УДК 517.1
DOI: 10.17277/voprosy.2017.01.pp.158-161

О МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ТЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В. И. Фомин

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия

Рецензент д-р физ-мат. наук, профессор В. А. Федоров

Ключевые слова: верхний предел; нижний предел; сумма вещественных чисел; точки разрыва; числовая последовательность.

Аннотация: Изложены в компактной форме обоснование корректности определения суммы вещественных чисел, доказательство теоремы о существовании верхнего и нижнего пределов ограниченной числовой последовательности. Рассмотрены некоторые методические аспекты при определении точек разрыва функции.

При доказательстве математических утверждений (лемм, теорем) преподавателю желательно избегать двух моментов: 1) перегруженности доказательства словесным описанием; 2) излишней формализации доказательства с помощью математических символов; ибо в обоих случаях учащимся трудно воспринимать существо излагаемого материала (в первом случае суть доказательства растворяется в обилии слов, во втором – скрывается в сложности математической символики).

При доказательстве желательно соблюдать разумную грань между словесным описанием и использованием математической символики, что способствует прозрачности и ясности доказательства.

Например, в большинстве учебных пособий при доказательстве корректности определения суммы вещественных чисел наблюдается перекос в пользу использования словесного описания. Устранение такого перекоса дополнительной формализацией доказательства способствует лучшему пониманию учащимися существа дела.

Фомин Василий Ильич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», e-mail: kulikov@apmath.tstu.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов, Россия.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $A \mid A'$ и $B \mid B'$ – сечения в $\mathbb{Q}$, определяющие α и β. Пусть $\Omega_1 = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$, $\Omega_2 = \{a'+b' \mid a' \in A',\ b' \in B'\}$. По определению, $\alpha + \beta = \gamma \mid$

$$a+b \le \gamma \le a'+b', \quad \forall\, a+b \in \Omega_1, \quad \forall\, a'+b' \in \Omega_2. \qquad (*)$$

Теорема 1. $\exists! \gamma \in \mathbb{R} \mid$ выполняется соотношение $(*)$.

► На первом этапе показывается, что

$$a+b \le \sup \Omega_1 \le \inf \Omega_2 \le a'+b', \quad \forall\, a+b \in \Omega_1, \quad \forall\, a'+b' \in \Omega_2. \qquad (1)$$

Из (1) $\Rightarrow \Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid$ выполняется соотношение $(*)\} \ne \varnothing$, ибо $\sup \Omega_1$, $\inf \Omega_2 \in \Gamma$.

На втором

$$\sup \Omega_1 \le \gamma \le \inf \Omega_2, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma. \qquad (2)$$

На третьем

$$\sup \Omega_1 = \inf \Omega_2. \qquad (3)$$

Далее, из (1) – (3) $\Rightarrow \exists!\, \gamma \in \mathbb{R} \mid$ выполняется соотношение $(*)$ ($\gamma = \sup \Omega_1$ или $\gamma = \inf \Omega_2$).◄

Выделим некоторые методические аспекты при доказательстве теоремы о существовании верхнего и нижнего пределов ограниченной числовой последовательности.

Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная числовая последовательность, то есть

$$\exists\ m, M \in \mathbb{R} \mid m \le x_n \le M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}; \qquad (4)$$

Ω – множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}$, H – множество ее предельных точек. Непосредственно доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Справедливо равенство $\Omega = H$.

Замечание 1. Если интервал (a, b) содержит не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}$, то $H \cap (a, b) = \varnothing$.

Замечание 2. Если отрезок $[a, b]$ не содержит предельных точек последовательности $\{x_n\}$, то на нем имеется не более конечного числа членов этой последовательности.

Справедливость замечаний 1, 2 проверяется предположением от противного, при этом при проверке замечания 2 используются теорема Больцано – Вейерштрасса и теорема 2.

Теорема 3. У ограниченной последовательности $\{x_n\}$ существуют верхний и нижний пределы.

► Из неравенств (4) следует в силу теоремы о предельном переходе в неравенстве, что $m \le l \le M$, $\forall\, l \in \Omega$, то есть множество Ω ограничено $\Rightarrow \exists\, M^* = \sup \Omega$, $m_* = \inf \Omega$. Покажем, что $M^* \in \Omega$.

Предположим противное: $M^* \overline{\in} \Omega \overset{\text{Т.2}}{\Rightarrow} M^* \overline{\in} H \Rightarrow \exists O_\varepsilon(M^*) |$ множество $O_\varepsilon(M^*) \cap \{x_n\}$ конечно или пусто $\overset{3.1}{\Rightarrow} O_\varepsilon(M^*) \cap H = \varnothing \overset{\text{Т.2}}{\Rightarrow}$

$$O_\varepsilon(M^*) \cap \Omega = \varnothing. \tag{5}$$

С другой стороны, $M^* = \sup \Omega \Rightarrow \exists l \in \Omega | \quad | l \in (M^* - \varepsilon, M^*) \subset O_\varepsilon(M^*) \Rightarrow$ $O_\varepsilon(M^*) \cap \Omega \neq \varnothing$, что противоречит равенству (5). Предположение от противного не верно. Итак, $M^* \in \Omega$, $M^* = \sup \Omega \Rightarrow \exists \overline{x} = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n = M^*$. Аналогично показывается, что $\exists \underline{x} = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n = m_*$. ◀

В силу теорем 2, 3 справедливо включение $H \subset [\underline{x}, \overline{x}]$.

Следствие 1. Для любого сколь угодно малого положительного числа ε вне интервала $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ содержится не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}$.

Напомним, что следствие 1 используется при доказательстве достаточности в следующей теореме: $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\}$ ограничена и $\overline{x} = \underline{x} = a$.

Сделаем несколько замечаний о методике определения точек разрыва функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Известно (см., например, [1, с. 177; 2, с. 110]), что понятие непрерывности функции $f(x)$ вводится в предельных точках множества $D(f)$, принадлежащих $D(f)$ (непрерывность функции $f(x)$ в изолированных точках множества $D(f)$ рассматривается как вырожденный случай [1, с. 177]). В стандартных учебниках для вузов (см., например, [3, с. 98]) ограничиваются случаем внутренних точек множества $D(f)$. При определении точек разрыва функции имеется различный подход: например, в [1, с. 181] точками разрыва функции $f(x)$ называются предельные точки множества $D(f)$, принадлежащие $D(f)$, в которых функция $f(x)$ не является непрерывной; а в [2, с. 143] к уже названным точкам разрыва добавляются предельные точки множества $D(f)$, не принадлежащие $D(f)$. Следующий простой пример показывает, что при определении точек разрыва функции желателен единый подход. Рассмотрим функцию $f(x) = 1$, $D(f) = [0;1] \cap \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Согласно [1], функция $f(x)$ не имеет точек разрыва, так как она непрерывна на $D(f)$ (в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ функция непрерывна соответственно справа и слева). Согласно [2] функция $f(x)$ непрерывна на $D(f)$ и в то же время имеет несчетное множество $\Omega = [0; 1] \cap \Upsilon$ (здесь Υ – множество иррациональных чисел) устранимых точек разрыва, ибо каждая точка $x_0 \in \Omega$ является предельной точкой множества $D(f)$ и

$$\lim_{D(f) \ni x \to x_0} f(x) = 1.$$

Список литературы

1. Зорич, В. А. Математический анализ. В 2 ч. Часть 1 / В. А. Зорич. – М. : МЦНМО, 2007. – 664 с.
2. Ильин, В. А.Основы математического анализа. В 2 ч. Часть 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Физматлит, 2002. – 648 с.
3. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.

References

1. Zorich V.A. *Matematicheskii analiz* [Mathematical analysis], part 1 of 2 of 2, Moscow: MTsNMO, 2007, 664 p. (In Russ.)
2. Il'in V.A., Poznyak E.G. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Fundamentals of mathematical analysis], part 1 of 2 of 2, Moscow: Fizmatlit, 2002, 648 p. (In Russ.)
3. Bermant A.F., Aramanovich I.G. *Kratkii kurs matematicheskogo analiza* [Short course of mathematical analysis], St. Petersburg: Lan', 2003, 736 p. (In Russ.)

Methodology of Teaching Some Aspects of Mathematical Analysis

V. I. Fomin

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: discontinuity point; lower limit; number sequence; real numbers sum; upper limit.

Abstract: The author provides a rationale for the correctness of finding the sum of real numbers, the proof of the existence of the upper and lower limits of the limited numerical sequence theorem, and discusses some methodological aspects for determination of discontinuity points.
