УДК 378.147
DOI: 10.17277/voprosy.2021.02.pp.138-158

ЦИФРОВИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ: ПРЕПОДАВАНИЕ КУРСА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Н. И. Лобанова, Н. П. Пучков

МУДО «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», Ставропольский край, Россия; ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Е. С. Жуковский

Ключевые слова: задачи и проблемы цифровизации образования; интеграция компетенций; комплексные задания; практикумы по дифференциальным уравнениям; рациональное сочетание педагогических технологий.

Аннотация: Проанализированы некоторые проблемы, порождаемые технологией цифровизации математического образования в учебных заведениях. Рассмотрены вопросы рационального использования средств цифровизации при изучении курса «Дифференциальные уравнения», а также технология разработки комплексных практических заданий, содержащих элементы как традиционных аналитических исследований, так и средств компьютерной математики. Показана роль систем компьютерной математики на практических занятиях по дифференциальным уравнениям. Обоснована идея о том, что интеграция компетенций является действенным средством разрешения обозначенных проблем процесса цифровизации обучения. Представлен конкретный пример организации практического занятия по дифференциальным уравнениям, содержащий иллюстрацию методических задач рационального сочетания аналитических исследований и цифровых технологий.

Введение

Осуществляемая в стране цифровизация образования направлена как на повышение качества подготовки специалистов, так и интенсификацию процесса обучения. Совершенствование учебного процесса при использо-

Лобанова Наталья Ивановна – педагог дополнительного образования, МУДО «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», Ставропольский край; Пучков Николай Петрович – доктор педагогических наук, профессор кафедры «Высшая математика», e-mail: puchkov_matematika@mail.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов, Россия.

вании потенциала цифровизации связано с возможностью адаптивного управлением развитием личности специалиста на основе цифрового следа его познавательной и профессиональной деятельности, а также посредством максимальной индивидуализации образовательной деятельности и учета личностных особенностей и целеполагания каждого обучающегося. При этом повышается уровень наглядности в обучении, ускоряется темп усвоения информации, исключаются процессы рутиной работы, не требующей существенных умственных способностей, связанных, например, с вычислениями, переборами всевозможных вариантов и решений и т.п. [1].

Главное достоинство цифровизации – широкое поле своего дальнейшего развития. В будущем цифровизация в образовании будет только увеличиваться, что ставит перед преподавателями непростую задачу – научиться пользоваться теми благами, которые она предлагает: не бояться новых цифровых «дисциплин», изучить их и выбрать для себя именно ту, которая будет помогать организовать учебный процесс.

В истории математики отмечались факты разделения математиков на два рода: математиков-философов, для которых главное – математические идеи, аналитические исследования и математиков-вычислителей, которые суть математики видят в исчислениях, цифрах и формулах [2]. Развитие вычислительных средств и компьютерных технологий заметно увеличивает количество и повышает статус последних. Замечено, что в настоящую эпоху цифровизации среди преподавателей математики наблюдаются как приверженцы аналитических методов решения математических задач, так и абсолютных сторонников компьютерной математики, позволяющей более оперативно с высокой степенью наглядности решать многие математические задачи, в том числе и не имеющие аналитического решения. Второй подход находит более успешное признание в среде обучаемых, когда исходную информацию вводят в специальную программу и одним нажатием кнопки получают требуемый результат. Это обстоятельство приобретает, зачастую, нежелательные последствия: многие обучаемые занимаются не поиском решения самой математической задачи, а поиском готового решения данного типа задач, а в результате обилие в информационной среде «полуфабрикатов» знаний приводит к разрыву между знаниями и опытом познания. Также цифровизация несет с собой и другие проблемы. Например, установлено, что чрезмерное увлечение средствами цифровизации в процессе преподавания математических дисциплин приводит к снижению умственной активности проявления творческих качеств деятельности и проблемам коммуникации при решении достаточно сложных комплексных задач [3].

Наличие, как в преподавательской среде, так и между преподавателями и студентами, различных (а, порой, и противоположных) взглядов на методику решения задач математики актуализирует задачу разработки педагогических технологий, которые, используя в полной мере потенциал цифровизации, позволяли бы сохранить на высоком уровне сложившуюся фундаментальность изучаемого предмета, формировать универсальные компетенции и развивать креативность обучающихся как основу их инновационной готовности к профессии, что и составляет цель данного исследования.

Методология исследования обозначенной проблемы

Электронные средства образовательного назначения по существующей классификации можно разделить на обучающие, контролирующие, информационно-поисковые и справочные, демонстрационные, моделирующие программные средства. Среди всего этого многообразия нас интересуют те, которые можно использовать для обучения решению математических задач. Как показывает опыт преподавательской деятельности, в настоящее время ощущается проблема рационального сочетания классических, аналитических методов решения математических задач и бурно прогрессирующих методов компьютерной математики при максимальном сохранении их достоинств. Одним из перспективных направлений работ в существующей ситуации является организация интегрированных видов деятельности обучающихся, позволяющей заметно снизить уровень угроз негативного воздействия процессов цифровизации, создающих, в то же время, условия гармоничного сочетания философско-математического ума человека и постоянно прогрессирующих компьютерных технологий при решении различных математических задач, сохраняя ведущую роль человека, его наследственные и приобретенные качества [4, 5].

В целях преодоления проблем цифровизации в процессе преподавания математики следует, по возможности, демонстрировать обучающимся, что успешность решения математических задач обеспечивается не столько применением готовых рецептов, сколько математическим подходом к явлениям реального мира [6].

Такие предположения предопределили методологию действий при проектировании учебных программ математических дисциплин: гармоничное сочетание заданий, требующих повышенных способностей, логического мышления, навыков математического моделирования анализа результатов, и достоинств цифровых технологий: сокращение временных затрат на громоздкие вычисления, наглядность результатов, мультимедийность, возможность оперативного поиска конкретных оптимальных вариантов моделей, решении и т.п.

Наиболее эффективно осуществить такую технологию при выполнении комплексных (в плане использования математических методов) заданий, охватывающих как различные разделы изучаемого учебного курса, так и исследование ситуаций реального мира на объектах, наиболее знакомых обучающимся, где действуют понятные для них процессы и взаимосвязи. Информационную модель такого преподавания можно назвать «мягкой» на том основании, что соотношение объемов аналитической и цифровой математик можно изменить и устанавливать соответствующим как уровню обученности студентов, так и квалификации преподавателей, характеру изучаемого материала, качеству материально-технического обеспечения учебного процесса [6, 7].

Эффективность демонстрации примеров рационального сочетания методов аналитических и цифровых исследований в форме комплексных заданий, естественно, зависит от содержания выбранного раздела курса математики. Как показал опыт нашей работы, им может быть курс «Дифференциальные уравнения». Данный курс, как в фундаментальной, так и профессиональной подготовке будущих специалистов, играет значимую роль в плане формирования научного мировоззрения, стиля мышления, исследовательских навыков, навыков математического моделирования реальных процессов и рассматривается, среди прочего, как полигон для развития представлений о единстве и взаимосвязанности всех компонентов окружающей действительности [8].

В процессе конструирования практических заданий необходимо учитывать, что аналитические методы решения дифференциальных уравнений – ценный механизм математического мышления обучаемых, позволяющий, одновременно, осуществлять качественное исследование процессов, смоделированных данным уравнением. В курсе «Дифференциальные уравнения» скрыты большие возможности для полноценной реализации профессионально-педагогической направленности обучения [9], в частности, он позволяет обучающимся осознать методику применения математических методов к исследованию реальных процессов (например, студент знакомится с тем, как формируется решение задачи, выбирается метод исследования полученной математической модели, интерпретируется результат).

Курс «Дифференциальные уравнения», с одной стороны, весьма абстрактен, обладает своей спецификой, терминологией, своими моделями, зачастую довольно тонкими, непонятными для обучающихся. С другой – один из самых выигрышных в деле осознания будущим специалистом сущности математики, ее прикладной направленности. Однако, вузовские курсы дифференциальных уравнений ориентированы, в основном, на решение типовых задач известными методами. Задачи на моделирование реальных процессов или явлений не включаются в содержание, так как в их основе редко встречаются уравнения известного типа и зачастую их невозможно решить аналитическими методами.

В противоположность аналитическим методам компьютерные технологии математики не имеют подобных ограничений и достаточно универсальны в решении проблем моделирования. В то же время сами математические модели помогают понять исследуемый процесс, дают возможность установить качественные и количественные характеристики состояния процесса. Все это достигается применением аналитических методов исследования. Исполнительский (расчетный) этап решения задачи следует предоставить средствам компьютерной математики, вследствие чего студент может уделить больше времени ориентировочно-исследовательскому и оценочному этапам решения.

Для раскрытия полного потенциала курса дифференциальных уравнений необходимо чаще включать на практических занятиях задачи на моделирование, реализуемые средствами компьютерной математики, а также последовательно выделять и изучать новый класс задач, в первую очередь те, которые рационально сочетают аналитические и компьютерные методы исследования, а также задачи, которые могут быть решены только в результате объединения функциональных возможностей человека и компьютера, синтеза творческих процессов человека и реализации машинных программ.

Пересмотру подлежит содержание предлагаемых студентам практических заданий. Традиционно они берутся из задачников, носят, в основном, вычислительный характер и не отличаются громоздкостью решения. Это позволяет решить за время занятия несколько задач, привлечь к решению нескольких студентов. Однако если провести тотальную цифровизацию такого рода заданий, то весьма заметно проявятся все отмеченные выше недостатки. Поэтому, в целях их недопущения необходимо изменить характер заданий, практиковать выполнение комплексных математических заданий, сочетающих как элементы глубокого теоретического анализа решаемых проблем, применяемых математических методов, анализ их оптимальности и эффективности (качественный анализ), так и рациональных алгоритмов цифровых технологий (количественные результаты) [9].

Комплексные задания – это комплекс заданий; их последовательное выполнение определяет алгоритм действий решения всей задачи. При этом рассматриваются не отдельные задачные ситуации, а задачи, сюжеты которых построены на описании сторон одного и того же явления. Необходимо спроектировать комплексную педагогическую проблему: показать студенту, что не все в математике можно решить с помощью цифровизации, одновременно продемонстрировав ее достоинства [6].

Такой подход можно реализовать на содержательном материале, включающем знание как разделов философии математики, предполагающих владение искусством строгих логических рассуждений, так и разделы вычислительной математики, дающие возможность эффективного использования информационных технологий для вычислительных, поисковых операций [7].

При отборе информации, значимой для изучения темы «Дифференциальные уравнения» и вполне применимой в качестве сюжетного материала при составлении математических моделей, целесообразно руководствоваться следующими ориентирами:

– информация, зафиксированная в условиях задачи, должна содержать описание некоторого предмета, явления или процесса, представляющегося вполне понятным для обучающегося, доступным для его восприятия;

– задача должна содержать требование нескольких ответов качественных и количественных, характеризующих исследуемое явление (процесс), то есть проведение комплексного исследования;

– ситуация, описываемая в задаче, должна быть сопоставима по объему с обычным (средним) объемом сюжета математической задачи.

Проектируя содержание задачи, следует придерживаться целенаправленности на формирование способностей выбора обучающимися аналитического и цифрового методов исследования, их рационального сочетания на основе анализа сущности решаемой проблемы. Весьма перспективным (и продуктивным) в плане достижения обозначенной цели является учебная деятельность в условиях интеграции математических и информационных компетенций, использования комплексных заданий и практикумов решения квазипрофессиональных задач.

Результаты исследования

Исследование проблем преподавания курса «Дифференциальные уравнения» в эпоху цифровизации осуществлялось на этапах проектирования содержания обучения, выбора организационной структуры занятий, формирования рекомендаций по рациональному сочетанию математических методов решения (аналитических и численных).

Программы занятий апробировались в МУДО «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района» (Ставропольский край) и на радиотехнической специальности в ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет».

При решении дифференциальных уравнений возможно появление трех ситуаций, различающихся уровнем использования компьютерной техники, когда решение получено:

– в виде элементарных функций, значения которых подсчитать достаточно сложно (например, трансцендентные функции);

– квадратурах, не представимых в виде элементарных функций;

– решение невозможно получить в квадратурах.

Соответственно такой градации, рассмотрено три примера дифференциальных уравнений, когда структура решений служит алгоритмом выбора метода решения (аналитического и численного), а также условия их сочетания.

В процессе проведения исследования придерживались следующих представлений.

Аналитические методы – последовательное проведение математических преобразований исходной модели, приводящих к заданному результату, то есть решение, полученное с помощью математических выкладок, представленных в виде формул. Это функциональный анализ уравнений, позволяющий изучать процессы в общем виде.

Численные методы – методы приближенного решения математических задач, позволяющие свести решение к выполнению конечного числа более простых алгебраических или арифметических действий.

Приведем примеры, построенные с использованием рекомендаций [10 – 14], которые демонстрируют подходы к формированию у обучающихся рациональной стратегии выбора математических методов решения конкретных задач.

Задача 1. Расстояние между соседними станциями метрополитена A и B равно S, км. Движение электропоезда организованно таким образом, что его скорость изменяется пропорционально как пройденному от станции A пути, так и остатку пути до станции B. Скорость электропоезда не может превышать величины v, км/ч.

1. Составить математическую модель процесса движения электропоезда.

2. Исследовать зависимость скорости электропоезда от пройденного пути.

3. Исследовать зависимости пройденного пути, а также скорости электропоезда от времени движения между станциями.

4. Рассмотреть в системе компьютерной математики математическую модель исследуемого процесса с позиции получения требуемых результатов, их иллюстрации и сравнения с результатами аналитических исследований.

Содержательно-конструктивное выполнение задания включает в себя комплекс действий по исследованиям свойств модели, свойств решения, табличного и графического представления решений с использованием средств компьютерной техники.

Решение: Пусть x – расстояние, пройденное электропоездом от станции A в направлении станции B, км: $0 \le x \le S$; t – время движения, $0 < t < t_S$ (t_S – время в пути между станциями). Тогда условие задачи запишется в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = k(S - x)x, \quad x = x(t), \tag{1}$$

где k – коэффициент пропорциональности, определяемый техническими возможностями электровоза и подлежащий нахождению при заданных S и v, $k > 0$.

Полагаем, что дополнительно известно начальное условие

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

то есть начало движения не обязательно осуществляется от точки отсчета расстояния между станциями: например, начало отсчета – середина платформы станции A длиной $2x_0$: электровоз находится на расстоянии x_0 от точки отсчета, на конце платформы по ходу движения.

Проанализируем уравнение (1), пока не прибегая ни к каким его преобразованиям, то есть попытаемся получить необходимую информацию о решении, исходя из свойств самого дифференциального уравнения (осуществим качественный анализ).

Уравнение (1) имеет тривиальные решения $x = 0$ и $x = S$, которые нас не интересуют.

Правая часть уравнения (1) зависит только от функции x, это так называемое автономное уравнение.

Обозначим $k\,(S - x)x = f(x)$.

Очевидно, что $f(0) = f(S) = 0$.

Первая производная $f'(x) = k(-x + Sx) = k(S - 2x)$;
она равна нулю при $x = S/2$, то есть точка $x = S/2$ является подозрительной на точку экстремума функции $f(x)$.

Вторая производная $f''(x) = (f'(x))'_x = -2k < 0$, при всех x, так как $k > 0$, следовательно, точка $x = S/2$ – точка максимума и значение функции в этой точке

$$f(S/2) = k\left(S^2/4\right) \tag{3}$$

– максимальная скорость электропоезда, достигаемая им в середине пути. Кроме того, $f''(x)$ – постоянная величина, поэтому скорость изменения скорости электропоезда одна и та же (электропоезд движется равноускорено на протяжении всего пути, что комфортно ощущается пассажирами и благоприятно для технического функционирования электропоезда – это достоинство исследуемого процесса движения).

Показательно, что $f'(x) > 0$ при $0 < x < S/2$ и $f'(x) < 0$ при $S/2 < x < S$, то есть до середины пути поезд равномерно увеличивает свою скорость движения до максимальной, а затем в таком же темпе уменьшает ее до нулевой.

Можно осуществить и графический метод исследования исходной математической модели (1). Преобразуем ее следующим образом:

$$x' = k(S-x)x = k\left(Sx - x^2\right) = k\left(S^2/4 - (x - S/2)^2\right).$$

Если за ось абсцисс выбрать x, а за ось ординат x', то графиком $x'(x)$ будет парабола с ветвями, направленными вниз, и вершиной в точке (S/2; $kS^2/4$). График исследуемой функции – часть параболы, находящаяся в первом квадранте, пересекает ось $0x$ в точках (0; 0) и (S; 0). Из графика видны свойства функции $x'(x)$: плавное возрастание от 0 до $kS^2/4$ на первой половине пути и такое же плавное убывание от максимального значения до нуля на второй половине пути. В точке $x = S/2$ достигается максимум, который приравнивается к значению максимальной возможной скорости электровоза. Это позволяет найти коэффициент k.

Зная максимально допустимую скорость v на участке пути длиной S, можно из условия (3) найти коэффициент k уравнения (1)

$$k = 4v/S^2. \tag{4}$$

Коэффициент k в уравнении (1), которое можно рассматривать как закон движения электропоезда, определяет темп (скорость) движения. Учитывая тот факт, что движение транспортных средств переводится, в последнее время, на автоматический режим, параметр k можно рассматривать как параметр управления, закладываемый в программу.

Рассматриваем краевую задачу:

$$x' = \frac{dx}{dt} = k(S-x)x; \quad x(0) = x_0; \quad x = x(t). \tag{5}$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными x и t.

Полагая, что $x \neq 0$ и $x \neq S$, разделяем переменные

$$\frac{dx}{(S-x)x} = kdt, \text{ тогда } \int \frac{dx}{(S-x)x} = \int kdt. \tag{6}$$

Формула (6) – решение уравнения (1) в квадратурах. Пользуясь известными методами интегрирования, получим решение, свободное от интегралов:

$$\frac{1}{S}\ln\frac{x}{S-x} = kt + C.$$

Начальное условие $x(0) = x_0$ позволяет определить C: $\frac{1}{S}\ln\left(\frac{x_0}{S-x_0}\right) = C.$

Тогда

$$\frac{1}{S}\ln\left(\frac{x}{S-x}\right)=kt+\frac{1}{S}\ln\left(\frac{x_0}{S-x_0}\right).$$

Введем постоянную величину $\varepsilon=\dfrac{x_0}{S-x_0}$ – доля пройденного пути от оставшегося до момента отсчета времени движения. Полагая, что $x_0 \neq 0$, имеем:

$$\frac{1}{S}\ln\frac{x}{\varepsilon(S-x)}=kt,$$

а

$$x=x(t)=\frac{\varepsilon S}{\varepsilon+\mathrm{e}^{-kSt}} \tag{7}$$

– решение краевой задачи (5).

Граничные условия:

$$x(0)=S\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}=\frac{S\dfrac{x_0}{S-x_0}}{\dfrac{x_0}{S-x_0}+1}=x_0\,;$$

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{S\varepsilon}{\varepsilon+\mathrm{e}^{-kSt}}=S,$$

то есть значение $x = S$ достигается асимптотически, чисто теоретически. В данной ситуации невозможно узнать время t_S прихода электропоезда на следующую станцию, оно бесконечно, хотя на практике – конечно, поэтому будем предполагать, что за время t_S электропоезд проходит расстояние $S – \Delta$, $\Delta > 0$. Например, если S – расстояние от середины платформы станции A до середины платформы станции B, а 2Δ – длина платформы, то $(S – \Delta)$ – путь до начала платформы станции B, то есть $\Delta = x_0$.

Здесь наблюдается факт неполной адекватности математической и физической моделей на концах области исследования.

Из формулы (7)

$$t=\frac{1}{kS}\ln\left(\frac{x}{\varepsilon(S-x)}\right),\quad x\neq 0 \text{ и } x\neq S.$$

При $x = S – x_0$ с учетом (4) получаем, что время движения

$$t_S=\frac{2}{kS}\ln\frac{1}{\varepsilon}=\frac{S}{v}\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{8}$$

Величину $t_0=\dfrac{S}{v}$ можно рассматривать как время, которое затратил бы поезд, двигаясь с максимальной скоростью. Так как ε достаточно мало, то $\sqrt{\ln\dfrac{1}{\varepsilon}}>1$ и представляет собой коэффициент «режима движения», то есть множитель, показывающий во сколько раз реальное время движения t_S больше минимально возможного. Нетрудно показать, что

$$x(t_S) = \frac{\varepsilon S}{\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{S}{1+\varepsilon} = S - x_0.$$

Продолжим исследование $x(t)$, определяемое формулой (7):

$$x'(t) = S\varepsilon \frac{-\mathrm{e}^{-kSt}(-kS)}{\left(\varepsilon + \mathrm{e}^{-kSt}\right)^2} = kS^2\varepsilon \frac{\mathrm{e}^{-kSt}}{\left(\varepsilon + \mathrm{e}^{-kSt}\right)^2}; \qquad (9)$$

$$x'(0) = \frac{kS^2\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2} = k(S - x_0)x_0;$$

$$\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$$

– скорость поезда затухает до нулевой опять же на бесконечности.

Найдем, что

$$x''(t) = -k^2S^3\varepsilon \mathrm{e}^{-kSt}\,\frac{\varepsilon - \mathrm{e}^{-kSt}}{\left(\varepsilon + \mathrm{e}^{-kSt}\right)^3}.$$

Эта производная равна нулю при $\varepsilon - \mathrm{e}^{-kSt} = 0$ или при

$$t = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{kS} = \frac{1}{2}t_S = t_m. \qquad (10)$$

Если $\varepsilon - \mathrm{e}^{-kSt} > 0$ или $t > \dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{kS}$, то $x'' < 0$, то есть $x'(t)$ убывает.

Если $\varepsilon - \mathrm{e}^{-kSt} < 0$ или $t < \dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{kS}$, то $x'' > 0$, то есть $x'(t)$ возрастает.

Следовательно, точка $t = t_m$ – точка максимума функции $x'(t)$; $x'(t_m) = v$ – максимальная скорость, которая достигается в точке середины пути.

Условие (10) $t_S = 2t_m$ справедливо только, если величина пути равна $S - x_0$.

В принципе, аналитические выкладки можно получить и на компьютере, но это будут выкладки-ответы; процесс их получения окажется «за кадром», в заложенной программе, читаемый и понимаемый только программистом.

Пример 1.

Пусть дано: $S = 4$ км, $v = 50$ км/ч, $x_0 = \Delta = 0{,}04$ км, тогда:

$$k = \frac{4v}{S^2} = \frac{200}{16} = 12{,}5;\ \ \varepsilon = \frac{x_0}{S - x_0} = \frac{0{,}04}{3{,}96} \cong 0{,}0101;$$

$$t_m = \frac{1}{kS}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{50}\ln 99 = 0{,}092 \text{ ч} = 5{,}53 \text{ мин.}^*$$

---

*Далее, с целью «лучшей ощутимости», время движения рассматривается в минутах, а при расчетах пути и скорости движения переводится в часы.

Тогда $t_S = 2t_m$ = 11,05 мин; $x(t_m) = x$ (5,53) = 2 км; $x'(t_m) = x'(5{,}53)$ = 50 км/ч.

Таким образом, электропоезд подойдет к перрону станции *B* через 11,05 мин после отправления со станции *A*.

Максимальную скорость v = 50 км/ч поезд разовьет на середине пути через 5,53 мин после начала движения. Аналитические зависимости $x(t)$ и $x'(t)$ имеют вид:

$$x(t) = \frac{4}{1 + 99e^{-50t}}; \qquad (11)$$

$$x'(t) = \frac{19\,800e^{-50t}}{\left(1 + 99e^{-50t}\right)^2}. \qquad (12)$$

Используя компьютерные средства на основе формул (11) и (12), протабулируем значения $x(t)$ и $x'(t)$ от t = 0 до $t = t_S$ с шагом в одну минуту (табл. 1).

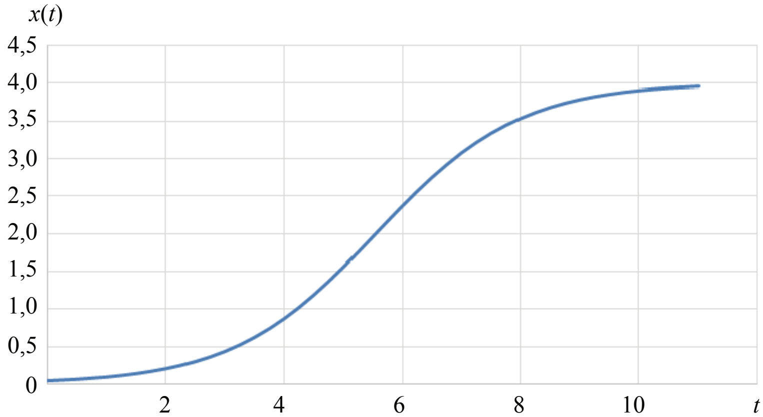
Соответствующие графики $x(t)$ и $x'(t)$ имеют вид (рис. 1).

Рассмотрен пример использования дифференциального уравнения для исследования динамики процесса движения электропоезда. Аналитическое исследование данного уравнения позволило найти параметры процесса (пройденный во времени путь и скорость движения) и указать возможности их оптимизации, в то же время использование компьютера упростило расчеты, повысило уровень наглядности результатов.

Таблица 1

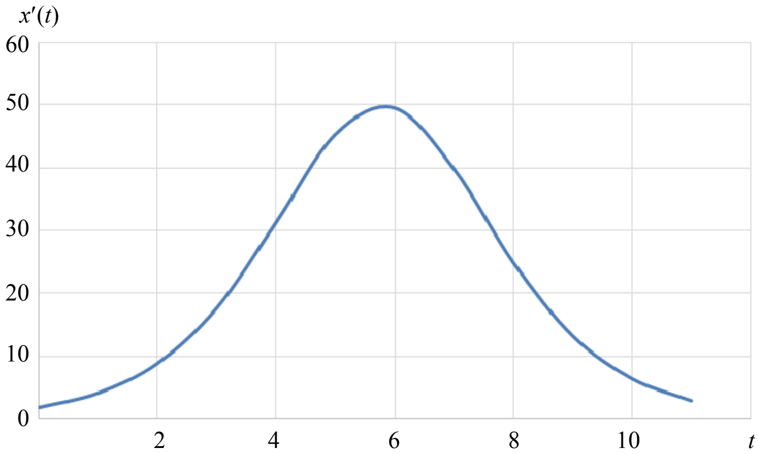
Изменение во времени основных параметров процесса движения

Параметр процесса	Время t, мин											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x(t)$, км	0,04	0,09	0,20	0,44	0,87	1,60	2,40	3,08	3,51	3,80	3,90	3,96
$x'(t)$, км/ч	1,96	4,41	9,50	19,4	34,1	48,0	48,2	35,5	21,43	9,85	4,75	1,98



а)

Рис. 1. Временные зависимости (начало)**:**
а – пути, пройденного электропоездом



б)

Рис. 1. Окончание:
б – скорости от начала отсчета пути до его окончания

С познавательной точки зрения рассмотренный пример продемонстрировал значимость аппарата дифференциальных уравнений как в научных исследованиях, так и развитии аналитических способностей у обучаемых. Данный пример – образец комплексных заданий, предлагающих, с одной стороны, решение нескольких взаимосвязанных задач, а с другой – применение как традиционных аналитических методов, так и методов компьютерной математики, их рационального сочетания.

В плане педагогического эффекта предлагаемой формы проведения занятий можно отметить значительно бо́льший интерес у обучающихся к занятиям математикой, овладению процессами моделирования.

Рассмотрим задачу, которая структурно напоминает *задачу* 1, но ее решение требует иного уровня привлечения аналитических и компьютерных методов.

Задача 2. Электропоезд движется от станции A к станции B, расстояние между которыми S, км, с переменным ускорением, пропорциональным как текущей скорости движения, так и величине разности между временем t_m достижения поездом точки середины пути (преодоления половины пути, равной $S/2$) и текущего времени. Величина t_m, как и максимально возможная скорость электропоезда v_m, известна. Найти функциональную зависимость пройденного поездом пути от времени движения, если дополнительно известно, что время разгона поезда до v_0, км/ч, составляет t_0, ч, (максимально возможная скорость и время разгона прописываются, как правило, в технических характеристиках электровоза).

Решение. Пусть $x(t)$, км, зависимость пройденного поездом за время t, ч, пути, тогда $x'(t)$ – текущая скорость движения, км/ч, $x''(t)$ – ускорение движения (скорость изменения скорости), км/ч^2. Если $t = t_m$ – время преодоления поездом половины пути, тогда условие задачи (математическую модель движения) можно записать в виде

$$x'' = kx'(t_m - t), \ t > 0, \ k > 0, \qquad (13)$$

где k – пока неизвестный коэффициент пропорциональности, определяемый техническими характеристиками электровоза и условиями движения.

Кроме того,

$$x'(t_m) = v_m;\ \ x(t_m) = S/2.$$

Проанализируем уравнение (13) в целях предварительного определения некоторых свойств искомой функции $x(t)$.

Очевидно, что $x'' = 0$ при $t = t_m$, то есть точка t_m является критической для $x'(t)$ (скорости движения), а так как $x'(t)$ – величина положительная (поезд все время движется от A к B), то при $k > 0$: $x'' > 0$ при $t < t_m$ (на первой половине пути) и $x'' < 0$ при $t > t_m$ (на второй половине пути); точка $t = t_m$ – точка максимума для $x'(t)$, то есть $x'(t_m) = v_m$. В результате можно заключить, что свойства функции $x'(t)$ совпадают с отмеченными в *задаче* 1.

Выполним математические преобразования уравнения (13) в целях нахождения функции $x'(t)$, а затем и $x(t)$.

Уравнение (13) – уравнение, разрешенное относительно производной высшего (второго) порядка дифференциального уравнения, не содержит в правой части искомой функции $x(t)$, поэтому его можно свести к уравнению первого порядка заменой переменной $z(t) = x'(t)$, тогда $z'(t) = x''(t)$ и уравнение (13) запишется в новом виде

$$z' = kz(t_m - t). \tag{14}$$

Имеем уравнение с разделяющимися переменными, которое можно записать как

$$\frac{dz}{z} = k(t_m - t)dt.$$

Так как $z > 0$, то после интегрирования:

$$\ln z = \frac{-k(t - t_m)^2}{2} + \ln C; \quad z = Ce^{\frac{-k(t-t_m)^2}{2}},$$

то есть

$$x'(t) = Ce^{\frac{-k(t-t_m)^2}{2}} \tag{15}$$

– общее решение.

Так как $z = x'(t)$ при $t = t_m$ достигает максимального значения v_m, то $z(t_m) = C = v_m$, и окончательно решение краевой задачи примет вид

$$z = x'(t) = v_m e^{\frac{-k(t-t_m)^2}{2}}. \tag{16}$$

В уравнении (15) по-прежнему неизвестным остается параметр k. Для его определения воспользуемся дополнительным условием $x'(t_0) = v_0$, которое может быть прописано в условиях движения электропоезда.

Тогда

$$x'(t_0) = v_0 = v_m e^{\frac{-k(t_0-t_m)^2}{2}},$$

откуда

$$k = \frac{2}{\left(t_0 - t_m\right)^2} \ln \frac{v_m}{v_0}. \tag{17}$$

Так как $v_m > v_0$, то $k > 0$.

Продолжаем процесс нахождения $x(t)$. Уравнение (16) – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Имеем

$$dx = v_m \mathrm{e}^{\frac{-k}{2}(t-t_m)^2} dt,$$

тогда

$$x(t) = v_m \int \mathrm{e}^{\frac{-k}{2}(t-t_m)^2} dt + C_1. \tag{18}$$

Дополнительное условие: $x(t_m) = S/2$ позволяет утверждать, что $C_1 = S/2$.

Получено решение в квадратурах. Данный интеграл невозможно выразить через элементарные функции. Поэтому возникает необходимость привлечения приближенных методов его нахождения.

Пусть первым будет метод трапеций, используемый при нахождении определенных интегралов. В рассматриваемом случае табулируем функцию $x'(t)$ (формула (16)) с некоторым шагом Δt, получая значения $x'(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, и рассматриваем равенство

$$x(t_k) = \int_0^{t_k} x'(t) dt = \sum_{i=0}^{k} \frac{x'(t_i) + x'(t_{i+1})}{2} \Delta t,\ k = 0, 1, \dots, n. \tag{19}$$

Таким образом, получаем таблицу значений $x(t_k)$, а при необходимости, и ее графическое представление. Для повышения точности можно использовать и другие численные методы нахождения определенных интегралов.

Второй метод, доступный для реализации, в данных условиях – использование функции, называемой гауссовским интегралом ошибок:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{-z^2}{2}} dz,$$

таблицы которой имеются в математической литературе.

Преобразуем формулу (18) следующим образом:

$$x(t) = v_m \int_0^t \mathrm{e}^{\frac{-k}{2}(t-t_m)^2} dt = \frac{v_m}{\sqrt{k}} \int_0^{\sqrt{k}(t-t_m)} \mathrm{e}^{\frac{-z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{v_m}{\sqrt{k}} \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{k}(t-t_m)} \mathrm{e}^{\frac{-z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{k}t_m} \mathrm{e}^{\frac{-z^2}{2}} dz \right) = \tag{20}$$

$$= v_m \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \left(\Phi_0 \left(\sqrt{k} t - \sqrt{k} t_m \right) + \Phi_0 \left(\sqrt{k} t_m \right) \right),$$

где $z = \sqrt{k}(t - t_m)$, $dz = \sqrt{k}dt$.

Пример 2. Пусть, как в *примере* 1, v_m = 50 км/ч, кроме того, из табл. 1 определим, что при t_0 = 1 мин, v_0 = 4,41 км/ч, t_m = 5,53 мин, тогда из (17) следует, что $k = \frac{2}{(t_0 - t_m)^2} = 0{,}24$, а из (16)

$$x'(t) = 50\mathrm{e}^{\frac{-0{,}12(t-5{,}53)^2}{2}}. \tag{21}$$

Пусть Δt = 1 мин, тогда t_k = (1, 2, …, 12) мин.

Если t_m = 5,53 – время, затраченное на половину пути, то на весь путь будет затрачено около 12 мин.

Значения e^t находим по таблицам, которые имеются в любом справочнике.

Значения $x'(t_k)$, найденные по формуле (21), представлены в табл. 2 (вторая строка).

Используя формулу (19), найдем значения $x(t_k)$ и разместим их в табл. 2 (третья строка) – x_1.

Для реализации второго метода запишем (20) в конкретном (для примера) виде.

Имеем $\sqrt{k}$ = 0,49, тогда v_m = 50 км/ч = 0,83 км/мин.

$$x(t_k) = \frac{0{,}83}{0{,}49} \cdot 2{,}507\left(\Phi_0(0{,}49t - 2{,}7) + \Phi_0(2{,}7)\right) = 4{,}26\Phi_0(0{,}49t - 2{,}7) + 2{,}115.$$

Используя справочные значения функции $\Phi_0(t)$, найдем $x(t_k)$, t_k = (1, 2, …, 12) мин и разместим их в табл. 2 (нижняя строка) – x_2.

Очевидно, значения $x(t_k)$ в предпоследней строке (первый приближенный метод) и в последней строке (второй приближенный метод) коррелируются.

Таким образом, возникла ситуация, требующая приближенных аналитических методов, которые, в свою очередь целесообразно реализовать с помощью компьютерных технологий – пакетов прикладных программ.

Таблица 2

Значения параметров процесса, описанного в задаче 2

Параметр процесса	Время t, мин											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x', км/ч	4,270	11,5	23,5	38,2	48,4	48,5	38,5	24,3	12,1	4,70	1,47	0,35
x_1, км	0,050	0,18	0,41	0,93	1,66	2,45	3,18	3,70	4,0	4,14	4,19	4,20
x_2, км	0,045	0,18	0,49	1,03	1,79	2,53	3,27	3,80	4,1	4,22	4,26	4,28

Еще убедительным такое утверждение становится при рассмотрении дифференциальных уравнений, не интегрируемых в квадратурах.

Сформулируем еще одну задачу на движение электропоезда.

Задача 3. Пусть движение организовано таким образом, что его ускорение пропорционально пройденному расстоянию, но коэффициент пропорциональности есть некоторая функция времени

$$x'' = f(t)\,x.$$

Такой вид имеет, например, известное в волновой механике дифференциальное уравнение Шредингера [15]

$$x'' + (\lambda + f(t))\,x = 0$$

с краевыми условиями: функция $f(t)$ ограничена при $-\infty < t < +\infty$. Как утверждается, рассматриваемое в работе [16, с. 293] уравнение такого вида

$$x'' = (a^2 x^{2n} - 1)\,x$$

считается в общем случае не решаемым (его решение неизвестно), несмотря на то, что при некоторых параметрах, в него входящих, решение можно найти. Также в [16] указано, что для приближенного его решения можно использовать ВБК-метод (Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна – метод квазиклассического приближения), а также метод возмущений.

Следует обратить внимание на тот факт, что существует много методов численного решения дифференциальных уравнений [17], их общий недостаток – они всегда дают какое-то конкретное значение, что сужает возможности их использования. Тем не менее не следует бояться использовать численные методы на практике. Главное – численному интерпретированию должно предшествовать обращение к теоремам существования и единственности, чтобы избежать недоразумений или, вообще, неправильных решений.

Таким образом, рассмотрены три ситуации, возникающие при интегрировании дифференциальных уравнений: нахождение решения в виде элементарных функций, когда применение аналитических методов решения полностью закрывает проблему решения (компьютерные средства используются только для вычисления значений функции); решение дифференциального уравнения в квадратурах, когда аналитическому исследованию подвергается только математическая модель, а решение (и его свойства) анализируются численно и, наконец, случай отсутствия решения в квадратурах, когда практически полностью процесс интегрирования осуществляется с помощью компьютерных средств. С учетом обозначенных факторов следует обучать студентов навыкам рационального сочетания традиционных аналитических и компьютерных средств решения дифференциальных уравнений, используя при этом методику выдачи комплексных заданий как основу интеграции указанных методов.

Одна из важных педагогических целей внедрения системы комплексных заданий в систему обучения – повышение уровня мотивации к изучению математики (исследовалось на практике). Как и во многих педагогических исследованиях, выделялись контрольная и экспериментальная группы обучаемых и методом опроса определялся процент студентов, относящих математику к категории предпочитаемых (для своей будущей профессии). В контрольной группе практические занятия проводились традиционно с использованием задачников, рекомендованных студентам в образовательных программах. В экспериментальной группе обучающимся выдавались комплексные задания, построенные на основе изложенной в данной работе методики (требующие глубокого аналитического исследования математической модели, ее трансформации к решению и представление последнего в удобной для исследователя форме). Сформированность у студента мотивации изучения математики выяснилась на основе отнесения ими математики к категории предпочитаемых или не предпочитаемых предметов (дихотомическая шкала) до и после эксперимента. На уровне значимости $p < 0{,}05$ состояние мотивации в контрольной и экспериментальной группах оказалось статистически различным. Если в контрольной группе она практически не изменилась (сохранилось на уровне 40 %), то в экспериментальной группе этот показатель вырос до 60 %. Характер влияния предполагаемого подхода на формирование мотивации исследовалось нами с помощью критерия Мак-Немара. Соответственно, можно сделать вывод, что динамика изменения мотивационных установок в ходе экспериментальной работы оказалась положительной. В то же время нельзя не отметить тот факт, что более 80 % студентов, как контрольной, так и экспериментальной групп, считают средства компьютерной математики более предпочтительными по следующему критерию: они более оперативны для практической деятельности, хотя и согласны с мнением о том, что в процессе аналитического исследования возможно обнаружение свойств (решения), не прописанных в компьютерных программах, и это представляет дополнительный интерес.

Выводы

На современном этапе цифровизации процесса обучения должно возрастать внимание, как это не покажется странным, к аналитическим методам исследования, с целью предотвратить потери их значимости на фоне все возрастающих возможностей средств компьютерной математики по упрощению процессов решения математических задач. Обучающимся, под руководством преподавателя, желательно начинать исследование любой математической задачи именно с оценки возможности применять аналитические методы, позволяющие осуществлять качественный анализ проблемы, отвечать на всевозможный комплекс вопросов. Задача преподавателя: на доступных для понимания обучающихся примерах продемонстрировать возможности и достоинства аналитических методов, вычленив учебные проблемы, где использование средств компьютерной математики действительно более эффективно.

Учитывая тот факт, что процесс обучения относится к категории консервативных и сопровождается наличием объективных противоречий в системе «учитель – ученик», информатизацию математического образования в эпоху цифровых технологий следуют осуществлять с учетом возрастающих потенциальных возможностей обучающихся и их интересов к компьютерной технике, стараясь обеспечить гармоничное сочетание рациональных методов цифровых технологий и присущих математике методов глубокого теоретического анализа. Например, в предложенной методике проектирования заданий практической подготовки демонстрируется особый психологический эффект: обучающий сам управляет процессом исследования и получения результатов, более того, может обнаружить свойства объекта изучения, которые не были запрограммированы, свойства, которые не являются предметом исследования, но, тем не менее, представляют определенный интерес. Такой факт имеет место, когда любая, полученная в результате преобразования математической модели формула, подвергается анализу с целью оптимизации процесса по какому-либо параметру.

Доказательство того, что информатизация математического образования в эпоху цифровых технологий должна обеспечивать гармоничное сочетание присущих математике методов глубокого теоретического анализа с рациональными методами цифровых технологий, подтверждает предложенная методика формирования заданий практической подготовки.

Осуществляемые в настоящее время в системе образования переходы: от знаниевого к компетентностному и от традиционных образовательных технологий к цифровым значимы уровнями своей плавности: приобрести новые качества, не растеряв прежние; необходимо построение своеобразных мостиков, выражаясь математическим языком – осуществление «сплайн аппроксимаций» известных методик.

Компетентностный подход в обучении сохраняет свою актуальность и в эпоху цифровизации образования, положительно влияя на устранение сопровождающих ее недостатков и проблем. С другой стороны, технология цифровизации упрощает процессы интеграции формируемых в вузе компетенций специалистов, повышая тем самым качество их подготовки до уровня, соответствующего современным требованиям к выпускнику учебного заведения. С точки зрения сочетания обозначенных в работе подходов определяется значимость проведенного исследования по поиску механизмов разрешения проблем переходного периода.

Подводя итоги исследования, можно сказать, что осуществляемая в настоящее время цифровизация не является какой-то самоцелью, следованиям моде, это действенный аппарат (механизм) формирования прописанных в ГОСах компетенций в целях обеспечения возможности решения современных проблем деятельности специалистов. В то же время осуществление цифровизации – достаточно творческий процесс, предполагающий отсутствие действий, нарушающих цели, принципы и традиции действующей образовательной системы, в частности не способствующей превращении математики в вычислительную математику. Этому способствует политика рационального сочетания традиционных и компьютерно-ориентированных методических подходов в профессиональной подготовке студентов образовательных учреждений. Сформировать навыки такого сочетания возможно, рационально выбрав учебный курс, которым может быть, например, курс «Дифференциальные уравнения»; использование в процессе его преподавания комплексных заданий заметно способствует повышению уровня мотивации студентов к изучению математики, формированию способностей рационального выбора математических методов решения производственных задач.

Список литературы

1. Пучков, Н. П. Интеграция компетенций как механизм разрешения некоторых проблем цифровизации образования / Н. П. Пучков, С. И. Тормасин // Проблемы теории и практики обучения математике : сб. науч. тр., представленных на Междунар. науч. конф. «73 Герценовские чтения» / под ред. В. В. Орлова. – СПб. : Изд-во РГПУ им. Герцена, 2020. – С. 59 – 62.

2. Арнольд, В. И. Математика и математическое образование в современном мире / В. И. Арнольд // Математика в образовании и воспитании / Сост. В. Б. Филиппов. – М. : ФАЗИС, 2000. – 248 с.

3. Шатрова, Ю. С. Возможности и угрозы при организации учебного процесса в цифровом обществе / Ю. С. Шатрова // Математическое образование в цифровом обществе : материалы XXXVIII Междунар. науч. семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, 26 – 28 сентября 2019 г., Самара. – Самара, 2019. – С. 238 – 241.

4. Пучков, Н. П. Интеграция компетенций в условиях цифровизации образования / Н. П. Пучков, А. И. Попов, С. И. Тормасин // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2020. – № 1 (17). – С. 36 – 43. doi: 10.24888/2500-1957-2020-17-1-36-43

5. Пучков, Н. П. Формирование способности интеграции компетенций при подготовке преподавателей математики и информатики в условиях цифровизации образования / Н. П. Пучков, С. И. Тормасин // Актуальные проблемы обучения математике и информатики в вузе : материалы V Междунар. заочной науч. конф., 18 – 22 декабря 2019 г., Москва. – М., 2020. – С. 22 – 33.

6. Пучков, Н. П. Об одной мягкой модели вхождения в процесс цифровизации математического образования / Н. П. Пучков, Т. Ю. Забавникова // Современные технологии в науке и образовании СТНО-2020 : сб. тр. III Междунар. науч.-техн. форума, 04 – 06 марта 2020 г., Рязань. – Рязань, 2020. – С. 66 – 69.

7. Пучков, Н. П. Информационные модели обучения в процессе организации математического образования / Н. П. Пучков, Т. Ю. Забавникова, Т. Ю. Дорохова // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования : материалы Междунар. конф., 25 – 27 сентября 2020 г., Елец. – Елец, 2020. – С. 148 – 150.

8. Пучков, Н. П. Цифровизация в процессе преподавания математических дисциплин студентам-аграриям / Н. П. Пучков, Т. Ю. Забавникова // Формирование организационно-экономических условий эффективного функционирования АПК : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф., 28–29 мая 2020 г., Минск. – Минск, 2020. – С. 360 – 364.

9. Пучков, Н. П. К вопросу рационального использования средств цифровизации при изучении курса «Дифференциальные уравнения» / Н. П. Пучков, Т. Ю. Забавникова, Н. И. Лобанова // Математика – основа компетенций цифровой эры : материалы XXXIX Междунар. науч. семинара преподавателей математики и информатики ун-тов и пед. вузов, 01–02 октября 2020 г., Москва. – М., 2020. – С. 328 – 331.

10. Асланов, Р. М. Роль систем компьютерной математики на практических занятиях по дифференциальным уравнениям / Р. М. Асланов, А. С. Безручко // Наука и школа. – 2012. – № 3. – С. 89 – 93.

11. Асланов, Р. М. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в педвузе : дис. … д-ра пед. наук : 13.00.02 / Асланов Рамиз Муталлим оглы. – М., 1997. – 390 с.

12. Эдвард, Ч. Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple, MATLAB / Ч. Г. Эдвард, Д. Э. Пенни ; пер. с англ. Я. К. Шмидского. – 3-е изд. – М. : Вильямс, 2008. – 1104 с.

13. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М. : Наука, 1987. – 160 с.

14. Лобанова, Н. И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования. – Текст : электронный / Н. И. Лобанова // Мир науки : интернет-журнал. – 2016. – Т. 4, № 6. – URL : http://mir-nauki.com/PDF/32PDMN616.pdf (дата обращения: 03.03.2021).

15. Березин, Ф. А. Уравнение Шредингера / Ф. А. Березин, М. А. Шубин. – М. : МГУ, 1983. – 392 с.

16. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям : пер. с нем. / Э. Камке ; под ред. С. В. Фомина. – 6-е изд., стер. – СПб : Лань, 2003. – 576 с.

17. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер ; пер. с англ. И. А. Кульчицкий, С. С. Филиппова ; под ред. С. С. Филиппова. – М. : Мир, 1990. – 512 с.

References

1. Puchkov N.P., Tormasin S.I., Orlov V.V. [Ed.] *Problemy teorii i praktiki obucheniya matematike* [Problems of the theory and practice of teaching mathematics], A collection of scientific papers presented at the International Scientific Conference “73 Herzen Readings”, St. Petersburg: Izdatel'stvo RGPU im. Gertsena, 2020, pp. 59-62. (In Russ.)

2. Arnol'd V.I., Filippov V.B. [Comp.] *Matematika v obrazovanii i vospitanii* [Mathematics in education and upbringing], Moscow: FAZIS, 2000, 248 p. (In Russ.)

3. Shatrova Yu.S. *Matematicheskoye obrazovaniye v tsifrovom obshchestve* [Mathematical education in a digital society], Proceedings of the XXXVIII International scientific seminar for teachers of mathematics and informatics of universities and pedagogical universities, 26 – 28 September, 2019, Samara, 2019, pp. 238-241. (In Russ.)

4. Puchkov N.P., Popov A.I., Tormasin S.I. [Integration of competences in the conditions of digitalization of education], *Continuum. Matematika. Informatika. Obrazovaniye* [Continuum. Maths. Informatics. Education], 2020, no. 1 (17), pp. 36-43, doi: 10.24888/2500-1957-2020-17-1-36-43 (In Russ., abstract in Eng.)

5. Puchkov N.P., Tormasin S.I. *Aktual'nyye problemy obucheniya matematike i informatiki v vuze* [Actual problems of teaching mathematics and computer science at a university], Proceedings of the V International correspondence scientific conference, 18 - 22 December, 2019, Moscow, 2020, pp. 22-33. (In Russ., abstract in Eng.)

6. Puchkov N.P., Zabavnikova T.Yu. *Sovremennyye tekhnologii v nauke i obrazovanii STNO-2020* [Modern technologies in science and education STNO-2020], Proceedings of the III International scientific -technical forum, 04 - 06 March, 2020, Ryazan, 2020, pp. 66-69. (In Russ.)

7. Puchkov N.P., Zabavnikova T.Yu., Dorokhova T.Yu. *Fundamental'nyye problemy obucheniya matematike, informatike i informatizatsii obrazovaniya* [Fundamental problems of teaching mathematics, informatics and informatization of education], Proceedings of the International conferences, 25 - 27 September, 2020, Yelets, 2020, pp. 148-150. (In Russ., abstract in Eng.)

8. Puchkov N.P., Zabavnikova T.Yu. *Formirovaniye organizatsionno-ekonomicheskikh usloviy effektivnogo funktsionirovaniya APK* [Formation of organizational and economic conditions for the effective functioning of the agro-industrial complex], Proceedings of the XII International Scientific and Technical Conference, 28-29 May, 2020, Minsk, 2020, pp. 360-364. (In Russ.)

9. Puchkov N.P., Zabavnikova T.Yu., Lobanova N.I. *Matematika - osnova kompetentsiy tsifrovoy ery* [Mathematics is the basis of the digital era's competences], Proceedings of the XXXIX International Scientific Seminar for Teachers of Mathematics and Informatics of Universities and Pedagogical Universities, 01-02 October, 2020, Moscow, 2020, pp. 328-331. (In Russ.)

10. Aslanov R.M., Bezruchko A.S. [The role of computer mathematics systems in practical exercises on differential equations], *Nauka i shkola* [Science and school], 2012, no. 3, pp. 89-93. (In Russ., abstract in Eng.)

11. Aslanov R.M. *PhD Dissertation* (*Pedagogy*), Moscow, 1997, 390 p. (In Russ.)
12. Edvard Ch.G., Penni D.E. *Differentsial'nyye uravneniya i krayevyye zadachi. Modelirovaniye i vychisleniye s pomoshch'yu Mathematica, Maple, MATLAB* [Differential equations and boundary value problems. Modeling and computation using Mathematica, Maple, MATLAB], Moscow: Vil'yams, 2008, 1104 p. (In Russ.)
13. Amel'kin V.V. *Differentsial'nyye uravneniya v prilozheniyakh* [Differential equations in applications], Moscow: Nauka, 1987, 160 p. (In Russ.)
14. http://mir-nauki.com/PDF/32PDMN616.pdf (accessed 03 March 2021).
15. Berezin F.A., Shubin M.A. *Uravneniye Shredingera* [Schrödinger's Equation], Moscow: MGU, 1983, 392 p. (In Russ.)
16. Kamke E., Fomin S.V. [Ed.] *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of ordinary differential equations], St. Petersburg: Lan', 2003, 576 p. (In Russ.)
17. Khayrer E., Nersett S., Vanner G., Filippov S.S. [Ed.] *Resheniye obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Nezhestkiye zadachi* [Solution of ordinary differential equations. Non-hard problems], Moscow: Mir, 1990, 512 p. (In Russ.)

Digitalization of Mathematical Education: Teaching the Course "Differential Equations"

N. I. Lobanova, N. P. Puchkov

Center for Extracurricular Activities
in Zelenokumsk Soviet District, Stavropol Territory, Russia;
Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: tasks and problems of digitalization of education; integration of competencies; complex tasks; workshops on differential equations; rational combination of pedagogical technologies.

Abstract: The article analyzes some of the problems generated by the technology of digitalization of mathematical education in educational institutions. The issues of rational use of digitalization means when studying the course "Differential Equations" are considered, as well as the technology of developing complex practical tasks containing elements of both traditional analytical research and means of computer mathematics. The role of computer mathematics systems in practical exercises on differential equations is shown. It is substantiated that the integration of competencies is an effective means of resolving the identified problems of the process of digitalization of education. A specific example of organizing a practical lesson on differential equations is presented, containing an illustration of the methodological tasks of a rational combination of analytical research and digital technologies.
