УДК 372.851
DOI: 10.17277/voprosy.2020.02.pp.133-145

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

А. Д. Нахман

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Г. М. Куликов

Ключевые слова: алгоритмизация; линия неравенств; методологические аспекты; полиномизация.

Аннотация: Содержательная линия неравенств – одна из системообразующих в совокупности дидактических единиц и задачном материале элементарной и высшей математики. Предложена концептуальная схема изучения данной линии: методология – алгоритмизация – технологические приемы обучения. Сформулирована идея полиномизации функций, позволяющая при использовании метода интервалов распространить правило знаков на достаточно общий случай элементарных функций. Рассмотренные теоретико-математические, методологические, технологические аспекты способа интервалов направлены на усиление мотивации математической деятельности, углубление теоретических знаний, возрастание алгоритмической культуры обучающихся.

Введение

Образовательные стандарты и линия неравенств. Неравенства различного характера – существенная составляющая содержания курса математики в системе «школа – вуз». Федеральные государственные стандарты высшего образования (**ФГОС**) инженерных направлений подготовки в числе формируемых общепрофессиональных компетенций называют способность «применять в профессиональной деятельности методы математического анализа и моделирования». Результаты обучения по дисциплине должны включать знание основ линейной алгебры и дифференциально-интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных, овладение математическими методами для объективного научно-исследовательского анализа, моделирования и решения поставленных физико-математических задач в профессиональной деятельности.

Нахман Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», e-mail:alextmb@mail.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов, Россия.

В свою очередь, перечисленные знания и умения базируются на понятиях, фактах и методах элементарной математики, и, в частности, вопросах исследования областей знакопостоянства функций. Если обратиться к стандартам общего образования, то они предписывают достижение ряда предметных и метапредметных результатов, прямо или косвенно связанных с освоением обучающимися линии неравенств. В частности, среди индикаторов достижения результатов указаны:

– овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств;

– умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

– овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач;

– владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей.

Таким образом, в соответствии с принципом преемственности в обучении, в системе «школа – вуз» должна быть выстроена «сквозная» содержательная линия неравенств, «пронизывающая» все уровни обучения: начальная, основная, старшая и высшая школы. В рамках этой линии формируются два вида основополагающих умений: умения доказывать и решать неравенства [1]. Принимая во внимание необходимость системного подхода в обучении, содержательную линию неравенств можно рассматривать как один из системообразующих факторов в совокупности дидактических единиц и задачном материале элементарной и высшей математики. Укажем наиболее важные объективно существующие здесь связи:

Линия неравенств

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \textit{интервалы знакопостоянства функций;} \\ \textit{верхние и нижние оценки функций;} \\ \textit{интервалы монотонности функций и точки экстремумов;} \\ \textit{характер выпуклости;} \\ \textit{задачи линейного программирования;} \\ \textit{задачи оптимизации;} \\ \textit{задания с модулями (уравнения, графики и др.);} \\ \textit{понятие предела и интервальные оценки в стохастике.} \end{array}\right.$$

Изучение неравенств в курсе математики предлагаем строить в рамках следующей концептуальной схемы:

$$\begin{array}{c} \textit{Методология линии уравнений и неравенств} \\ \Downarrow \\ \textit{Алгоритмизация процессов решения} \\ \Downarrow \\ \textit{Методические (технологические) приемы обучения} \end{array}$$

Цель работы – «вскрыть внутренние механизмы» процессов решения неравенств, разработать на этой основе единый подход к данным процессам и уточнить соответствующие технологические обучающие приемы. В отличие от наиболее распространенной в учебной литературе «привязки» метода интервалов к конкретным классам неравенств предлагаем определенную унификацию. Основной вопрос в связи с таким обобщенным подходом – определение кратности пограничных точек интервалов. Если в полиномиальных и рациональных неравенствах ответ легко вытекает из способа разложения на множители, то в общем случае, как нам представляется, может быть использован так называемый метод полиномизации (см. п.2), к которому и сводятся выявляемые в работе методологические особенности обобщенного способа интервалов.

1. Неравенства: логико-множественный подход

1.1. *Неравенство как предикат*. Всякое неравенство с одной переменной может быть записано в виде

$$f(x) > 0, \tag{1.1}$$

где функция f задана на некоторой области $D = D(f)$. С точки зрения логики предикатов, речь идет об одноместном предикате $F(x)$ вида (1.1), для которого $D = D(f)$ служит предметной областью; поиск множества решения есть поиск множества D_F^+ его истинности.

Процесс решения есть построение равносильного предиката стандартного вида (например, линейного или квадратичного неравенства), либо равносильное преобразование к конъюнкции/дизъюнкции таких предикатов. Доказательство неравенства есть доказательство тождественной истинности данного предиката на его предметной области.

В силу указанных причин считаем, что рассмотрение линии неравенств должно сопровождаться ознакомлением учащихся с простейшими понятиями и операциями логики предикатов, свойствами операций и их соответствующей теоретико-множественной интерпретацией (например, дистрибутивные законы, законы де Моргана). В таблице 1 представлены некоторые примеры, иллюстрирующие предлагаемый логико-множественный поход.

Таблица 1

Логико-множественная интерпретация заданий

Вид задания	Логический аналог	Теоретико-множественная интерпретация
1	2	3
Система неравенств вида $\begin{cases} f_1(x) > 0 \\ f_2(x) > 0 \end{cases}$	$F_1(x) \wedge F_2(x)$	$D_{F_1}^+ \cap D_{F_2}^+$

Окончание табл. 1

1	2	3
Совокупность неравенств вида $\left[\begin{array}{l} f_1(x)>0 \\ f_2(x)>0 \end{array}\right.$	$F_1(x)\vee F_2(x)$	$D^+_{F_1}\bigcup D^+_{F_2}$
Комбинированное задание вида $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f_1(x)>0 \\ f_2(x)>0 \end{array}\right. \\ f_3(x)>0 \end{array}\right.$	$(F_1(x)\vee F_2(x))\wedge F_3(x)$ либо $(F_1(x)\wedge F_3(x))\vee(F_2(x)\wedge F_3(x))$	$(D^+_{F_1}\bigcup D^+_{F_2})\bigcap D^+_{F_3}$ либо $(D^+_{F_1}\bigcap D^+_{F_3})\bigcup(D^+_{F_2}\bigcap D^+_{F_3})$
Комбинированное задание вида $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f_1(x)>0 \\ f_2(x)>0 \end{array}\right. \\ f_3(x)>0 \end{array}\right.$	$(F_1(x)\wedge F_2(x))\vee F_3(x)$ либо $(F_1(x)\vee F_3(x))\wedge(F_2(x)\vee F_3(x))$	$(D^+_{F_1}\bigcap D^+_{F_2})\bigcup D^+_{F_3}$ либо $(D^+_{F_1}\bigcup D^+_{F_3})\bigcap(D^+_{F_2}\bigcup D^+_{F_3})$

1.2. *Носитель неравенства.* Предметную область $D(f)$, на которой задан предикат вида (1.1) будем называть областью задания или носителем соответствующего неравенства (функции f). Здесь следует различать следующие три понятия (которые в литературе часто не разграничивают).

1) *Естественная область* $D_0(f)$ *определения функции* есть множество *всех* значений аргумента *x*, для которых существуют основные элементарные функции и определены производимые над ними операции, содержащиеся в аналитическом выражении $f(x)$.

2) *Область определения* функции $f(x)$ есть множество $D(f)$ всех *рассматриваемых* (в условиях данной задачи) значений аргумента *x*. Обычно $D(f)\subseteq D_0(f)$, однако возможно расширение $D_0(f)$, если каким-либо образом доопределить функцию в точках $x\notin D_0(f)$. Например, функция $f(x)=\ln|x|$, имеющая $D_0(f)=R\setminus\{0\}$, становится определенной на всей числовой оси, если положить $f(0)=0$.

3) Понятие «*область допустимых значений аргумента x*» (стандартная аббревиатура – **ОДЗ**) преимущественно применяется к самому неравенству. А именно, речь идет об области $D_*(f)=D(f)\bigcap G^*$, где множество G^* определяется спецификой задачи (1.1). Иными словами, на дополнении множества $D_*(f)$ задача (1.1) не может иметь решений. Например, ОДЗ неравенства $2^{\ln x+\sqrt{x}}\le 81-x^2$ определяется как областью существования функции $f(x)=81-x^2-2^{\ln x+\sqrt{x}}$, так и очевидным условием положительности его правой части (этим условием и порождается множе-

ство G^*). Следовательно, $D_*(f)$ есть пересечение множеств $D = \{x \in R \,|\, x > 0\}$ и $G^* = \{x \in R \,|\, -9 < x < 9\}$, то есть $G = \{x \in R \,|\, 0 < x < 9\}$.

В дальнейшем понятия ОДЗ и носителя неравенства будем отождествлять.

2. Теоретический базис и методологические приемы исследования интервалов знакопостоянства

2.1. *Метод интервалов: функциональный подход*. Теоретической основой способа интервалов является теорема Больцано–Коши, в силу которой функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[\alpha,\beta]$ и принимающая на его концах значения разных знаков, обращается на (α,β) в ноль хотя бы в одной точке [2, с. 171].Следствием этой теоремы является свойство сохранения знака непрерывной функции: если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и не обращается в ноль ни в одной его точке, то эта функция сохраняет свой знак на (a,b). Действительно, если бы в точках α и β, таких, что $a < \alpha < \beta < b$, функция $f(x)$ приняла значения разных знаков, то, согласно теореме Больцано–Коши, она обратилась бы в ноль по крайней мере в одной точке между α и β, а это противоречит отсутствию нулей функции на (a,b).

Будем (для краткости) называть точки разрыва и нули функции $f(x)$ пограничными точками. В силу свойства сохранения знака функции между пограничными точками, достаточно определить знак в произвольной точке из каждого полученного интервала (метод интервалов). Однако метод часто бывает осложнен «узостью» интервалов и (или) их иррациональными границами. В случае полиноминальных или рациональных неравенств это осложнение легко обойти за счет соответствующей факторизации $f(x)$, то есть разложения на множители и определения тем самым кратности нулей. Нашей ближайшей задачей будет обобщение такой факторизации на случай неравенств других классов.

2.2. *Нули и полюсы*. Приведем следующую классификацию пограничных точек. Точку x_0 будем называть нулем m-го порядка (нулем кратности m, m–целое, $m \geq 0$) функции $f(x)$, если данная функция непрерывна в точке x_0 и некоторой ее окрестности, и при этом существует такая функция $\varphi(x)$, что в указанной окрестности имеет место равенство

$$f(x) = (x - x_0)^m \varphi(x), \text{ где } \varphi(x_0) \neq 0 .$$

Точку x_0 будем называть полюсом n-го порядка функции $f(x)$, если эта точка является нулем n-го порядка функции $\dfrac{1}{f(x)}$; такое определение полюса используем в соответствии с понятийным полем теории функций комплексного переменного (**ТФКП**); см., например, [3, с. 203].

Пусть $f(x)$ имеет вид $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Будем говорить, что точка x_0 является особой точкой функции $f(x)$ порядка (кратности) $m-n$, если x_0 служит одновременно нулем порядка m функции $\varphi(x)$ и нулем n-го порядка $\psi(x)$ (полюсом n-го порядка для $\dfrac{1}{\psi(x)}$). Если $f(x)$ непрерывна в двухсторонней окрестности точки x_0, то, согласно вышеприведенным определениям, в указанной окрестности существует непрерывная $g(x)$, такая, что

$$f(x)=(x-x_0)^{m-n}g(x),\ \text{где}\ g(x_0)\neq 0\,. \qquad (2.1)$$

Возвращаясь к терминологии ТФКП, заметим, что при $m-n\geq 0$ особую точку x_0 функции $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ следует называть устранимой.

Приведение аналитического выражения $f(x)$ к виду (2.1) очевидным образом дает возможность исследовать знаки функции в левосторонней и правосторонней окрестностях точки x_0; перемена или сохранение знака функции («правило знаков») при переходе через точку x_0 определяется теперь, соответственно, нечетностью или четностью значения $m-n$.

Факторизацию (2.1), реализуемую в окрестности каждой пограничной точки полинома или рациональной функции $f(x)$, распространим теперь на другие элементарные функции. Такая возможность позволит перенести действие правила знаков на достаточно общие ситуации.

2.3. *Полиномизация.* В качестве средства для нахождения порядка (кратности) пограничных точек элементарных (как правило, трансцендентных) функций может быть предложена их полиномизация (аппроксимация полиномом).

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано [2, с. 123], для функции $f(x)$, дифференцируемой $n+1$ раз в точке x_0 и некоторой ее окрестности, имеет место следующая аппроксимация:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\,;$$

здесь $o((x-x_0))$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $x-x_0$.

В частности, при $n=1$

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)(1+o(1))\,. \qquad (2.2)$$

Наличие множителя $x-x_0$ (в общем случае – множителя $(x-x_0)^{\nu}$, $\nu=1,2,...$) в представлении разности $f(x)-f(x_0)$ позволит распространить правило знаков на трансцендентные функции. Следовательно, использование метода интервалов «замыкается» на процесс полиномизации. Так, например, имеют место представления, выражающие разности следующих функций через разности их аргументов:

$$t^{\alpha}-z^{\alpha}=(t-z)\alpha z^{\alpha-1}(1+o(1)),\ t-z\to 0,\quad \alpha=\text{const}; \qquad (2.3)$$

$$a^{t}-a^{z}=(t-z)(\ln a+o(1))a^{z},\ t-z\to 0,\ a=\text{const},\ a>0,\ a\neq 1; \qquad (2.4)$$

$$\log_a t-\log_a z=\frac{t-z}{\ln a}\left(\frac{1}{z}+o(1)\right);\ t,z>0,\ t-z\to 0,\ a=\text{const},\ a>0,\ a\neq 1; \quad (2.5)$$

$$\log_t u-\log_z u=\frac{\ln u}{\ln t\ln z}\frac{z-t}{t}(1+o(1)),\ t-z\to 0. \qquad (2.6)$$

Каждое из равенств (2.3) – (2.6) есть следствие (2.2). Обсудим подробнее, например, соотношение (2.6). Оно, очевидно, позволяет утверждать, что пограничные точки разности $\log_t u-\log_z u$ определяются значениями $u=1, t=1, z=1$ и нулями разности оснований $t-z$; соответствующим же образом будет определена и их кратность.

Для обоснования (2.6) заметим, что при $\nu\to 0$ из (2.2) легко вытекает представление

$$\ln(1+\nu)=\nu(1+o(1)). \qquad (2.7)$$

Тогда

$$\log_t u-\log_z u=\ln u\left(\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{\ln z}\right)=\frac{\ln u}{\ln t\ln z}\ln\left(1+\left(\frac{z}{t}-1\right)\right)=\frac{\ln u}{\ln t\ln z}\frac{z-t}{t}(1+o(1))$$

при $t-z\to 0$, а это и требовалось доказать.

Заметим, что повторное применение (2.7) к (2.6) позволяет утверждать знакотождественность разности $\log_t u-\log_z u$ и выражения

$$\frac{u-1}{(t-1)(z-1)}(z-t). \qquad (2.8)$$

2.4. *Пример*. В качестве приложения (2.6) исследуем интервалы знакопостоянства функции

$$f(x)=\log_{\frac{x}{x-1}}\frac{x}{3}-\log_{\frac{x}{2}}\frac{x}{3}.$$

Очевидно, что $f(x)$ определена при $x>1, x\neq 2.$ Найдем нули $f(x)$. Возможны два случая:

1) $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x}{2}$, откуда $x=3$;

2) $\dfrac{x}{3}=1,$ откуда снова $x=3$.

Таким образом, $x=3$ – пограничная точка кратности 2.

Теперь функция $f(x)$ знакопостоянна в каждом из интервалов $(1;\,2), (2;\,3),$ и $(3;\,+\infty)$. Перемена знака $f(x)$ имеет место при переходе через точку $x=2$; при переходе же через точку $x=3$ (ввиду четной ее кратности) знак функции сохранится. Взяв в интервале $(3;+\infty)$ «пробную» точку $x=4$, получаем

$$f(4)=\log_{\frac{4}{3}}\frac{4}{3}-\log_2\frac{4}{3}=-1+\log_2 3>0\,.$$

Следовательно, $f(x)>0$ при $x\in(2;\,3)$ и $x\in(3;+\infty)$; далее, $f(x)<0$ при $x\in(2;\,3)$ и $f(3)=0$.

3. Алгоритмизация процессов решения неравенств

3.1. *Правило знаков*. Алгоритм нахождения интервалов знакопостоянства функций будет основан на излагаемом ниже «обобщенном правиле знаков», вытекающем из результатов полиномизации. Правомерность сведения рассмотрения к полиномам и рациональным функциям вытекает из рассуждений п. 2 (см., например, (2.3) – (2.6)). Правило, по сути уже продемонстрированное на примере п. 2.4, предполагает выполнение следующих шагов:

а) найти пограничные точки интервалов знакопостоянства функции $f(x)$, то есть ее нули и точки разрыва (полюса);

б) определить кратность ν каждой пограничной точки; если точка x_0 – одновременно ноль функции кратности m и ее точка разрыва (полюс) кратности n, то ее «итоговая» кратность есть число $\nu=m-n$;

в) при нечетном значении ν «переход» через точку x_0 сопровождается переменой знака функции $f(x)$, а при четном значении – сохранением ее знака.

3.2. *Метод интервалов: алгоритм*. На основании методологического приема полиномизации может быть выстроен следующий алгоритм решения неравенств в самом общем случае.

1. Нахождение носителя неравенства.
2. Приведение неравенства к одному из видов $f(x)>0,\ f(x)<0,$ $f(x)\geq 0,\ f(x)\leq 0$.
3. Нахождение нулей функции $f(x)$.
4. Нанесение всех пограничных точек на числовую ось и определение кратности каждой из них.
5. Расстановка знаков функции в интервалах, для чего определяется знак в одном из полученных интервалов (знак в «пробной» точке) и используется чередование/сохранение знаков $f(x)$ в соответствии с нечетной/четной кратностью каждой из пограничных точек.
6. Выбор интервалов знакоположительности / знакоотрицательности (в соответствии с условием задачи).

3.3. *Пример*. Решить неравенство

$$\frac{0{,}2^{x^2-5x+4}-3^{x^2-5x+4}}{\sqrt{x^2-4x+4}}>0\,.$$

Запишем неравенство в виде

$$f(x) > 0 \text{, где } f(x) = \frac{0{,}2^{x^2-5x+4} - 3^{x^2-5x+4}}{|x-2|}.$$

Носитель неравенства определяется условием $x \neq 2$. Поскольку знаки $|x-2|$ и $(x-2)^2$ совпадают, то точка $x = 2$ служит полюсом второго порядка. Нули функции $f(x)$ – это решения уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0,$ то есть значения $x = 1,$ $x = 4$, имеющие кратность, равную единице. Определим, например, знак функции в точке $x = 0$ интервала $(-\infty;\ 1)$. Имеем $f(0) < 0.$ Принимая во внимание кратность каждой из пограничных точек, приходим к следующему результату:

Интервалы	$(-\infty;\ 1)$	$(1;\ 2)$	$(2;\ 4)$	$(4;\ +\infty)$
Знаки $f(x)$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$

Окончательно, $x \in (1;\ 2) \cup (2;4)$.

4. Решение неравенств: вопросы технологии

4.1. *Технологичность метода интервалов.* Метод интервалов следует рассматривать в качестве важного компонента в технологии обучения началам алгебры и анализа (линия неравенств). Действительно, ему присущи следующие признаки технологии обучения:

– метод характеризуется определенной последовательностью действий, зависящих от целевого назначения и ориентирован на достижение определенного результата;

– все компоненты метода доступны и в процессе обучения решению неравенств легко воспроизводимы любым педагогом;

– метод характеризуются целостностью и управляемостью;

– метод визуализуем – его применение сопровождается изображением числовой оси, определенным способом фиксации пограничных точек (точки «пустые» и точки «закрашенные»), выделением (штриховкой) интервалов, включаемых в ответ и т.п.

В процессе выстраивания линии уравнений и неравенств в системе «школа – вуз» метод интервалов реализуется в несколько этапов:

1) решение квадратичных и дробно-линейных неравенств (основная школа);

2) решение полиномиальных и рациональных неравенств (основная школа);

3) иррациональные неравенства и неравенства с модулями (основная школа);

4) показательные и логарифмические неравенства (старшие классы средней школы);

5) комбинированные неравенства различных типов (старшие классы средней школы);

6) приложения неравенств в математическом анализе и других разделах высшей математике (высшая школа, уровень бакалавриата).

Метод интервалов является связующим звеном указанных этапов. Основные его черты на каждом следующем этапе обобщаются и распространяются на более широкие классы неравенств.

Метод характеризуется универсальностью – в него «вписываются» казалось бы исключительные случаи неравенств линейных и неравенств квадратичных с комплексными корнями. Так, в последнем случае достаточно определить знак квадратного трехчлена в любой точке числовой оси, и этот знак трехчлен сохранит на всей оси. Например, при решении неравенства $7x^2 - 11x + 8 < 0$ убеждаемся, что дискриминант $D < 0$, так что действительных корней трехчлен не имеет. Следовательно, «на бесконечном интервале» $(-\infty, +\infty)$ отсутствуют пограничные точки, а тогда функция $f(x) = 7x^2 - 11x + 8$ знакопостоянна. Определяем ее знак в «пробной точке»: $f(0) = 8 > 0$. Следовательно, $f(x) > 0$ на $(-\infty, +\infty)$, и данное неравенство не имеет решений.

4.2. *Сравнение с методом рационализации*. В случае трансцендентных неравенств следует также отметить альтернативную идее полиномизации идею рационализации. Ее суть состоит в замене функции $f(x)$ на произведение (частное) двучленов, знаки которого совпадают со знаками $f(x)$ (способ «знакотождественных» множителей). Например, на соответствующей области определения знаки разности логарифмов $\log_{h(x)} f(x) - \log_{g(x)} f(x)$ и произведения $(h(x) - g(x))(f(x) - 1)(h(x) - 1)(g(x) - 1)$ совпадают, что нетрудно проверить. Однако, использование метода рационализации для пользователя осложнено необходимостью запоминания пар знакотождественных функций, либо непосредственным их конструированием (конструированием произведений или частных соответствующих двучленов). Идея полиномизации приводит к тем же знакотождественным произведениям или частным (см., например, (2.8)), но является инструментом обоснований и не требует (в отличие от рационализации) непосредственного использования в процессе решения неравенств. Продемонстрируем эту мысль на следующем примере.

Решить неравенство ([4], № 508180)

$$\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{\log_2(5 - 2x)} \le \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{\log_2(x + 4)}.$$

Выполняем шаги алгоритма п. 3.2.

1) Носитель неравенства определяется соотношениями $-2 \le x < \frac{5}{2},\ x \ne 2$.

2) Записываем неравенство в виде

$$f(x) \le 0 \text{, где } f(x) = \sqrt{6 + x - x^2}(\log_{5-2x} 2 - \log_{x+4} 2).$$

3) Находим нули функции. Имеем: $x=3$ (это значение не входит в область определения первого из логарифмов), $x=2$; далее решаем уравнение $5-2x=x+4$, откуда $x=\frac{1}{3}$.

4) Отмечаем полученные пограничные точки и получаем следующее объединение интервалов

$$[-2,\ \frac{1}{3}]\cup(\frac{1}{3},\ 2)\cup(2,\ \frac{5}{2}).$$

5) Каждая из пограничных точек $x=2$ и $x=\frac{1}{3}$ имеет кратность, равную единице, то есть служит точкой перемены знака функции $f(x)$. В первом из интервалов удобно выбрать точку $x=0$ в качестве пробной. Имеем $f(0)<0$. Следовательно, $f(x)\le 0$ при $x\in[-2;\ \frac{1}{3}]\cup(2;\ \frac{5}{2})$.

6) В ответе, таким образом, получаем множество $[-2;\ \frac{1}{3}]\cup(2;\ \frac{5}{2})$.

Заметим, что предлагаемые в [4] способы решения (в том числе, и метод рационализации) данного неравенства значительно объемнее и сложнее для понимания.

4.3. *Прием замены переменных*. Особенностью обобщенного метода интервалов является возможность замены переменных только лишь на стадии нахождения нулей (решения уравнения), после чего сразу же применяется правило знаков. Предлагаемый прием в сравнении с заменой переменных в самом неравенстве часто значительно сокращает выкладки.

Пример ([4], № 511274). Решить неравенство

$$2\sqrt{x+131}-\frac{5}{\sqrt{x+131}-3}\le 15.$$

Решение. Неравенство определено при $x\ge -131,\ x\ne -122$. Рассмотрим функцию

$$f(x)=2\sqrt{x+131}-\frac{5}{\sqrt{x+131}-3}-15$$

и найдем ее нули. Пусть $t=\sqrt{x+131},\quad t\ge 0$. Имеем:

$$2t-\frac{5}{t-3}-15=0 \text{ или } 2t^2-21t+40=0, \text{ откуда } t=8,\ t=2{,}5.$$

Возвращаясь к прежней переменной, получаем нули функции $f(x)$ из соотношений $\sqrt{x+131}=8$ или $\sqrt{x+131}=2{,}5$, так что $x=-67$ или $x=-124{,}75$. Каждая из полученных пограничных точек имеет кратность, равную единице; расположим их на числовой оси в порядке возрастания:

$-131; -124{,}75; -122; -67$. В интервале $[-131; -124{,}75)$ имеем $f(-131) = -7 < 0$. С учетом чередования знаков функции получаем $f(x) \le 0$ при $x \in [-131; -124{,}75] \cup (-122; -67]$.

Следует отметить значительно больший объем рассуждений и преобразований при «традиционном» способе решения [4].

Заключение

В методологии решения неравенств классическому способу интервалов отводится ключевая роль. В настоящей работе продемонстрирована возможность его обобщения на широкие классы элементарных функций, выявлены универсальность, компактность, технологичность. Прием соответствующей алгоритмизации решений является существенным компонентом методики (технологии) изучения линии неравенств в системе «школа – вуз».

Рассмотренные в работе теоретико-математические, методологические, технологические аспекты способа интервалов направлены на усиление мотивации математической деятельности, углубление теоретических знаний в различных областях математики, возрастание алгоритмической культуры обучающихся.

Список литературы

1. Нахман, А. Д. Технологические аспекты обучения решению неравенств / А. Д. Нахман // Вестн. Тульского гос. ун-та. Серия: Современные образовательные технологии в преподавании естественнонаучных дисциплин.– 2018. – № 1 (17). – С. 211 – 213.

2. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. :Физматлит, 1962. – 607 с.

3. Маркушевич, А. И. Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. – М. :Гостехиздат, 1957. – 335 с.

4. Сдам ГИА: решу ЕГЭ. – Текст : электронный //Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня. – URL : https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 28.02.2020).

References

1. Nakhman A.D. [Technological aspects of learning to solve inequalities], *Vestnik Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sovremennyye obrazovatel'nyye tekhnologii v prepodavanii yestestvennonauchnykh distsiplin* [Bulletin of Tula State University. Series: Modern educational technologies in the teaching of natural sciences], 2018, no. 1 (17), pp. 211-213. (In Russ., abstract in Eng.)

2. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 1* [The course of differential and integral calculus. Volume 1], Moscow: Fizmatlit, 1962, 607 p. (In Russ.)

3. Markushevich A.I. *Kratkiy kurs teori ianaliticheskikh funktsiy* [A short course in the theory of analytic functions], Moscow: Gostekhizdat, 1957, 335 p.(In Russ.)

4. https://ege.sdamgia.ru/ (accessed 28 February 2020).

Methodological Features and Technological Techniques of Solving Inequalities

A. D. Nakhman

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: algorithmization; line of inequalities; methodological aspects; polynomization.

Abstract: The substantive line of inequalities is one of the system-forming in the aggregate of didactic units and the task material of elementary and higher mathematics. A conceptual scheme for studying this line is proposed: methodology - algorithmization - technological teaching methods. The idea of polynomization of functions, which allows using the interval method to extend the sign rule to a fairly general case of elementary functions, is formulated. The considered theoretical, mathematical, methodological, technological aspects of the method of intervals are aimed at enhancing the motivation of mathematical activity, deepening theoretical knowledge, increasing the algorithmic culture of students.