УДК 372.851
DOI: 10.17277/voprosy.2021.01.pp.147-158

ОСОБЕННОСТИ МОДУЛЯ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В СОСТАВЕ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

А. Д. Нахман

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия

Рецензент д-р техн. наук, доцент С. В. Плотникова

Ключевые слова: внутрипредметные связи; высшая математика; модельный подход.

Аннотация: Рассмотрена проблема обеспечения естественной и логически обоснованной «встроенности» стохастического модуля в общий курс высшей математики. Предложено ее решение как структурными средствами построения математических теорий (первичные понятия, аксиомы, определения, теоремы), так и средствами установления внутрипредметных связей. Продемонстрированы, в частности, связи стандартных распределений с теорией суммирования рядов. Утверждается, что практико-ориентированная направленность стохастических знаний и методов достигается «модельным» подходом, то есть приведением процесса решений задач в соответствие со стандартными этапами математического моделирования. На примере рассмотрения эмпирических степенных моментов предложено ознакомление обучающихся с некоторыми современными идеями математического анализа. В частности, приведен алгоритм восстановления непрерывных теоретических распределений, основанный на теоремах сходимости средних разложений Фурье–Чебышева.

Введение

Реализация компетентностного подхода по ряду направлений / специальностей инженерной подготовки предполагает, в соответствии с ФГОС, формирование у выпускников способности «применять математические и естественнонаучные знания, использовать методы математического анализа и моделирования, методы естественных наук при решении задач профессиональной деятельности»; например, компетенция ОПК-1 в перечне результатов обучения по специальности «08.05.02 – Строительство,

Нахман Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», e- mail: alextmb@mail.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов, Россия.

эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей» [1]. Одним из индикаторов достижения компетенции является умение обрабатывать расчетные и экспериментальные данные вероятностно-статистическими методами. Таким образом, приобретение стохастических знаний и умений является неотъемлемой частью математической подготовки будущих инженеров.

В соответствии с принятой в каждом конкретном вузе основной образовательной программой теория вероятностей и математическая статистика могут изучаться в одном из двух вариантов: отдельным курсом или как один из модулей в составе курса математики. В настоящей статье проанализируем особенности второго варианта, уточним возникающие при этом методические задачи и наметим пути их решения.

Стохастический модуль: основные задачи

При изучении стохастики, в особенности на ее начальном этапе, «на поверхности» оказываются задачи, решаемые в одно или несколько арифметических действий (вычисление классической вероятности, нахождение числовых характеристик эмпирических распределений и др.), что создает у студентов впечатление о скудности и примитивности соответствующего математического аппарата и порождает кажущееся противоречие между вероятностно-статистическими инструментами и глубокими, сложными, строго обоснованными методами «основной» математики. Таким образом, порождается проблема обеспечения естественной и логически обоснованной «встроенности» стохастического модуля в общий курс математики. В значительной мере ее решение может быть достигнуто путем решения следующих задач:

– преодоления устоявшейся в среде студентов иллюзии, что теория вероятностей есть некоторая «побочная ветвь» математики, «несерьезная» математика, имеющая своим предметом моделирование одних лишь игровых ситуаций (монетки, игральные кубики, стрельба по мишени и т.п.);

– сохранения стандартной для математического курса схемы изложения: первичные, неопределяемые понятия; задачи, приводящие к введению нового понятия; определение и простейшие свойства вновь вводимого объекта; теоремы; примеры, в том числе – решение практико-ориентированных заданий;

– реализации внутрипредметных (внутриматематических) связей.

Отметим, что круг взаимоотношений стохастики с другими вопросами науки и практики не исчерпывается внутриматематическими связями. Так, например, в статье [2] отмечается, что именно в этой части курса математики студент получает интуитивные и практические представления о таких философских категориях, как случайное и необходимое, осознает, что в природе, обществе, во многих сферах человеческой деятельности, кроме привычного принципа детерминизма, действует принцип случайности.

Проанализируем каждую из поставленных выше задач.

Иллюзия об обособленности и примитивности вероятностно-статистической теории нередко подпитывается стилем изложения, однообразием и банальностью задачного материала. Зачастую акценты расставлены так, что основное внимание уделяется классической вероятности и заданиям на непосредственное ее вычисление с использованием комбинаторных формул. При всей полезности данного материала следует помнить, что комбинаторика – предмет элементарной и (в некоторой степени) дискретной математики, что это всего лишь один из многих инструментов теории вероятностей. Вместе с этим студенты должны понимать ограниченность (недостатки) понятия классической вероятности: требование равновозможности исходов и конечности их количества. Проще всего указанная ограниченность и имеющаяся альтернатива демонстрируются на ситуациях, приводящих к понятию геометрической вероятности (см., напр., [3, с. 47 – 49]).

Задачи на вычисление вероятности того или иного события – благодатный материал для осознания студентами концепции математического моделирования. При этом простота сюжета задачи не служит препятствием к такому осознанию: студент должен понимать, что сюжет остается за рамками математической модели, а именно – в составе содержательной модели. Математическая же модель использует формализацию сюжета и является автономной математической задачей. Возвращение к сюжету происходит по получению решения задачи – на стадии интерпретации модели. При этом действует принцип множественности содержательных моделей, отвечающих одному (достаточно общему) решению. Примером может служить задача о выборке. А именно, многочисленные сюжеты укладываются в следующую абстрактную схему. Пусть среди N объектов имеется M меченых (например, окрашенных шаров, фальшивых купюр и т.д.; $0 < M < N$). Какова вероятность события A, состоящего в том, что среди извлеченных случайным образом K объектов окажется ровно L меченых ($0 \le L \le M$)? Ответом на вопрос служит результат вычисления

$$P(A) = \frac{C_M^L C_{N-M}^{K-L}}{C_N^K},$$

где каждое выражение вида C_n^k есть число сочетаний из n по k.

Другой пример множественности моделей связан с так называемой схемой альтернатив, введенной в [4]. Речь идет об альтернативе «или и A и B, или не A и C». Каждое событие D, укладывающееся в эту схему, может быть представлено в виде суммы двух несовместных произведений $D = AB + \bar{A}C$. Следовательно, соответствующая вероятность вычисляется в виде

$$P(D) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(C).$$

В схему альтернатив включаются формулы полной вероятности для двух гипотез

$$P(D) = P(A)P_A(D) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(D)$$

и вероятности наступления только одного из двух независимых событий A и B

$$P(D) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B).$$

Таким образом, «модельный» подход демонстрирует прикладную направленность вероятностно-статистических методов и согласуется с алгоритмами решения практико-ориентированных задач в других разделах курса математики.

Стохастический модуль: структурные вопросы

Подход к вероятности как некой абстрактной категории вписывается в общую схему построения математических теорий. Событие и вероятность могут считаться первоначальными понятиями, свойства которых заранее постулируются. А именно, вводится понятие алгебры событий, а такие характеристики, как несовместность и полнота группы событий, могут быть выражены в терминах операций над событиями. Так, события A и B называют несовместными, если $AB = \varnothing$, а группу событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называют полной, если $A_1 + A_2 + ... A_n = E$ (символ $\varnothing$ здесь означает невозможное событие, а символ E – достоверное).

Следует обратить внимание студентов на то обстоятельство, что построение алгебры событий вполне аналогично построению алгебры высказываний и «вписывается» в концепцию булевых алгебр [5, с. 4 – 17; 6].

Вероятность $P = P(A)$ события A рассматривается как численная мера степени объективной возможности наступления события. А именно, за единицу измерения принимается вероятность достоверного события, а нижней (нулевой) границей соответствующей шкалы служит вероятность невозможного события. Такой, достаточно общий, подход является, по сути, теоретико-множественным (кортежным) [7]; с данным подходом студент уже ознакомлен на примерах числовых функций одной и многих переменных, векторной функции скалярного аргумента и др. Задание вероятности есть задание пар $(A; P(A))$, $A \in \Omega$, на декартовом произведении $\Omega \times [0; 1]$, где Ω есть алгебра событий.

Студент, владеющий основными понятиями нечеткой логики, легко обнаружит аналогию между такой ее категорией, как функция принадлежности, и вероятностью события.

Изложенный подход к понятию вероятности близок к аксиоматическому, однако система требований на самом деле здесь оказывается избыточной. Непосредственное рассмотрение системы аксиом может быть предложено студентам с достаточно высоким уровнем математической подготовки. А именно, в этом случае понятие вероятности можно задать путем введения следующих постулатов:

1) $P(A) \geq 0$ (неотрицательность) для всякого $A \in \Omega$;

2) $P(E) = 1$ (нормированность вероятности);

3) $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$ для попарно несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ (аксиома аддитивности);

4) $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ (расширенная аксиома аддитивности для попарно несовместных событий).

В случае аксиоматического определения вероятности свойство

$$P(A)+P(\overline{A})=1, \tag{1}$$

выполненное для всякой пары противоположных событий $A, \overline{A}$, является уже простейшей теоремой; оно вытекает из аксиом нормированности и аддитивности

$$1=P(E)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

В частности, $P(\varnothing) = 1-P(E)=1-1=0$.

Другой простейшей теоремой является утверждение $P(A)\le 1$, справедливое для всякого события A. Оно следует из свойства (1) и аксиомы неотрицательности

$$1=P(A)+P(\overline{A})\ge P(A).$$

Продемонстрированные только что общие подходы к понятию вероятности должны быть затем интерпретированы на конкретных моделях. Речь идет о классической и геометрической вероятностях; студенты должны понимать, что в конкретных случаях постулаты 1) – 4) априори могут быть и невыполненными, а поэтому должны быть *проверены*. Так, формулировка утверждения «классическая вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей» должна уступить место формулировке «для классической вероятности аксиома 3) имеет место».

Следует отметить, что модели понятия вероятности различаются не только способом образования алгебры событий (в классическом случае – всевозможные результаты эксперимента, в геометрическом – всевозможные измеримые подмножества данного множества), но и свойствами вероятности. Например, если в классическом случае достоверное событие, и только оно, имеет вероятность, равную единице, то в геометрическом $P(A)=1$ возможно не только для достоверного, но и некоторых случайных событий A.

Таким образом, аксиоматический подход и обнаружение аналогий с понятиями и операциями математической логики могут рассматриваться как средства решения второй из выше поставленных задач.

Реализация внутрипредметных связей

Обратимся к вопросам реализации внутрипредметных связей. Изучение теории вероятностей и математической статистики опирается на понятия, факты и методы математического анализа: теорию пределов, дифференциальное исчисление, определенные и несобственные интегралы, кратные интегралы, ряды (включая суммирование рядов) и др.

В таблице 1 представлены некоторые из вероятностно-статистических категорий, соответствующий им опорный материал, а также смежные математические понятия и факты, использующиеся при распространениях и обобщениях.

Таблица 1

Вероятностно-статистические категории

Опорный материал	Вероятностно-статистическая категория	Смежные понятия и факты
Комбинаторные формулы	Схема Бернулли. Биномиальное распределение	Бином Ньютона. Полиномиальная схема
Замечательные пределы	Формула Пуассона	Предельные теоремы в схеме Бернулли: асимптотика факториалов, формула Стирлинга, «переход» интегральных сумм в интегралы
Степенные ряды	Специальные дискретные распределения	Суммирование рядов
Определенные интегралы. Несобственные интегралы	Непрерывные распределения. Нормальное распределение	Специальные интегралы. Интеграл Эйлера–Пуассона
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Выборочное уравнение регрессии	Аппроксимативные методы
Степенные моменты	Числовые характеристики теоретических и эмпирических распределений	Метод моментов оценки параметров распределения. Центральная предельная теорема. Восстановление распределений

Остановимся подробнее на вышеуказанных внутрипредметных связях.

1. Одним из способов получения числовых характеристик биномиального распределения является непосредственное суммирование с использованием разложения бинома Ньютона. Так, продемонстрируем, например, получение соответствующей формулы математического ожидания. Если

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

– вероятность Бернулли наступления данного события ровно k раз в n однотипных опытах (p – вероятность наступления события в единичном опыте, $q = 1 - p$, C_n^k – число сочетаний из n по k), то математическое ожидание числа наступления события в n опытах вычисляется в виде

$$a = \sum_{k=1}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!((n-1)-(k-1))!} pp^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{(n-1)-k} =$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np1 = np ;$$

на последнем шаге разложение

$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^{k} q^{(n-1)-k}$ «свернуто» по формуле бинома в $(p+q)^{n-1}$.

2. Доказательства формулы Пуассона

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \quad (\lambda = np = \mathrm{const}),$$

как известно [3, с. 66], опирается на существование второго замечательного предела. При рассмотрении стохастического компонента в общем курсе математики приводят также два других важных факта – локальную и интегральную теоремы Лапласа. Считаем полезным, не приводя полного доказательства, указать используемые при этом идеи. В случае локальной теоремы речь идет об асимптотической формуле Стирлинга для факториалов больших чисел

$$n!\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\,(1+\alpha_n), \text{ где } \alpha_n \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Доказательство же интегральной теоремы основано на идее преобразования суммы

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{\nu=k_1}^{k_2} P_n(\nu)$$

в интегральную сумму, а затем, путем предельного перехода (при $n\to\infty$), в разность значений интегральной функции Лапласа

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt \text{ в точках } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \text{ и } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};$$

здесь $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. При этом значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ (эти значения представлены в таблицах) могут быть приближенно получены с помощью разложений экспоненциальной функции в степенной ряд и (в случае $\Phi(x)$) путем почленного интегрирования ряда. Тем самым устанавливается связь предельных теорем в схеме Бернулли с теорией степенных рядов.

Интегральная функция Лапласа возникает и в других разделах вероятностно-статистической теории, например, в разделе «Нормальное распределение». В частности, используется равенство $\Phi(\infty) = \frac{1}{2}$, которое есть ничто иное, как значение интеграла Эйлера–Пуассона. В свою очередь значение данного интеграла может быть получено средствами перехода к полярным координатам в двойном интеграле. Таким образом, устанавливается связь схемы Бернулли с кратными интегралами.

Стоит отметить возможность применения предельных теорем в обосновании закона больших чисел Бернулли в условиях «сжатой реализации» вероятностно-статистического модуля. А именно, если $w_n(A) = \frac{m_A}{n}$ –

относительная частота события A в n опытах и $p = p(A)$ – его вероятность, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m_A}{n} - p(A)\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (1)$$

В качестве обоснования этого закона приведем следующие соображения. Поскольку выражение под знаком предела может быть записано в виде

$$P(np - n\varepsilon < m_A < np + n\varepsilon),$$

то оно представимо приближенно разностью значений

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

и при $n \to \infty$ получаем предел в левой части (1) равным $2\Phi(\infty) = 1$, что и утверждалось.

3. При рассмотрении дискретных величин с бесконечным количеством значений активно используются понятия и факты, изученные в теме «Числовые и функциональные ряды». Так, например, нахождение числовых характеристик геометрического распределения связано с суммированием степенных рядов. А именно, речь идет о случайной величине X, представляющей собой число испытаний, проведенных до первого появления A в схеме Бернулли; $p = p(A)$, $q = 1 - p$. Ясно, что ряд распределения X имеет вид

X	1	2	3	...	m	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

Математическое ожидание есть сумма ряда

$$M(X) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m p_m = \sum_{m=1}^{\infty} mpq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{dq^m}{dq}.$$

Далее,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{dq^m}{dq} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right),$$

поскольку степенной ряд $\sum_{m=1}^{\infty} q^m$ можно почленно дифференцировать на области сходимости $q \in (0;\ 1)$. Получаем тогда

$$M(X) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{(1-q)+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Подобные связи с теорией рядов возникают при рассмотрении и других специальных распределений, например, распределения Пуассона.

4. Рассмотрение непрерывных распределений напрямую связано:

– с определенными интегралами (вероятность принятия случайной величиной значений в данном интервале);

– несобственными интегралами (свойство нормированности плотности распределения, числовые характеристики);

– с интегралами, обладающими переменным верхним пределом (восстановление функции распределения по плотности распределения).

Наиболее важным из непрерывных распределений является распределение нормальное.

Как отмечалось выше, оно связано со значениями интегральной функции Лапласа и специальным интегралом Эйлера–Пуассона. Так, нахождение числовых характеристик нормального распределения может быть предложено студентам в качестве задания для самостоятельного выполнения, поскольку служит полезным упражнением в технике интегрирования (например, интегрировании по частям).

5. В том случае, когда ищется зависимость $y = \varphi(x; \alpha, \beta, ...)$ (так называемое выборочное уравнение регрессии), «наилучшим образом» описывающая расположение точек (x_j, y_j), $j = 1, 2, ...,$ на диаграмме рассеяния, применяют методику минимизации суммы квадратов уклонений

$$\Phi(\alpha, \beta, ...) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \varphi(x_j; \alpha, \beta, ...))^2$$

посредством надлежащего выбора параметров $\alpha, \beta, ...$. Инструментом такого выбора оказываются необходимые условия экстремума функции $\Phi(\alpha, \beta, ...)$, состоящие в том, что все ее частные производные по переменным $\alpha, \beta, ...$ должны обратиться в ноль: $\Phi'_\alpha = \Phi'_\beta = ... = 0$.

Если числа $\alpha, \beta, ...$ определятся однозначным образом, то они и будут искомыми точечными оценками параметров $a, b, ...$ в уравнении регрессии. Таким образом, актуализируются знания и умения, приобретенные обучающимися в процессе изучения дифференциального исчисления функций нескольких переменных.

6. Степенные моменты (в интегральной форме) знакомы студенту по механическим приложениям интегралов. Как оказывается, данное понятие вновь «всплывает» при рассмотрении числовых характеристик случайных величин. Так, математическое ожидание служит начальным моментом первого порядка, а дисперсия – центральным моментом второго порядка; при этом начальные и центральные моменты непрерывных распределений определяются в виде

$$\nu_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)dx \text{ и } \mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^l f(x)dx,\ l = 1, 2, ...,$$

соответственно. Формула вычисления дисперсии может быть выражена в терминах моментов следующим образом: $\mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2$. Далее, моменты распределений используются в формулировке условия центральной предельной теоремы. Кроме того, следует отметить метод моментов как метод получения точечных оценок параметров эмпирических распределений. Более подробную информацию о выборочных моментах эмпирических распределений студенты могут самостоятельно изучить по источнику [5, с. 169 – 172].

Восстановление непрерывных теоретических распределений

В соответствии с Концепцией развития математического образования в РФ «…образовательные организации высшего образования должны обеспечить передовой уровень фундаментальных и прикладных исследований в области математики и их использование в математическом образовании» [8]. С указанным тезисом согласуется «аппроксимативная методика» восстановления непрерывных теоретических распределений, основанная на теоремах сходимости средних разложений Фурье [9]; для определенности рассматриваем распределения на отрезке [–1; 1]. Изложение методики (в упрощенном виде) может быть сведено к следующим положениям.

1. На основе выборочных данных (свидетельствующих о наличии непрерывного теоретического распределения) строится система начальных эмпирических моментов $\{\nu_1, \nu_2, ...\}$.

2. Конструируются агрегаты вида

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_k = 2^{k-1}\nu_k + \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l \nu_l, \quad k = 1, 2, ...,$$

в которых $\{\beta_l\}$ – последовательность коэффициентов разложения

$$\cos n\tau = 2^{n-1}\cos^n \tau + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \cos^k \tau, \quad n = 1, 2, ...; \ \beta_0 = 1.$$

3. Рассматривается система многочленов Чебышева

$$\left\{ p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \ p_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n \arccos x), \ n = 1, 2, ... \right\}.$$

4. Инициируется процесс

$$f(x)\sqrt{1-x^2} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n c_k p_k(x),$$

в котором λ_k^n – элементы произвольной треугольной матрицы

$$\Lambda = \left\{ \lambda_k^n, \ k = 0, 1, ...; \ n = 0, 1, ...; \ \lambda_0^n = 1; \ \lambda_k^n \to 1 \ (n \to \infty) \right\},$$

удовлетворяющей условию квазивыпуклости; например,

$$\lambda_k^n = 1 - \frac{k}{n+1}, \ k = 0, ..., n; \ \lambda_k^n = 0 \ \text{при} \ k > n$$

(см. [10, с. 594]).

Полученная таким образом функция $f(x)$ аппроксимирует искомую плотность теоретического распределения, «сглаживая» при этом разрывы первого рода (если они имеются).

Наиболее успешным студентам может быть предложен творческий проект, темой которого является разработка соответствующего вычислительного алгоритма.

Заключение

Изложение модуля «Вероятность и статистика» в составе курса математики (в сравнении с «изолированным» курсом стохастики) обладает определенным своеобразием. Прежде всего, здесь должна быть преодолена иллюзия «упрощенности», элементарности положений стохастики. Особое внимание следует уделить практико-ориентированной направленности стохастических знаний и методов, что достигается «модельным» подходом, то есть приведением процесса решений задач в соответствие со стандартными этапами математического моделирования (содержательная модель – формализация – решение математической задачи – интерпретация решения).

Концепция «встроенности» вероятностно-статистического модуля в общий курс математики реализуется как структурными средствами построения математических теорий (первичными понятиями, аксиомами, определениями, теоремами), так и средствами установления внутрипредметных связей; в последнем случае значительное внимание должно быть уделено моментам распределения. Предложенные подходы способствуют интенсификации изложения и подчеркивают общность и универсальность основных математических идей и приемов.

Список литературы

1. Федеральные государственные образовательные стандарты. – Текст : электронный // Национальная ассоциация развития образования и науки. – URL : https://fgos.ru/ (дата обращения: 30.08.2020).

2. Аристова, Е. Ю. Методика преподавания курса «Теория вероятностей и математическая статистика» в техническом вузе / Е. Ю. Аристова // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2015. – № 12-4. – С. 64 – 66.

3. Гутер, Р. С. Основы теории вероятностей / Р. С. Гутер, Б. В. Овчинский. – М. : Просвещение, 1967. – 159 с.

4. Нахман, А. Д. Технологические приемы решения вероятностных задач. – Текст : электронный / А. Д. Нахман // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 3. – 6 с. – URL : http://science-education.ru/ru/article/view?id=9613 (дата обращения: 30.08.2020).

5. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1987. – 240 с.

6. Нахман, А. Д. Задачи на вычисление вероятности события / А. Д. Нахман // Математика в школе. – 2011. – № 1. – С. 34 – 41.

7. Нахман, А. Д. Инновационные подходы к понятию функции в курсе математики / А. Д. Нахман // Вестн. Тульского гос. ун-та. Серия: Современные образовательные технологии в преподавании естественнонаучных дисциплин. – 2019. – № 1 (18). – С. 167 – 170.

8. Концепция развития российского математического образования. – Текст : электронный. – URL : www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения: 30.08.2020).

9. Nakhman, A. D. Semigroups of Bounded Transforms of Weighted Lebesgue Spaces / A. D. Nakhman, B. P. Osilenker // International Journal of Applied and Fundamental Research. – 2016. – № 5. – 8 с. – URL : www.science-sd.com/467-25072 (дата обращения: 30.08.2020).

10. Аткинсон, Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон ; пер. с англ. И. С. Иохвидова, Г. А. Каральник. – М. : Мир, 1968. – 750 с.

References

1. https://fgos.ru/ (accessed 30 August 2020).
2. Aristova Ye.Yu. [Teaching methodology of the course “Probability theory and mathematical statistics” in a technical university], *Aktual'nyye problemy gumanitarnykh i yestestvennykh nauk* [Actual problems of the humanities and natural sciences], 2015, no. 12-4, pp. 64-66. (In Russ.)
3. Guter R.S., Ovchinskiy B.V. *Osnovy teorii veroyatnostey* [Foundations of the theory of probability], Moscow: Prosveshcheniye, 1967, 159 p. (In Russ.)
4. http://science-education.ru/ru/article/view?id=9613 (accessed 30 August 2020).
5. Chistyakov V.P. *Kurs teorii veroyatnostey* [Course of the theory of probabilities], Moscow: Nauka, 1987, 240 p. (In Russ.)
6. Nakhman A.D. [Tasks for calculating the probability of an event], *Matematika v shkole* [Mathematics at school], 2011, no. 1, pp. 34-41. (In Russ., abstract in Eng.)
7. Nakhman A.D. [Innovative approaches to the concept of function in the course of mathematics], *Vestnik Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sovremennyye obrazovatel'nyye tekhnologii v prepodavanii yestestvennonauchnykh distsiplin* [Bulletin of the Tula State University. Series: Modern educational technologies in teaching natural sciences], 2019, no. 1 (18), pp. 167-170. (In Russ., abstract in Eng.)
8. http:www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (accessed 30 August 2020).
9. http:www.science-sd.com/467-25072 (accessed 30 August 2020).
10. Atkinson F. *Diskretnyye i nepreryvnyye granichnyye zadachi* [Discrete and continuous boundary problems], Moscow: Mir, 1968, 750 p. (In Russ.)

Features of the Module «Probability and Statistics» as Part of the Higher Mathematics Course

A. D. Nakhman

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: intra-subject communications; higher mathematics; model approach.

Abstract: The article deals with the problem of providing a natural and logically grounded “embeddedness” of the stochastic module in the general course of higher mathematics. Its solution is proposed both by structural means of constructing mathematical theories (primary concepts, axioms, definitions, theorems), and by means of establishing intra-subject connections. In particular, the connections of standard distributions with the theory of summation of series are demonstrated. It is argued that the practice-oriented orientation of stochastic knowledge and methods is achieved by a “model” approach, that is, by bringing the process of solving problems in accordance with the standard stages of mathematical modeling. Using the example of empirical power-law moments, it is proposed to familiarize students with some modern ideas of mathematical analysis. In particular, an algorithm for reconstructing continuous theoretical distributions based on convergence theorems for mean Fourier–Chebyshev expansions is presented.