УДК 372.851
DOI: 10.17277/voprosy.2023.03.pp.128-143

РЕАЛИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ В КОНТЕКСТЕ НОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СТАНДАРТОВ

А. Д. Нахман

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов, Россия

Ключевые слова: вероятностные схемы; содержание стохастической подготовки; стохастика.

Аннотация: В условиях введения в действие обновленных образовательных стандартов основного и среднего общего образования актуализируется проблема отбора содержания математической (и, в частности, вероятностно-статистической) подготовки и ее методического сопровождения. Соответствующая проблема требует своего решения и в системе дополнительного профессионального образования учителей математики. Представлено авторское видение особенностей содержания стохастической подготовки в системе «школа – вуз». Сформулированы некоторые принципы отбора содержания. При изучении вероятностных схем предложено приоритетное рассмотрение понятия и свойств алгебры событий: качественный анализ стохастической ситуации должен предшествовать выбору вероятностной схемы и вычислению соответствующих вероятностей. Представлены характерные признаки и анализ схемы гипотез и схемы Бернулли; приведены некоторые типовые задачи. Рассмотрены методические аспекты введения понятий и фактов, связанных с явлением стохастического детерминизма (понятие сходимости по вероятности, свойство устойчивости относительной частоты и др.). В качестве методических рекомендаций предложено использование интегральной теоремы Лапласа для обоснования закона больших чисел Бернулли, а также для рассмотрения центральной предельной теоремы в ее простейшем варианте.

Введение

Федеральные государственные стандарты общего образования ([1] с изменениями и дополнениями, датированными 2022 годом) предписывают изучение элементов стохастики в рамках предметной области «Математика». Несмотря на необходимость стохастической подготовки, обозначенной и в более ранних нормативных документах, наличие соответст-

Нахман Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», e-mail: alextmb@mail.ru, ТамбГТУ, Тамбов, Россия.

вующего материала в учебниках (в том числе школьных) разных авторов (напр., [2, 3]) и имеющиеся многочисленные научно-педагогические исследования по соответствующей тематике (см., напр., [4 – 9]), до настоящего времени остаются актуальными проблема отбора содержания вероятностно-статистической подготовки в системе «школа – вуз» и смежные с ней проблемы:

– «проведение границы» между «школьной» и «вузовской» стохастикой;

– распределение материала между уровнями общего образования;

– вопросы аргументации стохастических фактов (какие именно из них подлежат строгому доказательству, а какие принимаются без доказательства или предлагается лишь идея обоснования);

– вопросы конструирования контрольно-измерительных материалов для проверки уровня освоенных знаний и умений;

– вопросы интеграции стохастического компонента в общую систему математической подготовки;

– дальнейшая разработка методического сопровождения процесса школьной стохастической подготовки.

Дополнительным «актуализирующим» данные проблемы фактором является включение в состав контрольно-измерительных материалов (**КИМ**) ЕГЭ профильного уровня (см. [10]) задачи на одну из следующих тем: нахождение вероятности «комбинированного» события, использование вероятностных схем гипотез и независимых испытаний, нахождение математического ожидания дискретно распределенной случайной величины. Эти задачи требуют от учителей математики достаточно глубокого погружения в соответствующую область содержания.

Анализируя указанные проблемы в их совокупности, имеет смысл рассматривать в системе «школа – вуз» в качестве «ассоциированного» компонента подсистему повышения квалификации учителей математики. На практике это означает необходимость разработки всего комплекса организационной, содержательной, методической подготовки педагогов-математиков в области стохастики.

В настоящей работе предлагаются некоторые подходы, которые могут поспособствовать решению (безусловно, частичному!) перечисленных проблем.

Стохастика во ФГОС общего образования

Стохастика, изучаемая в рамках ФГОС [1], представляет собою объединение следующих дисциплин: элементов комбинаторики (как средства подсчета количества возможных исходов опыта, обладающих заданными характеристиками), теории вероятностей и математической статистики. При этом факты и методы комбинаторики не ограничены рамками вероятностных задач – они представляют самостоятельный интерес и могут служить темой отдельного учебного (например, элективного) курса.

Стохастический материал представлен на всех трех этапах общего образования: на начальном (во ФГОС соответствующий этап подготовки явно не прописан, но, по факту, он присутствует как пропедевтический), основном и на этапе среднего образования (старшая школа: уровни базовый и углубленный). Вопросы содержания стохастической подготовки и требования стандарта к ее предметным результатам представлены в табл. 1.

Таблица 1

Требования к предметным результатам стохастической подготовки

Этап общего образования	Владение основными понятиями	Знания и умения
1	2	3
Начальный	Опыт, случайные исходы, достоверные и невозможные события; упорядоченные и неупорядоченные наборы, перестановки	Умение извлекать и использовать информацию, представленную в текстовой, графической форме; устанавливать логику перебора вариантов для решения простейших комбинаторных задач, вычислять количество перестановок; находить проценты, вычислять относительные частоты событий
Основной (базовый уровень)	Случайный эксперимент, элементарный исход, случайное событие, вероятность события. Случайная выборка; среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах числового набора	Умение находить вероятности случайных событий в опытах с равновозможными элементарными событиями; решать задачи методом организованного перебора и с использованием правила умножения; оценивать вероятности реальных событий и явлений. Знакомство с законом больших чисел и его ролью в массовых явлениях. Умение находить числовые характеристики случайной выборки
Основной (углубленный уровень)	*В дополнение к базовому уровню*	
	Комбинаторные понятия: перестановки, размещения, сочетания. Относительная частота и вероятность случайного события, условная вероятность, независимые события, дерево случайного эксперимента	Умение свободно оперировать с факториалами; применять правило комбинаторного умножения и комбинаторные формулы для решения задач. Умение различать зависимые и независимые события; вычислять вероятности комбинированных событий, в том числе с применением формул и графических схем
	Противоположные события, сумма и произведение событий. Понятие случайной величины	Умение находить числовые характеристики дискретных случайных величин. Знание роли закона больших чисел в природе и в социальных явлениях

Окончание табл. 1

1	2	3
Основной (углубленный уровень)	Статистические понятия: статистические данные, среднее значение, медиана, наибольшее и наименьшее значение, рассеивание, размах, дисперсия и стандартное отклонение: статистическая устойчивость	Умение группировать статистические данные, анализировать и сравнивать статистические характеристики числовых наборов, в том числе при решении задач из других учебных предметов
Старшая школа (базовый уровень)	*В дополнение к основному этапу*	
	Основные вероятностные схемы: классическая, статистическая, геометрическая. Дискретные и непрерывные случайные величины, ряд распределения дискретной величины	Умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий. Умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях
Старшая школа (углубленный уровень)	*В дополнение к базовому уровню*	
	Бином Ньютона, треугольник Паскаля. Вероятностные схемы гипотез и Бернулли. Функция распределения случайной величины; плотность непрерывного распределения. Специальные распределения случайных величин: равномерное, биномиальное, показательное. Знакомство с методами выборочных исследований	Умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач. Умение применять формулы полной вероятности и Бернулли. Умение оперировать понятиями функции и плотности распределений; использовать свойства изученных распределений для решения задач. Умение исследовать статистические данные; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии

Заметим, что в приведенной таблице автором разграничены основные понятия и связанные с ними умения; кроме того, дополнены некоторые позиции, исходя из логики стандартов и положений примерных образовательных программ.

Общие подходы к конструированию содержания стохастической подготовки

Стохастика в дополнительном образовании учителей математики

Основные принципы построения содержания стохастической линии, по нашему мнению, могут быть следующими:

– приоритетное внимание к действиям над событиями на основе свойств булевых алгебр;

– «узнаваемость» основных вероятностных схем и алгоритмизации действий в рамках каждой такой схемы;

– стохастический детерминизм;

– интеграция стохастики в общее содержание математической подготовки.

В основе вероятностно-статистического модуля содержания лежат два следующих подхода:

– эмпирический; подход основан на анализе результатов проведенного опыта (серии опытов). Здесь оперируют с относительными частотами событий, эмпирическими распределениями количественного признака генеральной совокупности и т.п.;

– теоретический, умозрительный. В данном случае анализируют возможные результаты мысленного эксперимента, предпринимают построение, исследование, интерпретацию соответствующей математической модели без создания модели натуральной. Связь между обоими подходами содержится в концепции стохастического детерминизма [6], «пунктирно» представленной ниже.

Педагог (а также и обучающийся) должен осознавать, что стохастика не является какой-то особой, «околоматематической» дисциплиной. Стохастика поставляет средства именно математического моделирования неопределенных ситуаций, исходы которых невозможно предсказать с исчерпывающей точностью. В отличие от детерминированных моделей, на выходе которых указывается вполне определенный результат (искомая площадь поверхности, максимальная скорость протекания данного процесса и т.п.), на выходе стохастической модели получаем, например, лишь шанс (шанс, но не гарантию!) того или иного исхода.

По нашему мнению, в результате освоения курса дополнительной подготовки в области стохастики слушатель (учитель математики) должен:

– знать понятие и свойства алгебры событий и иметь представление об аксиоматическом подходе к понятию вероятности;

– уметь применять комбинаторные методы к подсчету числа исходов умозрительного эксперимента, вычислять относительные частоты и геометрические вероятности;

– знать отличительные признаки вероятностных схем гипотез, Бернулли и др.; уметь решать типовые задачи в рамках соответствующих схем;

– владеть приближенными (асимптотическими) соотношениями в схеме Бернулли: локальной и интегральной формулами Лапласа, формулой Пуассона и знать условия их применимости;

– владеть основными понятиями и средствами исследования распределений дискретных и непрерывных случайных величин;

– знать стандартные теоретические распределения: равномерное (дискретное и непрерывное), геометрическое, биномиальное, пуассоновское, нормальное и др., а также соответствующие числовые характеристики;

– уметь решать стандартные типы задач на тему «Эмпирические распределения случайных величин»;

– иметь представление о концепции стохастического детерминизма и математических инструментах ее реализации – законе больших чисел и центральной предельной теореме (**ЦПТ**);

– получить представление о возможностях стохастики как средства упрочения внутриматематических связей.

Особенности пропедевтического этапа стохастической подготовки

На начальном этапе общего образования может быть сформирована база для дальнейшего рассмотрения понятий, фактов и методов стохастики. Так, в начальной школе обучающийся осваивает некоторые методы сбора и группировки данных (включая числовые данные) по заранее заданным характеристикам. Здесь же происходит знакомство со средствами визуализации данных: таблицами, диаграммами, графиками.

Введению комбинаторных понятий предшествуют задания на перебор вариантов, например:

1) сколькими различными способами можно расставить на полке три учебника?

2) сколько существует способов сформировать различные хоккейные команды из 5 игроков (не считая вратаря), если на участие в команде претендуют 6 шесть хоккеистов?

Уже в начальной школе возможно введение такого понятия, как перестановки (без повторений), факториал натурального числа, и на конкретных примерах может быть рассмотрена формула числа перестановок $P_n = n!$

Знакомство с понятиями части от числа и процентов непосредственно предшествует введению определения относительной частоты наступления события. Здесь представляются полезными упражнения следующего типа:

а) в 4 «а» классе среди 25 учащихся 20 % отличников. Сколько отличников в этом классе?

б) в 4 «б» классе 6 отличников, что составляет 25 % от числа всех учащихся. Сколько учащихся в 4 «б» классе?

в) в 4 «в» классе 20 учеников, среди которых 5 отличников. Какую часть коллектива составляют отличники? Каков их процент?

Приведя еще несколько примеров подобного типа, становится возможным определение относительной частоты наступления события. Далее было бы полезным все пункты приведенного выше упражнения переформулировать в терминах относительной частоты, например для п. а):

– в 4 «а» классе 25 учащихся, при этом относительная частота события «данный учащийся – отличник» равна 1/5. Сколько отличников в этом классе?

Приведем другой типовой пример вычисления относительной частоты. В шахматном турнире Аркадий сыграл 5 партий вничью, 4 выиграл и одну проиграл. Какова относительная частота его выигрышей в турнире?

Для начального же этапа характерно формирование интуитивного представления о характере событий (достоверное, невозможное, случайное) и вероятности события. В 3-4-х классах, когда словарный запас обучающихся уже достаточно велик, считаем полезным оперирование с такими категориями (относящимися к наступлению некоторого события), как событие невозможное – «невероятно…»; случайное – «маловероятно…», «вероятно…», «вполне вероятно…»; достоверное – «наверняка…».

Соответствующими синонимами, поясняющими вводимые термины, служат, соответственно, речевые обороты «невозможно…», «едва ли…, сомнительно…», «возможно…, может быть…», «скорее всего…, очень может быть…», «наверняка…, без сомнения…».

В качестве примера приведем такое упражнение. Охарактеризуйте следующие события, вставив вместо многоточия соответствующие слова:

а) …, что Аркадий, имея в кошельке две десятирублевые и одну пятидесятирублевую купюру, сумеет расплатиться без сдачи за порцию мороженного стоимостью 40 р. (ответ: «невероятно»);

б) …, что в сосновом лесу можно собрать землянику («маловероятно»);

в) …, что будет дождь, если на небе грозовые тучи («вполне вероятно»);

г) …, что трехзначное число, оканчивающееся цифрой 6, поделится нацело на 2 («достоверно»).

Как представляется автору, приведенные в настоящем параграфе методические рекомендации и упражнения создают предпосылки для дальнейшего рассмотрения (понимания, освоения) комбинаторных формул и методов, свойств относительной частоты, понятия и свойств классической вероятности.

Иерархия понятий «событие» и «вероятность»

Понятия события, вероятности, случайной величины относятся к основным (неопределяемым). Вероятность в общем случае следует рассматривать как некоторую нормированную счетно-аддитивную меру на борелевской алгебре случайных событий [3, с. 47 – 54], реализуемую (в зависимости от характера анализируемой ситуации) в классической, статистической или геометрической вероятностных схемах.

Однако (и, к сожалению) многие педагоги понимают вероятность (и транслируют это понимание своим ученикам) лишь как процент благоприятных исходов опыта в общем количестве исходов, действуя по известным, но не осознанным до конца шаблонам.

В этой связи в основу построения содержания стохастической подготовки в системе «Школа – вуз» нами положен принцип: «события первичны, вероятности – вторичны». Такой подход предостерегает от весьма часто встречающихся решений, неверных по причине отсутствия должного анализа соответствующих исходных и комбинируемых событий. Указанный анализ может сопровождаться вопросами: «Какие события надо ввести в рассмотрение? Какие действия следует произвести над введенными событиями, чтобы получить «искомое» комбинированное событие? Каковы взаимоотношения вводимых событий важны в контексте заданного условия задачи: совместные / попарно несовместные, зависимые / независимые?» и т.п.

Другими словами, необходим сначала качественный, а затем и количественный анализ рассматриваемой стохастической ситуации.

Качественный анализ основан на определении и свойствах алгебры событий. Элементы алгебры – события достоверные (обозначение E), невозможные (обозначение $\varnothing$), случайные A, B, C, … (могут как наступить, так и не наступить). Изложим методические подходы, ограничиваясь (для определенности и из соображений краткости изложения) уровнем углубленной подготовки на этапе старших классов школы. Соответствующее содержательное наполнение представляется следующим.

Вводятся действия сложения и умножения событий. Формулируются свойства операций – обычные для булевых алгебр.

С помощью введенных операций можно определить теперь понятие несовместности и полноты группы событий, а затем – понятие противоположных событий. Так, события A и $\overline{A}$ называются противоположными, если они несовместны и образуют полную группу:

$$A\cdot\overline{A}=\varnothing,\quad A+\overline{A}=E.$$

Приведем некоторые упражнения на тему «Действия над событиями».

Даны события A, B, C. Выразите через операции над ними следующие события:

1) не наступит ни одно из данных событий;

2) наступит хотя бы одно из событий, противоположных данным;

3) наступит событие, противоположное наступлению хотя бы одного из данных событий;

4) наступит событие, противоположное ненаступлению всех данных событий;

5) наступит только одно из данных событий;

6) наступят ровно два из указанных событий;

7) наступят хотя бы два из указанных событий.

Следующий шаг в излагаемом методическом подходе – количественный анализ стохастических ситуаций путем введения численной меры степени возможности события; эта численная мера и есть вероятность. За единицу измерения принимают вероятность достоверного события. Невозможному событию приписывают нулевую вероятность. Естественно тогда считать вероятность случайного события числом из промежутка [0; 1]. Таким образом, получаем «шкалу измерения» – отрезок [0; 1].

В качестве возможных моделей абстрактного понятия вероятности рассматриваются классическое и геометрическое определения, сопровождаемые проверкой выполнимости указанного шкалирования. Здесь же вводится статистический аналог вероятности – относительная частота события и в «первом приближении» (со ссылкой на результаты многочисленных экспериментов) формулируется свойство устойчивости относительной частоты.

Далее возможен переход к формулам вероятности произведения и суммы событий (проверяя их на классической модели) и решению типовых задач. Обсудим, для примера, одну из них.

В утренний час пик пробка на дороге возможна с вероятностью 0,4, в вечерний – с вероятностью 0,2. С какой вероятностью хотя бы в один из утреннего или вечернего часов пик возможен проезд без стояния в пробке?

Следуя принципу приоритетного внимания к действиям над событиями, решение начинаем с введения событий A_1 и A_2, означающих утреннюю и вечернюю пробки соответственно. Требуется найти вероятность события (событие А), противоположное которому будет событие A_1A_2 – «и утром и вечером предстоит стояние в пробке». Согласно условию, A_1 и A_2 – независимые события. Теперь переходим к вероятностям $p(A) = 1 - p(A_1A_2)$; далее применима формула умножения $p(A_1A_2) = p(A_1)p(A_2) = 0{,}08$ и $p(A) = 0{,}92$.

В рамках данного параграфа обсудим также «пограничную черту» между содержанием стохастического компонента в углубленном курсе математики средней школы и в вузовском курсе.

В развитие понятий и стохастических фактов вузовский курс, по нашему мнению, должен строиться на достаточно абстрактном уровне. Так, в качестве простейшей случайной величины в рассмотрение вводится индикатор события $\eta(A)$, определяемый следующим образом: $\eta(A) = 1$, если событие A наступило, и $\eta(A) = 0$, если оно не наступило.

Индикатор события вполне аналогичен функции истинности, определенной на булевой алгебре высказываний. Такая аналогия позволяет формализовать доказательства свойств операций сложения и умножения, привлекая таблицы истинности основных логических операций (см. [4]). В самом деле, высказывание «наступит хотя бы одно из событий A_1 или A_2» («наступят оба события A_1 и A_2») истинно тогда и только тогда, когда истинна дизъюнкция (конъюнкция) высказываний «наступит A_1», «наступит A_2». Следовательно, имеет место взаимно-однозначное соответствие между операциями сложения (умножения) событий и дизъюнкцией (конъюнкцией) соответствующих высказываний, следует лишь «нули» и «единицы» в таблицах понимать как значения индикатора (табл. 2 и 3).

Таблица 2

Сумма событий

$\eta(A_1)$	$\eta(A_2)$	$\eta(A_1 + A_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 3

Произведение событий

$\eta(A_1)$	$\eta(A_2)$	$\eta(A_1A_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Далее уточняется понятие вероятности: согласно аксиоматике А. Н. Колмогорова, вероятность есть неотрицательная счетно-аддитивная нормированная функция (мера), заданная на борелевской алгебре событий [3, с. 53–54]. Непосредственно из аксиом выводятся простейшие свойства вероятности. Выполнимость аксиом (например, аксиомы сложения) проверяется на ранее знакомых моделях вероятности – классической и геометрической. Дальнейшее изучение стохастического материала в вузовском курсе математики строится по достаточно стандартной схеме в объеме, определяемом количеством зачетных единиц, отводимых на математические дисциплины по данному направлению (данной специальности) профессиональной подготовки.

Вероятностные схемы гипотез и Бернулли

В связи с включением в состав КИМов ЕГЭ (профильный уровень) заданий на формулы полной вероятности, Бейеса и Бернулли, считаем целесообразным обсуждение особенностей этих вероятностных схем. Соответствующее рассмотрение предполагается и в составе содержания дополнительной подготовки педагогов-математиков.

Прежде всего, необходимо знание характерных признаков данных схем. Так, ситуации применимости формул полной вероятности и Байеса обладают следующим общим признаком: данному событию A предшествует наступление одного (заранее неизвестно, какого именно) из событий H_1, H_2, ..., H_n, попарно несовместных и образующих полную группу. В этом случае события H_1, H_2, ..., H_n называют гипотезами по отношению к A (именуем данную ситуацию также ситуацией «неопределенного предшественника»), и вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P_{H_k}(A),$$

где $P_{H_k}(A)$ – соответствующая условная вероятность.

Если же стало известным, что в этих условиях событие A наступило, то вероятность того, что оно оказалось следствием гипотезы именно H_k, определяется в виде

$$P_A(H_k)=\frac{P(H_k)P_{H_k}(A)}{P(A)},\ k=1, 2, ..., n,$$

(формулы Бейеса), где $P(A)\neq 0$ – полная вероятность.

В качестве характерного примера рассмотрим задание 508 795 из банка КИМов ЕГЭ [10].

Игральный кубик бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что было сделано два броска?

Здесь вполне узнаваема схема гипотез: неизвестно число бросков, предшествующее событию A – «суммарное значение равно 3». Имеет смысл введение трех гипотез H_k $(k=1,2,3)$: кубик брошен 1 или 2, или 3 раза (большее число бросков исключено, так как суммарное количество очков превысит значение 3). Гипотезы, очевидно, равновероятны: $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$ Далее непосредственным перебором вариантов находим все три условные вероятности $P_{H_k}(A)$: $P_{H_1}(A)=1/6$, $P_{H_2}(A)=1/18$, $P_{H_3}(A)=1/216$. Так как событие A является наступившим, то применима формула Бейеса для искомой $P_A(H_2)$. Получаем $P_A(H_2)$ = 12/49, то есть произошла обычная для схемы гипотез переоценка их априорных вероятностей.

Характерный признак схемы Бернулли состоит в следующем: имеется серия из n повторяющихся (независимых) опытов, в каждом из которых вероятность p наступления некоторого события A одинакова. Ключевая задача: с какой вероятностью это событие наступит ровно k раз ($k \in \{0,1,...,n\}$)? Решение ключевой задачи находится по расчетной формуле Бернулли

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Здесь C_n^k – число сочетаний (число неупорядоченных выборок) из n по k, $q=1-p$.

В качестве полезного упражнения может быть предложено задание на получение формул для вычисления вероятности наступления события A:

– не менее (не более) заданного количества раз;

– хотя бы один раз.

С целью комплексного исследования биномиально распределенной случайной величины (количества успехов в схеме Бернулли) может быть также предложен следующий стохастический кейс.

В интернет-магазине наблюдается устойчивый спрос на гаджеты данной модели. В среднем хотя бы на один гаджет из имеющихся в наличии 5 единиц поступает заказ в течение рабочего дня с вероятностью 31/32. Какова вероятность, что в течение дня не поступит ни одного заказа? Ровно 2 заказа? Не менее 2 заказов? Не более 2 заказов? Каково среднее число поступающих в течение рабочего дня заказов (ответ округлите до целого числа).

Стохастический детерминизм

Считаем необходимым обсудить с педагогами-математиками пути разрешения противоречия между привычными детерминистскими подходами в математике (которые проявляют себя в задачах на математическое моделирование детерминированных же ситуаций) и новыми (для обучающихся) задачами стохастического моделирования. Связующим звеном здесь является существование объективной закономерности, проявляющей себя в процессе накопления информации о *массовых* случайных явлениях; элемент случайности проявляется в каждом отдельном случае, но имеет место устойчивый в совокупности результат. В узком, математическом смысле, речь идет об устойчивости относительных частот, средних значений и др.

Свойство стохастического детерминизма напрямую проявляет себя в так называемом законе больших чисел и ЦПТ, общий смысл которых состоит в том, что совместное действие большого числа одинаковых и независимых случайных факторов приводит к результату, в пределе не зависящему от случая. Закон больших чисел (в виде нескольких утверждений: теорем Чебышева, Бернулли, Маркова) формулируется в терминах сходимости по вероятности. Суть этого понятия состоит в следующем: последовательность параметров θ_n сходится по вероятности к параметру θ (обозначение: $\theta_n \dashrightarrow \theta$) в том случае, когда с уверенностью, сколь угодно близкой к 100 %, можно утверждать, что отклонение $|\theta_n - \theta|$ будет заданно малым, если только значение n достаточно велико. Приведем точную математическую формулировку понятия сходимости по вероятности: $\theta_n \dashrightarrow \theta$, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta_n - \theta| < \varepsilon) = 1.$$

В этой связи заметим следующее: педагог (а вместе с ним и обучающийся-школьник) должен понимать, что сходимость по вероятности принципиально отличается от «обычной» сходимости последовательности θ_n к θ: здесь отдельные значения θ_n могут и при больших n значительно отклоняться от параметра θ, однако вероятность таких отклонений весьма мала.

Вернемся к методической стороне рассмотрения закона больших чисел на примере свойства устойчивости относительной частоты случайного события (закон Бернулли). Если на вводном этапе изучения теории вероятностей оно формулируется без математического обоснования (дается, как указывалось выше, лишь ссылка на результаты массовых экспериментов), то на более высоком уровне рассмотрения данное свойство находит подтверждение в форме закона (теоремы) Бернулли. А именно, если $w_n(A) = \dfrac{m_A}{n}$ – относительная частота события A в n опытах и $p(A)$ – его вероятность, то имеет место сходимость по вероятности $w_n(A) \dashrightarrow p(A)$. Доказательство (его рекомендуем проводить в следующей упрощенной форме) может быть получено на основании интегральной теоремы Лапласа ([3], с. 72–73). А именно, в качестве следствия данной теоремы устанавливается соотношение

$$P(|w_n(A) - p(A)| < \varepsilon) \sim 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(A)(1-p(A))}}\right),$$

в котором значения интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$ будут стремиться к 1/2 при $n \to \infty$ [3, с. 69, 72]. Этим и завершается обоснование устойчивости относительной частоты.

Считаем полезным также краткое рассмотрение другого (более общего) проявления закона больших чисел. Оно состоит в тенденции к устойчивости средних арифметических наблюдаемых значений (выборочной средней) количественного признака некоторой генеральной совокупности в условиях роста числа наблюдений (факт, устанавливаемый эмпирически). Так, подобная тенденция может обнаруживаться при неоднократных измерениях (одним и тем же прибором) какой-либо величины (например, при пятикратном, затем десятикратном и других циклах измерений). Соответствующее математическое обоснование содержится в законе (теореме) Чебышева: среднее арифметическое n попарно независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные дисперсии, сходится по вероятности (при $n \to \infty$) к их общему математическому ожиданию.

Представим наши подходы к изложению утверждений ЦПТ. Прежде всего, следует отметить «эмпирический аспект» соответствующей проблематики: нормальные распределения случайных величин на практике встречаются весьма часто; например, ошибки различных измерений обычно бывают распределены нормальным образом. Рассмотрение следует начать с примера центрированной и нормированной суммы индикаторов, для которой последовательность функций распределения (согласно интегральной теореме Лапласа) сходится к функции стандартного нормального распределения. Слушателям вполне доступна соответствующая точная формулировка. А именно, пусть $\{\eta_k\}$ – последовательность индикаторов события A (k – номер опыта) в серии из n независимых испытаний (схема Бернулли), $p = P(A)$ – вероятность наступления события A в каждом опыте $(0 < p < 1)$. Тогда при $n \to \infty$ имеет место следующая равномерная (по $x \in (-\infty; +\infty)$) сходимость:

$$P\left(\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_k + \ldots + \eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt .$$

Далее отмечается справедливость обобщающего утверждения ЦПТ, верного для широкого класса независимых случайных величин, суть которого состоит в следующем: суммарное поведение большого количества таких величин (с малым влиянием каждой на всю сумму) практически не отличается от поведения стандартной нормально распределенной случайной величины. Рекомендуется точная формулировка теоремы в частном случае произвольной последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_k\}$ с конечными математическим ожиданием $a = M(X_k)$ и средним квадратическим отклонением

$\sigma = \sigma(X_k)$, $k = 1, 2, ...$ А именно, при $n \to \infty$ имеет место следующая равномерная (по $x \in (-\infty; +\infty)$) сходимость:

$$P\left(\frac{X_1 + ... + X_k + ... + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt .$$

Заключение

В работе предпринята попытка проанализировать динамику развития стохастической линии (в рамках системы «школа – вуз») в стандартах общего образования от начального этапа до этапа старших классов с сохранением преемственности стохастической подготовки при переходе к вузовскому курсу математики. Выделены ключевые концепции предлагаемых подходов: особенности стохастической пропедевтики, иерархия в паре «событие – вероятность», постулаты вероятности, некоторые вероятностные схемы, стохастический детерминизм в двух его проявлениях: законе больших чисел как законе устойчивости эмпирических характеристик и ЦПТ как законе «группового тяготения» к нормальному распределению.

Предложенные вопросы содержания курса стохастики, методические рекомендации и задачный материал, как надеется автор, послужат более глубокому осознанию стохастических понятий и фактов, вводимых в школьный курс математики, актуализации умений и навыков решения соответствующих задач и, в конечном счете, развитию математической компетенции обучающихся.

Список литературы

1. Федеральные государственные образовательные стандарты. – URL : https://fgos.ru/ (дата обращения: 10.06.23).

2. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учеб. для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М. : Мнемозина, 2007. – 287 с.

3. Гутер, Р. С. Основа теории вероятностей / Р. С. Гутер, Б. В. Овчинский. – М. : Просвещение, 1967. – 162 с.

4. Алмазова, Т. А. Методические аспекты подготовки будущих учителей математики на примере вероятностно-статистической линии. – Текст : электронный / Т. А. Алмазова, Н. О. Громова // Соврем. проблемы науки и образования. – 2020. – № 6. – URL : https://science-education.ru/ru/article/view?id=30375 (дата обращения: 08.06.2023).

5. Нахман, А. Д. Задачи на вычисление вероятности события / А. Д. Нахман // Математика в школе. – 2011. – № 1. – С. 34 – 41.

6. Нахман, А. Д. Концепция стохастического детерминизма в преподавании математики / А. Д. Нахман // Вопр. соврем. науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. – 2022. – № 3 (85). – С. 124 – 133. doi: 10.17277/voprosy.2022.03.pp.124-133

7. Слободчиков, В. И. Инновации в образовании: основания и смысл. – Текст : электронный / В. И. Слободчиков // Интернет-портал «Исследователь.ru». – 2009. – URL : https://www.researcher.ru/methodics/nauka/a_1xizkd.html (дата обращения: 10.06.23).

8. Promoting the Development of Teacher Professional Knowledge: Integrating Content and Pedagogy in Teacher Education / M. Evens, J. Elen, Ch. Larmuseau, F. Depaere // Teaching and Teacher Education. – 2018. – Vol. 75. – P. 244 – 258. doi: 10.1016/j.tate.2018.07.001

9. Ellis, V. Innovation in Teacher Education: Collective Creativity in the Development of a Teacher Education Internship / V. Ellis, A. Childs // Teaching and Teacher Education. – 2019. – Vol. 77. – P. 277 – 286. doi: 10.1016/j.tate.2018.10.020

10. Сдам ГИА: решу ЕГЭ. – Текст : электронный // Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня. – URL : https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения 10.06.2023).

References

1. https://fgos.ru/ (accessed 10 June 2023).

2. Mordkovich A.G., Semenov P.V. *Algebra i nachala analiza. 11 klass. V 2 ch. Ch. 1. Uchebnik dlya obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdeniy (profil'nyy uroven')* [Algebra and the Beginnings of Analysis. Grade 11. At 2 pm Part 1. Textbook for educational institutions (profile level)], Moscow: Mnemozina, 2007, 287 p. (In Russ.)

3. Guter R.S., Ovchinskiy B.V. *Osnova teorii veroyatnostey* [The basis of probability theory], Moscow: Prosveshcheniye, 1967, 162 p. (In Russ.)

4. https://science-education.ru/ru/article/view?id=30375 (accessed 08 June 2023).

5. Nakhman A.D. [Tasks for calculating the probability of an event], *Matematika v shkole* [Mathematics at school], 2011, no. 1, pp. 34-41. (In Russ., abstract in Eng.)

6. Nakhman A.D. [The concept of stochastic determinism in teaching mathematics], *Voprosy sovremennoy nauki i praktiki. Universitet im. V. I. Vernadskogo* [Problems of Contemporary Science and Practice. Vernadsky University], 2022, no. 3 (85), pp. 124-133, doi: 10.17277/voprosy.2022.03.pp.124-133 (In Russ., abstract in Eng.)

7. https://www.researcher.ru/methodics/nauka/a_1xizkd.html (accessed 10 June 2023).

8. Evens M., Elen J., Larmuseau Ch., Depaere F. Promoting the Development of Teacher Professional Knowledge: Integrating Content and Pedagogy in Teacher Education, *Teaching and Teacher Education*, 2018, vol. 75, pp. 244-258, doi: 10.1016/j.tate.2018.07.001

9. Ellis V., Childs A. Innovation in Teacher Education: Collective Creativity in the Development of a Teacher Education Internship, *Teaching and Teacher Education*, 2019, vol. 77, pp. 277-286, doi: 10.1016/j.tate.2018.10.020

10. https://ege.sdamgia.ru/ (accessed 10 June 2023).

Implementation of Stochastic Content Line in the Context of New Educational Standards

A. D. Nakhman

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: probabilistic schemes; content of stochastic training; stochastics.

Abstract: In the context of the introduction of updated educational standards for basic and secondary general education, the problem of selecting the content of mathematical (and, in particular, probabilistic-statistical) training and its methodological support has become urgent. The corresponding problem requires a solution in the system of additional professional education for mathematics teachers. The author's vision of the features of the content of stochastic training in the "School – University" system is presented. Some principles for selecting content are formulated. When studying probabilistic schemes, a priority consideration of the concept and properties of event algebra is proposed: a qualitative analysis of a stochastic situation should precede the choice of a probabilistic scheme and the calculation of the corresponding probabilities. The characteristic features and analysis of the hypothesis scheme and Bernoulli scheme are presented; some typical tasks are proposed. The methodological aspects of introducing concepts and facts related to the phenomenon of stochastic determinism (the concept of convergence in probability, the property of relative frequency stability, etc.) are considered. As methodological recommendations, the use of Laplace's integral theorem is proposed to substantiate Bernoulli's law of large numbers, as well as to consider the central limit theorem in its simplest version.