Elements of stochastics as a means of strengthening intra-subject connections of the school mathematics course], *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Gumanitarnyye nauki* [Bulletin of Tambov University. Series: Humanities], 2008, no. 5(61), pp. 347-350 (In Russ., abstract in Eng.)

7. Gmurman V.E. *Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii veroyatnostej i matematicheskoj statistike* [Guide to solving problems in probability theory and mathematical statistics], Moscow: Vysshaya shkola, 2004, 404 p. (In Russ.)

8. https:// ege.sdamgia.ru/ (accessed 30 June 2024).

Scientific and Methodological Support of the Stochastics Course in the System of Advanced Training of Mathematics Teachers

A. D. Nakhman

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: updating of stochastic knowledge; task approach, stochastic determinism, probabilistic schemes.

Abstract: The introduction of updated general education standards justifies the need to update probabilistic and statistical knowledge of mathematics teachers. This can be achieved in the context of additional course training, namely, the scientific foundations of the “school” stochastics course and the corresponding methodological support. It is proposed to include in the supporting base of stochastic concepts and facts the properties of operations in Boolean algebras, to highlight the essential side of some basic provisions of stochastics (in particular, the concept of stochastic determinism), minimizing the corresponding mathematical formulations, to lay the principle of the task approach as the basis for the methodological support of the course and to indicate some directions for its implementation. As one of such directions, a probabilistic scheme of alternatives is proposed. Thematic tasks of the entrance and final tests are recommended, enabling to track the dynamics of mastering the course of stochastics by mathematics teachers.
