УДК 372.851
DOI: 10.17277/voprosy.2018.01.pp.156-164

ФОРМИРОВАНИЕ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ УМЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ю. В. Родионов, А. Д. Нахман

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Г. М. Куликов

Ключевые слова: детерминированные и стохастические модели; метапредметные результаты; прогностические умения.

Аннотация: Обоснована роль построения, анализа, интерпретации детерминированных и стохастических моделей в становлении ряда метапредметных результатов обучения. Установлена связь процесса моделирования с развитием способностей к исследованиям на основе аналогии, индукции, дедукции. Предложена схема формирования прогностических умений в условиях стохастического моделирования. Разработана соответствующая система задач.

1. Постановка задачи

В условиях перехода на образовательные стандарты ФГОС 3+ [1] и реализации Концепции развития российского математического образования [2] актуализируется задача формирования у студентов инженерных направлений подготовки (на ступенях бакалавриата и магистратуры) средствами предметной области «Математика» ряда общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций. В частности, речь идет о способностях:

– к абстрактному мышлению, анализу, синтезу;

– выявлению естественнонаучной сущности проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и привлечения их для решения соответствующего физико-математического аппарата;

– применению методов математического анализа и математического (компьютерного) моделирования;

– использованию системного подхода и математических методов в формализации решения прикладных задач.

Родионов Юрий Викторович – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Техническая механика и детали машин»; Нахман Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», e-mail: alextmb@mail.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов, Россия.

Однако проблема определения теоретических и методических основ формирования системы данных компетенций остается недостаточно исследованной. В соответствии с принципом преемственности математической подготовки, базой для формирования компетенций служит совокупность результатов освоения обучающимися программ среднего общего образования. Одним из аспектов данной проблемы является вопрос: *какие метапредметные результаты могут быть достигнуты средствами математики, и в частности, средствами содержательной линии математических моделей*?

Рассмотрим данный вопрос и найдем (в определенной степени) ответ на него.

Для дальнейшего изложения потребуется следующая классификация (по ФГОС) результатов обучения:

1) *предметные результаты* – результаты, которые формируются средствами данной предметной области и предполагают овладение соответствующими знаниями, умениями, способами деятельности;

2) *общепредметные результаты* относятся к определенному кругу учебных предметов (например, умение формализовать данную зависимость и исследовать ее средствами математики является общим для физики, химии, экономики, и др.);

3) *метапредметные результаты* – результаты деятельности в рамках учебных предметов, которые могут быть применены как в самом обучении, так и на практике, то есть перенесены в различные виды внеучебной (жизненной) деятельности.

По нашему мнению, границы вышеуказанных классов являются нечеткими; так, например, умение решать задачи на вычисление процентов формируется средствами математики, затем распространяется на группу предметных областей (понятие КПД в физике, концентрации – в химии, и др.), и, далее, «восходит» к метапредметным умениям.

2. Модели, моделирование, содержательная линия моделей

2.1. ***Понятие модели и моделирования.*** Рассмотрим *математическую модель как математический объект, представляющий собой образ реального объекта или процесса и сохраняющий существенные черты прототипа.* При этом задача исследования оригинала трансформируется в математическую задачу, решение которой позволяет получить информацию об основных свойствах этого оригинала. *Математическое моделирование*, таким образом, представляет собой следующий трехступенчатый процесс [3, с. 7–8]:

1) разработка содержательной модели (модели в терминах исходной предметной области) и ее формализация (постановка математической задачи);

2) анализ модели средствами математики и получение решения математической задачи;

3) интерпретация модели (формулировка выводов в терминах исходной предметной области).

2.2. ***Линия математических моделей*** *есть содержательная линия, интегрирующая понятия, факты и методы, связанные с построением, анализом и интерпретацией математических моделей реальных процессов и явлений* [4].

Линия математических моделей способствует формированию следующих умений:

– анализировать информацию, представленную в таблицах, схемах, графиках, и, наоборот, систематизировать данные в форме таблиц, визуализировать их в форме диаграмм и графиков;

– решать «традиционные» текстовые задачи;

– решать задачи на взаимное расположение объектов на плоскости и в пространстве, вычислять площади и объемы («геометрическое моделирование»);

– решать комбинаторные задачи;

– «численно прогнозировать» события в форме вероятностей их наступления; анализировать эмпирические распределения случайных величин и получать оценки параметров теоретического распределения («стохастическое моделирование»);

– применять средства математического анализа к исследованию процессов, нахождению наибольших и наименьших значений величин, вычислению физических величин (например, массы, работы переменной силы), и др.

2.3. ***Детерминированные и стохастические модели.*** Математические модели можно условно разделить на детерминированные и стохастические.

Детерминированная модель характеризуется отсутствием случайных величин среди ее параметров. Такие модели (*например, законы физики*) *описывают поведение объекта с позиций полной определенности* (*в настоящем и будущем*).

Стохастическая (*недетерминированная, вероятностная*) *модель есть математическая модель, для которой параметры, условия функционирования и характеристики состояния моделируемого объекта представлены случайными величинами и связаны случайными зависимостями.*

Простейшими задачами стохастического моделирования являются традиционные задачи теории вероятностей и математической статистики, поскольку предполагают анализ (средствами математики) событий, носящих случайный характер, и массивов числовых данных, полученных в экспериментах со случайными результатами.

3. Метапредметные умения

3.1. ***Метапредметные умения по ФГОС.*** Проанализировав перечень требований ФГОС общего (основного и полного) среднего образования [1], приходим к выводу, что данная линия может внести значительный вклад в формирование следующих метапредметных умений (табл. 1).

Таблица 1

Роль линии моделей в формировании метапредметных умений

Метапредметные умения	Роль линии математических моделей в формировании умений
1. Способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания	Умение определить цель моделирования, формулировать задачи моделирования. Развитие мотивации математической деятельности средствами решения практико-ориентированных и прикладных задач
2. Умение самостоятельно планировать пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения задач, соотносить свои действия с планируемыми результатами, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией. Владение навыками учебно-исследовательской деятельности	Умение спланировать ход решения задачи моделирования, выбрать соответствующий математический аппарат. Умение применить адекватные поставленной задаче математические методы, учесть ограничения модели, использовать имеющиеся знания в новой ситуации
3. Умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, возможности ее решения	Умение оценивать адекватность модели, то есть возможности достижения достаточной полноты и точности результатов. Умение оценивать оснащенность модели, то есть обеспеченность математического аппарата необходимыми данными (напр., наличие области значений параметра, при которых отыскиваются наибольшие/наименьшие значения величин)
4. Владение основами контроля, самоконтроля, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности	Проверка результатов решения математической задачи, соответствия сделанных выводов реальной сущности задачи (физической, экономической и пр.)
5. Умение создавать обобщения, устанавливать аналогии, причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное) и делать выводы	Выявление свойств универсальности и продуктивности разрабатываемых моделей: – универсальность модели есть возможность применения одной и той же модели к объектам (процессам) различной природы; – продуктивность модели есть возможность получения новых знаний об исследуемом объекте (процессе), выходящих за рамки решаемой задачи (распространение результатов, их обобщение)
6. Умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач	Владение математическим языком. Умение реализовать полный алгоритм математического моделирования

Рассмотрим требование к формированию умений, обозначенных в строке 5 табл. 1. В курсе математики обучающиеся постоянно используют индуктивные и дедуктивные умозаключения (построение общего вывода на основе частных посылок и вывод из общих посылок заключений частного характера соответственно) и выполняют действия по аналогии (перенос свойств и отношений на объект или процесс на основе сходств в признаках с другим объектом или процессом).

Линия математических моделей в значительной степени способствует развитию умений делать выводы индуктивного, дедуктивного характера, обнаруживать и использовать аналогии.

Детерминированные модели строятся на основе строгой аналогии: если A – степень достоверности выводов, а $P = P(A)$ – соответствующая вероятность, то аналогия является строгой тогда и только тогда, когда есть уверенность в достоверности выводов, то есть $P(A) = 1.$ Случай стохастических моделей характеризуется нестрогой аналогией, то есть условием $0 < P(A) < 1.$ Мнимая аналогия ($P(A) = 0$) порождает неадекватные модели.

Примером простейшей детерминированной модели может служить закон прямопропорциональной зависимости. Здесь строгая аналогия в математических моделях равномерного движения $S = \mathrm{v}t$ и работы, выполняемой с постоянной производительностью $A = \nu t$, позволяет обучающимся сделать (на основании модели) достоверные выводы об общих свойствах объектов: например, скорость движения $\mathrm{v} = \mathrm{v}(t)$ и производительность $\nu = \nu(t)$ на графике изображаются гиперболой.

Примером стохастической модели теоретического распределения случайной величины (прототипа) может служить эмпирическое распределение количественного признака генеральной совокупности, построенного по извлеченной выборке. При получении формулы для вычисления выборочной средней $\overline{x}_{\text{в}}$ обучающиеся обнаруживают аналогию с формулой вычисления математического ожидания $M(X)$ соответствующего дискретного распределения $X.$ Возникает, следовательно, гипотеза о примерном равенстве $\overline{x}_{\text{в}} \approx M(X).$ Обучающиеся способны классифицировать данную гипотезу как нестрогую аналогию; при этом им доступна формулировка закона больших чисел Чебышева, идея которого в упрощенном виде является следующей: вероятность произвольно малого отклонения $|\overline{x}_{\text{в}} - M(X)| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0,$ может быть сделана сколь угодно близкой к единице, если объем выборки достаточно велик.

Отметим особенность математического моделирования в части построения *универсальных моделей*:

– сначала обнаруживается аналогия между свойствами нескольких объектов или процессов;

– затем выделенные (общие) свойства формализуются в виде некоторого математического объекта (аналитически заданной функции, поведение которой предстоит изучить, уравнения и др.); таким образом, математический объект строится на основе индуктивного умозаключения;

– далее, на основании умозаключений по дедукции, результаты исследования математической модели могут быть распространены на новые объекты или процессы, в том или ином смысле аналогичные уже исследованным прототипам.

Так, например, гармоника

$$y = A\sin(\omega x + \gamma) \qquad (1)$$

служит универсальной детерминированной моделью простейших колебательных процессов. Свойства, выявленные при исследовании функции (1) могут быть распространены (в форме дедуктивных умозаключений) на случаи механических и электромагнитных колебаний и другие аналогичные прототипы.

4. Прогностические умения и умения оптимизировать деятельность

Очевидно, что перечень метапредметных умений, формированию которых способствует освоение линии моделей, не исчерпывается вышеприведенными требованиями ФГОС. Также выделим:

– *прогностические умения, формированию которых способствует стохастическое моделирование;*

– *умения находить оптимальные решения поставленных задач, то есть выбрать наилучший вариант из возможных для достижения наибольшей эффективности какого-либо процесса.*

В первом случае учащийся овладевает способностями прогнозировать события в нечетком формате («маловероятно, весьма вероятно, практически наверняка»), а при наличии определенной совокупности числовых данных – численно, то есть в форме вероятности события. Прогностические умения выходят за рамки учебного предмета «Математика» и группы связанных с математикой учебных предметов, и являются, следовательно, метапредметными (построение метеопрогнозов, прогнозирование состояния рынка труда и др.). Они могут быть сформированы, во многих случаях, в рамках схемы

наблюдение → *сбор данных* → *выдвижение гипотезы*
и анализ вариантов → *прогноз.*

В основе данной схемы прогнозирования лежат предельные теоремы теории вероятностей. Так, например, обучающиеся знакомятся со свойством устойчивости относительной частоты событий на основе анализа эмпирически полученных данных (индуктивные умозаключения). Затем предлагается математическая формулировка – закон больших чисел Бернулли.

В случае поиска оптимальных решений действует схема

анализ проблемы → *постановка задачи оптимизации*
→ *выбор средств оптимизации* → *выбор наилучшего из возможных вариантов.*

Примерами задач оптимизации являются так называемые минимаксные задачи (одновременное достижение минимума одной величины при максимуме другой): например, обеспечение выпуска максимума продукции при минимуме энергозатрат. Имеются и другие задачи: оптимальный выбор экскурсионного маршрута (посетить все достопримечательности с минимальной затратой времени на передвижение), распределение средств семейного бюджета на покупки, оптимальное формирование пакета акций при игре на бирже и др.

Нами разработана соответствующая *система заданий*, решение которых способствует формированию вышеперечисленных метапредметных результатов.

Приведем примеры ситуаций (задач), в которых *формируются прогностические умения.*

Задача 1. В течение четырех недель наблюдались значения рублевого курса доллара. Спрогнозировать значение, выше которого в ближайший понедельник курс не поднимется. Построить эмпирическую функцию распределения курса доллара и определить (приближенно) вероятность того, что в ближайший понедельник курс не превысит заданного значения.

В данном задании требуемый прогноз строится в виде моды распределения, а искомая вероятность вычисляется в виде значения эмпирической функции. Очевидно, что распределение выборки является стохастической моделью теоретического распределения курса доллара.

Задача 2. Контролируется стандартность изделий при их массовом производстве. Вероятность брака любого из изделий равна p. Следует определить

а) вероятность того, что брак обнаружится в первый раз при n-м опыте (контроле n-го по счету изделия; $n = 1, 2, ...$);

б) вероятность того, что для обнаружения брака придется проводить не менее n опытов ($n = 2, 3, ...$);

в) среднее число опытов, проводимых до обнаружения брака в первый раз.

В данном задании необходимая информация извлекается путем интерпретации геометрического распределения случайной величины X – числа опытов, проводимых до обнаружения первого бракованного изделия. В частности, среднее число опытов, проводимых до первого обнаружения брака, равно математическому ожиданию геометрического распределения $1/p$ (округленному до натурального числа).

Приведем пример задания на *нахождение оптимального решения*, составленного по типу задачи 17 открытого сегмента контрольно-измерительных материалов ЕГЭ (см., например, [5]).

На двух заводах за время t^2, ч, производится $2t$ и $5t$ единиц продукции соответственно. Заказ на 580 единиц продукции необходимо распределить между этими заводами так, чтобы уплатить минимум заработной платы работникам. Каков будет объем выплаченной при этом заработной платы, если за 1 ч работы на каждом заводе выплачивается 500 р.?

Схема действий учащегося может быть примерно следующей.

Анализ проблемы (*обсуждение содержательной модели*). Имеем задачу обеспечения заданного объема производства при минимальном фонде заработной платы. При этом, судя по условию задачи, работодателю выгоднее большую часть заказа передать второму заводу, на котором производительность труда намного выше. Следовательно, время выполнения заказа на каждом заводе будет различаться.

Постановка задачи оптимизации (*формализация модели*). Пусть первый завод работает время x^2, ч, и производит при этом $2x$ единиц продукции, тогда как за время y^2, ч, на втором заводе производится $5y$ единиц продукции. Следовательно,

$$2x + 5y = 580. \tag{2}$$

При этом будет выплачена заработная плата $U = 500x^2 + 500y^2$. Требуется, таким образом, определить наименьшее значение функции U при условии (2).

Средства оптимизации (*решение «внутри модели»*). Перейдем к рассмотрению U как функции одного переменного. Это можно сделать, выразив, например, x из уравнения (2). Имеем

$$U = 500\left((290 - 2,5y)^2 + y^2\right). \tag{3}$$

Наименьшее значение этой функции определится при $y \geq 0$ с помощью стандартных средств математического анализа:

1) находим производную и стационарные точки;

2) определив знаки производной левее и правее единственной стационарной точки $y = 100$, видим, что в точке $y = 100$ функция U меняет убывание на возрастание, то есть ее значение при $y = 100$ является наименьшим. Это значение получаем, подставив в (3) $y = 100$:

$$U(100) = 5\,800\,000.$$

Выбор наилучшего варианта (*интерпретация модели*): наименьший фонд заработной платы составит 5 800 000 р., если продукция между заводами распределена в количестве 80 и 500 единиц продукции, соответственно; фонд заработной платы на первом заводе составит 800 000 р., на втором – 5 000 000 р.

Выводы

1. Математическая подготовка вносит существенный вклад в достижение ряда метапредметных результатов обучения.

2. Содержательная линия математических моделей есть действенное средство развития способностей к созданию обобщений, установлению аналогий, обнаружению причинно-следственных связей, построению индуктивных и дедуктивных умозаключений.

3. Данная линия служит также средством формирования ряда важных метапредметных умений: умений решать задачи оптимизации различных сфер деятельности, прогностических и других умений.

Список литературы

1. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. – Режим доступа : Минобрнауки.рф/документы/336 (дата обращения: 01.06.2017).

2. Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа : www.math.ru/conc/vers/conc-3003.htm (дата обращения: 01.06.2017).

3.Самарский, А. А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А.Самарский, А. П. Михайлов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320 с.

4. Нахман, А. Д. Компетенция математического моделирования в контексте современной образовательной парадигмы / А. Д. Нахман // Научное обозрение**.** Педагогические науки. – 2017. – № 3. – С. 71 – 79.

5. Сдам ГИА: образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 01.06.17).

References

1. Минобрнауки.рф/документы/336 (accessed 1 June 2017). (In Russ.)

2. www.math.ru/conc/vers/conc-3003.htm (accessed 1 June 2017). (In Russ.)

3. Samarskiy A.A., Mikhailov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie. Idei. Metody. Primery* [Math modeling. Ideas. Methods. Examples], Moscow: Fizmatlit, 2001, 320 p. (In Russ.)

4. Nakhman, A.D. [The competence of mathematical modeling in the context of the modern educational paradigm], *Nauchnoe obozrenie. Pedagogicheskie nauki* [Scientific review. Pedagogical sciences], 2017, no. 3, pp. 71-79. (In Russ.)

5. https://ege.sdamgia.ru/ (accessed 1 June 2017). (In Russ.)

Formation of Meta-Subject Skills in Students Using Mathematical Models

Yu. V. Rodionov, A. D. Nakhman

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: deterministic and stochastic models; meta-subject results; prognostic skills.

Abstract: The role of constructing, analyzing, interpreting of deterministic and stochastic models in the formation of a number of meta-subject learning results is substantiated. The relationship of the modeling process to the development of abilities for research based on analogy, induction, deduction is established. The scheme of formation of prognostic skills in the conditions of stochastic modeling is offered. An appropriate system of tasks has been developed.
