УДК 372.851
DOI: 10.17277/voprosy.2018.04.pp.097-107

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И РЕДУКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А. Д. Нахман

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Г. М. Куликов

Ключевые слова: алгоритмизация; задачный подход; редукция; эффективный алгоритм.

Аннотация: Анализируются положения задачного подхода в области обучения математике. Выделены основные этапы решения математических задач. Предложено ознакомление обучающихся с проблемой алгоритмической разрешимости. В рамках реализации задачного подхода сделан акцент на две следующие ключевые процедуры: алгоритмизацию и редукцию. Уточнены связи указанных процедур с этапами анализа и синтеза. Введено понятие алгоритмической ассоциированности с классами разрешимых задач, поиск способа решения задачи смоделирован в соответствующих терминах. Понятие эффективного алгоритма адаптировано к процедуре алгоритмизации решения. Основные выводы работы проиллюстрированы примерами.

Задачный подход

Методологической основой реализации требований Федеральных государственных образовательных стандартов (**ФГОС**) [1] общего и высшего образования к результатам освоения фундаментальных дисциплин, и, в частности, курса математики, является системно-деятельностный подход [2]. Подход ориентирует обучающихся на самостоятельное осуществление алгоритма действий, направленных на получение знаний и решение поставленных перед ними задач.

Так, одна из компетенций бакалавра (напр., бакалавра в области строительства; компетенция ОПК-1), связанная с его теоретической и фундаментальной подготовкой, предполагает способность «решать задачи профессиональной деятельности … на основе математического аппарата»[1].

Ограничиваясь далее рассмотрением математической подготовки в системе «школа – вуз», приходим к выводу, что *видом деятельности,*

Нахман Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», e-mail: alextmb@mail.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов, Россия.

обеспечивающим успешную реализацию системно-деятельностного подхода в области такой подготовки, является специально организованное и систематически осуществляемое обучение в виде разрешения разнообразных учебных задач – «задачный подход». Если технологию системно-деятельностного подхода рассматривать как систему, то задачный подход является основной ее подсистемой. Сформулируем положения задачного подхода, которые представляются нам наиболее важными с точки зрения принципов системности и деятельности [3]:

– введение новых понятий предваряется постановкой некоторой задачи;

– новое знание формируется в процессе решения задачи;

– результатом решения является «выход» в сферу применений нового знания как в самой предметной области «Математика», так и смежных дисциплинах, а также в практической деятельности;

– решенная задача порождает серию новых задач, что способствует расширению и углублению сформированного знания, формированию способностей к обобщению и систематизации результатов.

Задачный подход является альтернативой традиционному знаниевому подходу, когда необходимый объем знаний передается в готовом виде так, что учащемуся остается лишь осознать и запомнить полученную порцию информации; здесь «единицей обученности» выступает некоторая единица информации. В то же время результат задачного подхода измеряется в таких единицах обученности, как интеллектуальное умение, способность давать ответы на соответствующие вопросы, применять усвоенные способы деятельности в новых условиях.

Выделим следующие этапы решения математических задач.

1) Осознание условия задачи, выделение его существенных моментов (устранение «шумов», избыточных данных и т.п.), формализация (введение обозначений данных и искомых величин), визуализация (запись с помощью схемы, таблицы и т.п.).

2) Анализ задачи: выделение характерных признаков задачи, которые позволяют выбрать соответствующий алгоритм решения, составление плана решения на основе выбранного алгоритма.

3) Редукция – упрощение, сведение задачи к более простой (для которой известен алгоритм решения) или системе таких задач.

4) Синтез: осуществление плана, последовательное решение упрощенных задач.

5) Формирование и фиксация результата (ответа).

6) Интерпретация (какие выводы следуют из наших рассуждений, где и как их можно применить).

7) Рефлексия (анализ собственных действий, догадок и ошибок, самоконтроль, самоутверждение в данном виде математической деятельности).

Алгоритмы и алгоритмическая разрешимость

Целесообразно – в контексте задачного подхода – ознакомление обучающихся (на том или ином уровне полноты и строгости) с вопросами алгоритмической разрешимости.

Понятие «алгоритм», строго говоря, относится к неопределяемым. Алгоритм «в первом приближении» обозначает процедуру, позволяющую путем выполнения последовательности определенных элементарных шагов получать однозначный результат. Простой анализ любого алгоритма (от алгоритма решения математической задачи до алгоритма приготовления, скажем, борща), позволяет вычленить основные его признаки. Прежде всего, это наличие некоторого набора данных (например, входных), которому ставится в соответствие набор выходных данных. Далее, это система предписаний, по которым должно происходить соответствующее преобразование данных. Поэтому можно говорить об алгоритме как о *конструктивно заданном операторе,* преобразующем множество входных данных в множество соответствующих выходных [4, с. 24].

Отличие алгоритма от любой пошаговой инструкции состоит в свойстве его *массовости*: алгоритм должен быть применим для некоторого *класса* K задач, различающихся только исходными данными. В свою очередь задачи $p,\ p \in K$, называются алгоритмически разрешимыми, а сам класс K – алгоритмически разрешимым. Требование массовости реализуется в виде дедуктивного пути решения. А именно, общие положения, разработанные для соответствующего класса, применяются к данной, конкретной задаче. Однако, как хорошо известно из теории алгоритмов, существуют классы алгоритмически неразрешимых задач: для каждого такого K нельзя построить алгоритм, который обеспечивал бы общее решение. Один из соответствующих примеров (его могут привести сами обучающиеся): класс алгебраических уравнений, то есть уравнений вида $P_n(x) = 0,\ n \geq 5$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

Вместе с этим, обучающиеся должны понимать, что алгоритмическая неразрешимость в общей постановке не исключает возможности того, что разрешимы какие-то подклассы $K_j,\ j = 1,2...,$ задач данного класса K. В приведенном примере таким подклассом будет, скажем, множество K_1 уравнений, сводящихся к квадратным путем подходящей замены переменных.

Справедливо и обратное утверждение: возможность решения частной задачи $p,\ p \in K$, еще не дает повода считать класс K алгоритмически разрешимым.

Отметим в качестве примера, что алгоритмически разрешим класс задач дифференцирования элементарных функций, и это студентам представляется вполне естественным. Но уже при первичном ознакомлении с понятием неопределенного интеграла они обычно недоумевают по поводу отсутствия некоторого единого правила (алгоритма) вычисления первообразной всякой элементарной функции и, более того, по поводу существования «неберущихся» интегралов. Ввиду данного обстоятельства обучающиеся приходят к выводу, что разрешимость класса задач K не означает, вообще говоря, разрешимости класса обратных задач.

Редукция задач. Моделирование процедур выбора алгоритма и редукции в терминах нечеткой логики

Процесс решения задачи есть последовательность нескольких видов деятельности, преобразующих в итоге «входы» (данные условия задачи) в «выходы» (ответы на вопросы задачи). Используемые при этом виды деятельности (методики) называются процедурами. В рамках реализации задачного подхода рассмотрим две следующие основные процедуры:

– *алгоритмизацию* – нахождение алгоритма решения данной задачи;

– *редукцию* – упрощение, сведение задачи к той, для которой известен алгоритм решения, или системе таких задач.

Понятие редукции в общем случае обозначает исследовательский прием, обеспечивающий сведение (преобразование) методов рассуждения и доказательства к более простым и прозрачным. Например, задача A редуцируется к задаче B, если из решения задачи B может быть получено решение A.

В математических задачах процедуре редукции предшествует анализ, то есть последовательность рассуждений, обеспечивающих «движение» от искомых фактов к данным задачи. Анализ в данном контексте есть последовательность логических конструкций вида «для того, чтобы найти (доказать) X, достаточно знать (найти, доказать) Y». Анализ успешно осуществлен, если в последнем звене цепочки Y – это компонент условия задачи или известный факт.

В применении к математическим задачам анализ сам по себе решением или доказательством еще не является: он лишь указывает «направление» редукции, то есть помогает свести задачу к цепочке более простых задач. Выполнив анализ, устанавливаем:

а) какому классу K алгоритмически разрешимых задач принадлежит данная задача или те задачи-компоненты, к которым она будет редуцирована;

б) какой именно алгоритм (алгоритмы) к ней (к ним) применим (применимы).

Обычно вслед за анализом наступает этап синтеза. В общем случае синтез – метод познания, соединяющий в целое отдельные элементы, стороны, свойства, которые могли быть получены в результате анализа. Синтетический путь решения задачи – путь рассуждений, идущих от данных задачи к искомым (устанавливаемым) фактам. Речь идет о последовательности логических конструкциях вида «зная (доказав) Y, мы можем определить (доказать) X». В этом смысле синтетические конструкции обратны аналитическим.

Анализ и синтез, таким образом, дополняют друг друга, составляя единый аналитико-синтетический метод решения.

Говоря выше о логических приемах или конструкциях, мы оставались в границах «четкой» логики. Однако непосредственное обнаружение класса K алгоритмически разрешимых задач, которому принадлежит данная задача p, на практике не всегда осуществимо. Данное обстоятельство восходит к общей для нечеткой логики ситуации, называемой недетерминированностью выводов. *Недетерминированность выводов* – характерная черта большинства интеллектуальных информационных систем. Суть ее в том, что путь решения конкретной задачи в пространстве ее состояний заранее определить невозможно. В силу этой причины методом проб и ошибок выбирается некоторая цепочка логических заключений, согласующихся с имеющимися знаниями. В случае если она не приводит к успеху, организуется перебор с возвратом для поиска другой цепочки и т.д.

В ряде задач повышенной или высокой сложности (например, в задачах с параметрами) сначала можно говорить о нечеткой принадлежности задачи классу *K*. Здесь присутствуют рассуждения типа «задача *p* скорее принадлежит классу *K*, нежели классу *L*». В терминах нечеткой логики это означает, что $\mu_K(p) \geq \mu_L(p)$, где μ_K так называемая функция принадлежности, принимающая любые значения в интервале $[0,1]$. Если исследователь (в нашем случае – учащийся) «выставляет» задаче *p* экспертную оценку $\mu_K(p) > \frac{1}{2}$, то имеет смысл прилагать усилия, чтобы редуцировать задачу *p* к некоторой алгоритмически разрешимой задаче из класса *K*. Будем говорить в подобных случаях, что задача *p* алгоритмически ассоциирована с классом *K*.

В результате анализа некоторой задачи *p* получаем, вообще говоря, последовательность $p_1,\ p_2,...,p_n$ задач, к которым может быть редуцирована данная *p*. Возможна ситуация, когда каждая p_j алгоритмически ассоциирована с некоторым классом K_j , $j = 1,...,n$. В этом случае получаем декартово произведение классов $K = K_1 \times ... \times K_n$, и данная задача *p* будет алгоритмически ассоциирована с классом *K*.

Если удается обнаружить алгоритмы для каждого из таких классов K_j, то дальнейшее решение осуществляется посредством синтеза. Таким образом, процесс решения задачи может быть формализован в виде схемы, представленной на рис. 1.

Смоделируем процесс поиска алгоритма решения и редукции на примере следующих трех задач с параметрами.

1) При каких значениях параметра *a* уравнение

$$ax^2 + x - 1 = 0$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

Условие задачи $\rightarrow$ анализ $\rightarrow$ выявление
принадлежности определенному классу задач

$\downarrow$	$\downarrow$
выявление четкой принадлежности	выявление нечеткой принадлежности
$\downarrow$	$\downarrow$
переход к алгоритму	обращение к ассоциированным алгоритмам, выстраивание их комбинации
$\downarrow$	$\downarrow$
синтез: реализация алгоритма, редукция	синтез: последовательная реализация алгоритмов, редукции

$\downarrow$

фиксация результата (ответ, интерпретации решения)

Рис. 1. Схема алгоритмизации и редуцирования решения задачи

2) При каких значениях параметра a парабола

$$y = x^2 + ax + 1$$

имеет единственную общую точку с осью абсцисс? Найти абсциссу этой точки.

3) При каких значениях параметра a прямая $y = ax - 1$ является касательной к параболе $y = x^2 - 3ax + a$? Найти координаты точки касания.

Введем следующие классы алгоритмически разрешимых задач:

– K_1 = {исследование квадратного трехчлена};

– K_2 = {линейная функция};

– K_2 = {касательная к графику функции}.

Обратимся к первой задаче $p = p_1$. Поскольку возможны случаи $a \neq 0$ (дан квадратный трехчлен) и $a = 0$ (линейная функция), то речь может идти об алгоритмической ассоциированности задачи с классами K_1 и K_2 соответственно. Очевидно, что в первом случае $\mu_{K_1}(p_1) = 1$, а во втором $\mu_{K_2}(p) = 1$ («четкая» принадлежность), так что имеем в обоих случаях ситуацию детерминированных выводов.

Случай 1. Анализ: чтобы квадратное уравнение имело единственное решение (точнее, двукратный действительный корень), необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был равен нулю. Следовательно, имеем редукцию к следующей задаче: решить уравнение $D = 0$, где D – дискриминант уравнения. Соответственно, выстраивается следующий алгоритм:

– выписать коэффициенты квадратного уравнения;

– сформировать дискриминант D;

– решить уравнение $D = 0$;

– записать найденное (найденные) значение (значения) параметра a;

– подставить a в данное уравнение;

– решить полученное квадратное уравнение (уравнения);

– выписать в ответе найденные значения параметра a и соответствующие значения x.

Теперь осуществляем синтез решения. Ключевым моментом служит рассмотрение уравнения

$$1 + 4a = 0, \text{ откуда } a = -0{,}25.$$

При найденном a получим

$$-0{,}25x^2 + x - 1 = 0 \text{ и, следовательно, } x = 2.$$

Случай 2: $a = 0$. Сразу же получаем линейное уравнение

$$x - 1 = 0, \text{ откуда } x = 1.$$

Во второй задаче ($p = p_2$) коэффициент перед x^2 отличен от нуля, поэтому высказываем гипотезу о ее принадлежности классу K_1. В то же время речь идет о касании, так что не исключено использование алгоритмов, соответствующих классам K_2 и K_3. В результате анализа экспертная оценка «склоняется» в пользу класса K_1: $\mu_{K_1}(p_2) > \frac{1}{2}$; парабола имеет одну общую точку с осью абсцисс тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ имеет единственное решение.

Таким образом, выстраивается алгоритм, подобный использованному в случае 1, решения задачи p_1. Синтез состоит в нахождении дискриминанта $D = a^2 - 4$ и решении уравнения

$$a^2 - 4 = 0, \text{ откуда } a = \pm 2.$$

При каждом из найденных значений a находим абсциссу общей точки параболы и оси OX:

$$a = 2, \text{ тогда } x = -1, \text{ и } a = -2, \text{ тогда } x = 1.$$

Обратимся к задаче $p = p_3$. Предположительно (судя по условию), p_3 – задача на тему «касательная к графику». В то же время, анализируя задачу, приходим к заключению, что касание прямой (с уравнением вида $y = kx + b$) и параболы означает, в частности, наличие ровно одной их общей точки, так что система соответствующих уравнений имеет ровно одно решение. Поэтому «первичная экспертная оценка» может выглядеть следующим образом

$$\mu_{K_1}(p_3) = \mu_{K_3}(p_3) = \frac{1}{2}.$$

Обратимся теперь к алгоритмам, соответствующим классам K_3 и K_1. В первом случае предстоит реализовать следующее условие касания:

$$\begin{cases} a = (x^2 - 3ax + a)' \\ ax - 1 = x^2 - 3ax + a \end{cases};$$

во втором – потребовать, чтобы уравнение

$$ax - 1 = x^2 - 3ax + a$$

имело единственное решение. Второй случай представляется более «экономным», так что происходит переоценка: $\mu_{K_1}(p_3) > \frac{1}{2}$.

На этапе синтеза решения, соответствующего алгоритмам класса K_1, приходим к условию $D = 0$, где D – дискриминант уравнения $x^2 - 4ax + a + 1 = 0$. Имеем

$$D = (2a)^2 - (a+1), \text{ то есть } 4a^2 - a - 1 = 0, \text{ откуда } a = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}.$$

Решение задачи p_3 дает повод для обсуждения эффективных и неэффективных алгоритмов.

Эффективные алгоритмы

Алгоритм (способ) решения задачи назовем *эффективным*, если:

– он позволит получить решение задачи за *наименьшее* (в сравнении с другими способами) *число шагов* (операций)

или (и)

– посредством данного алгоритма (этим способом) достигается в наиболее *простой форме* результат, дающий ответ непосредственно на вопрос задачи.

Введенное понятие согласуется с понятием трудоемкости (меры сложности) алгоритма, которым обозначается число простейших операций, выполняемых алгоритмом при решении задачи [5, с. 107]. В зависимости от влияния исходных данных на трудоемкость алгоритма используется следующая классификация:

1) количественно-зависимые по трудоемкости алгоритмы – алгоритмы, трудоемкость которых зависит только от размерности конкретного входа (в нашем случае – количества данных в условии) и не зависит от конкретных значений, принимаемых входными параметрами;

2) параметрически-зависимые по трудоемкости алгоритмы – трудоемкость которых определяется не размерностью входа (как правило, для этой группы размерность входа обычно фиксирована), а конкретными значениями входных параметров.

Примером количественно-зависимого по трудоемкости алгоритма служит алгоритм умножения матриц фиксированных размерностей.

Примером алгоритмов с параметрически-зависимой трудоемкостью являются алгоритмы вычисления значений функций с заданной точностью путем разложения в степенные ряды: число выполняемых операций зависит от заданной точности.

Заметим, что в большинстве практических случаев трудоемкость зависит как от количества данных на входе, так и от значений входных данных (количественно-параметрические по трудоемкости алгоритмы).

При выборе одного из нескольких возможных алгоритмов следует обращаться к тому, который имеет наименьшую трудоемкость, что при получении результата в наиболее простой форме и обеспечивает эффективное решение. Довольно часто алгоритм решения задач широкого класса приводит к неэффективному решению, тогда как частный алгоритм (алгоритм, «обслуживающий» более узкий класс задач) или специальный прием обеспечивает эффективное решение.

Проиллюстрируем введенное понятие на следующем примере. Найти общее решения уравнения $y'' + y = 0$.

Данное уравнение относится к двум следующим классам алгоритмически разрешимых задач: K_1 – класс дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка и K_2 – класс линейных однородных уравнений (**ЛОУ**) второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если следовать алгоритму решений для K_1, то необходимо выполнить такие шаги:

1) ввести замену переменных $y' = p(y)$, тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$;

2) записать полученное уравнение первого порядка относительно функции $p(y)$ и определить, какому классу алгоритмически разрешимых уравнений первого порядка оно принадлежит (легко понять, что получается уравнение с разделяющимися переменными).

3) разделить переменные;

4) выполнить интегрирование;

5) выразить из полученного соотношения $p = p(y, C_1)$ и подставить $p = y'$;

6) повторить шаги 2), 3) в отношении полученного уравнения относительно функции $y(x)$;

7) записать общее решение $y = y(x; C_1, C_2)$.

Если использовать алгоритм решений для K_2, то следует выполнить такие шаги:

1) зафиксировать структуру общего решения ЛОУ

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – фундаментальная система решений (**ФСР**);

2) записать характеристическое уравнения для данного ЛОУ

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

и найти его корни $\lambda = \pm i$;

3) в соответствии с найденными комплексно-сопряженными корнями записать ФСР $y_1(x) = \cos x;\ y_2(x) = \sin x$;

4) получить общее решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Видим, что алгоритм, соответствующий классу K_2, является эффективным: четыре шага по сравнению с семью шагами алгоритма для K_1; кроме того, здесь отсутствует операция интегрирования, дважды присутствующая в случае K_1.

Таким образом, на этапе анализа задачи, в том случае, когда возможно выполнение нескольких алгоритмов, следует обращаться именно к эффективному.

Пример другого характера – алгоритм вычисления площади треугольника по формуле Герона. Так, треугольник со сторонами $a = 1,\ b = \sqrt{3},\ c = \sqrt{4 - \sqrt{3}}$ имеет полупериметр, равный

$$p = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{2}$$

и, если следовать соответствующему алгоритму (формуле), то его площадь

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

будет равной

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(1+\sqrt{3}+\sqrt{4-\sqrt{3}})(\sqrt{3}-1+\sqrt{4-\sqrt{3}})(1-\sqrt{3}+\sqrt{4-\sqrt{3}})(1+\sqrt{3}-\sqrt{4-\sqrt{3}})},$$

то есть получаем ответ в «непрозрачном» (неупрощенном) виде.

В то же время на основании теоремы косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi, \text{ где } \varphi - \text{угол между } a \text{ и } b.$$

Поэтому

$$4-\sqrt{3}=1+3-2\sqrt{3}\cos\varphi, \text{ так что } \cos\varphi=\frac{1}{2}, \text{ откуда } \varphi=60^{\circ}.$$

Теперь

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\varphi, \quad \text{то есть } S=\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin 60^{\circ} \quad \text{или } S=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Таким образом, предложенный способ (в отличие от универсального алгоритма Герона) является эффективным.

Выводы

1. Основным видом деятельности, обеспечивающим успешную реализацию системно-деятельностного подхода в области математической подготовки, является специально организованное и систематически осуществляемое обучение в виде разрешения разнообразных учебных задач – «задачный подход», в составе которого рассматриваются две следующие основные процедуры: алгоритмизация и редукция.

2. Обучающихся следует ознакомить с примерами некоторых классов алгоритмически неразрешимых задач; в случае задачи такого класса *К* следует, вообще говоря, искать решение в его подклассах K_j, $j=1,2...$

3. При анализе задачи может возникнуть ситуация нечеткой (предположительной) принадлежности задачи некоторому классу *К* – алгоритмическая ассоциированность с классом *К*; в случае ассоциированности с несколькими классами осуществляют выбор класса с наибольшим значением функции принадлежности.

4. При выборе одного из нескольких возможных алгоритмов следует обращаться к тому, который имеет наименьшую трудоемкость, что при получении результата в наиболее простой форме обеспечивает эффективное решение.

5. В процессе синтеза осуществляется редукция задачи, что приводит к решению (последовательному решению) задачи (задач) на основе известного алгоритма (известных алгоритмов). В работе приведены модели поиска алгоритма решения и редукции в ряде конкретных задач.

Список литературы

1. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс] / Министерство образования и науки Российской Федерации. – Режим доступа : минобрнауки.рф/документы/336 (дата обращения: 30.07.2018).

2. Асмолов, А. Г. Системно-деятельностный подход к разработке стандартов нового поколения / А. Г. Асмолов // Педагогика. – 2009. – № 4. – С. 18 – 22.

3. Нахман, А. Д. Задачный подход как технологическая основа процесса обучения математике / А. Д. Нахман // Международный журнал экспериментального образования. – 2018. – № 2. – С. 34 – 39. Режим доступа : http://expeducation.ru/ru/article/view?id=11793 (дата обращения: 30.07.2018).

4. Успенский, В. А. Машина Поста /В. А. Успенский. – М. : Наука, 1999. – 96 с.

5. Вирт, Н. Алгоритмы и структуры данных : пер. с англ. / Н. Вирт. – 2-е изд., испр. – СПб. : Невский диалект, 2001. – 352 с.

References

1. http:Минобрнауки.рф/документы/336 (accessed 30 July 2018).

2. Asmolov A.G. *Sistemno-deyatel'nostnyj podhod k razrabotke standartov novogo pokoleniya* [System-activity approach to the development of new generation standards], *Pedagogika* [Pedagogy], 2009, no. 4, pp. 18-22. (In Russ.)

3. http://expeducation.ru/ru/article/view?id=11793 (accessed 30 July 2018).

4. Uspenskij V.A. *Mashina Posta* [Post Machine], Moscow: Nauka, 1999, 96 p. (In Russ.)

5. Virt N. *Algoritmy i struktury dannyh* [Algorithms and data structures], St. Petersburg: Nevskij dialekt, 2001, 352 p. (In Russ.)

Algorithmic Solvability and Reductions of Mathematical Problems

A. D. Nakhman

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: tasks approach; algorithmization; reduction; effective algorithm.

Abstract: The positions of the problem approach in the field of teaching mathematics are analyzed. The main stages of solving mathematical problems are identified. The familiarization of students with the problem of algorithmic solvability is suggested. Within the framework of the implementation of the problem approach, the emphasis is placed on the following two key procedures: algorithmization and reduction. The links of the indicated procedures are clarified with the stages of analysis and synthesis. The notion of algorithmic association with classes of solvable problems is introduced and the search for a method for solving the problem is modeled in appropriate terms. The concept of an effective algorithm is adapted to the procedure for the solution algorithmization. The main conclusions of the research are illustrated by the examples.
