УДК 372.851
DOI: 10.17277/voprosy.2017.01.pp.148-157

ЛОГИКО-АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ КОМПОНЕНТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Ю. В. Родионов, О. А. Гливенкова, А. Д. Нахман

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Г. М. Куликов

Ключевые слова: логико-алгоритмическая культура; логико-алгоритмическое моделирование; требования к содержанию подготовки.

Аннотация: Сформулированы понятия логико-алгоритмического компонента математической компетенции обучающихся. Обсуждается роль логико-алгоритмической культуры в формировании системы общекультурных компетенций. Предложены требования к знаниям и умениям, приобретаемым обучающимися в процессе логико-алгоритмической подготовки (пропедевтический уровень и уровень бакалавриата). Введено понятие логико-алгоритмического моделирования и представлен круг соответствующих задач.

Введение

Логико-алгоритмические знания и умения являются неотъемлемым компонентом математической компетенции бакалавров инженерных направлений подготовки. Решение всякой учебной, либо профессионально-ориентированной задачи, доказательство любого утверждения сопровождается определенным логическим выводом. Освоение модуля «Математическая логика и теория алгоритмов» в составе дисциплины «Высшая математика» способствует развитию логического мышления, привитию студентам навыков построения формальных логических моделей и применения их в математике и ее приложениях.

Родионов Юрий Викторович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Техническая механика и детали машин»; Гливенкова Ольга Анатольевна – кандидат филологических наук, доцент кафедры «Иностранные языки»; Нахман Александр Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», e-mail: alextmb@mail.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов, Россия.

Целью настоящей работы является исследование логико-алгоритмического компонента математической компетенции обучающихся.

С переходом к реализации актуализированных Федеральных государственных образовательных стандартов (**ФГОС** 3+) высшего образования повышаются требования к результатам обучения математике. Набор традиционных знаний, умений, навыков (**ЗУН**) уступает место *математической компетенции*. Последняя представляет собою *систему*, компонентами которой, помимо ЗУН являются: мотивационно-ценностное отношение к математическим знаниям, кругозор, опыт деятельности, рефлексия.

Современная концепция предметной области «Математика» предполагает формирование способности обучающегося установить связь между практической или прикладной задачей и математическим аппаратом (понятиями, утверждениями, фактами, алгоритмами), который может быть применен для решения данной задачи. При этом речь идет:

а) о решении задач «внутри» предметной области «Математика» (задача решается путем переноса знаний и умений из другого раздела математики); в этом случае мы говорим о «внутрипредметном» моделировании (см. п. 3 настоящей работы);

б) решении практико-ориентированных задач, в формулировке которых содержательная модель практической ситуации уже представлена и остается применить соответствующий математический аппарат (см. п. 4 настоящей работы);

в) выходе за пределы предметной области «Математика», когда процесс решения практических или прикладных задач (в том числе, профессионально-ориентированных и квазипрофессиональных) предполагает реализацию всех этапов математического моделирования: построение содержательной модели, формализацию задачи, математическое решение и интерпретацию результата [1]. Так, например, квазипрофессиональные математические задачи, учебные по форме и профессиональные по содержанию, имеют интегративную сущность, поэтому их решение возможно только при сочетании математических и специальных (профессиональных) ЗУН [2].

1. Роль логико-алгоритмической культуры в формировании системы общекультурных компетенций

В актуализированных ФГОС высшего образования [3] выделены следующие классы компетенций бакалавров:

а) общекультурные;

б) общепрофессиональные;

б) профессиональные.

Класс, в который включена математическая компетенция, определяется направлением профессиональной подготовки. Будем называть *логико-алгоритмическим компонентом математической компетенции* совокупность ЗУН в области логико-алгоритмической теории и практики, необходимых для решения математических, практико-ориентированных и прикладных задач путем формализации рассуждений и выстраивания обоснованных алгоритмов.

Особенностью данного компонента является его «присутствие» в составе каждого из видов компетенций. Так, неоспорим тот факт, что решение любой профессионально-ориентированной задачи сопровождается определенным логическим выводом, выстроенным по законам математической логики, хотя, возможно, и без формализации рассуждений. Процесс решения предполагает соответствие между совокупностью данных и прогнозируемых (а затем – и получаемых) результатов, то есть, по сути, – реализацию некоторого «алфавитного» оператора, который и является алгоритмом.

Общекультурную компетенцию принято понимать как совокупность знаний, навыков, элементов культурного опыта, позволяющих индивиду свободно ориентироваться в социальном и культурном окружении и оперировать его элементами. Как указано выше, в числе компонент логико-алгоритмической компетенции мы рассматриваем такую составляющую, как *кругозор.* Интерес, проявляемый ко всему происходящему в мире в настоящее время, к истории, к отечественной и зарубежной культуре, литературе, искусству, неизбежно сопровождается анализом явлений и процессов, сравнительными характеристиками, логическими умозаключениями и т.п. В свою очередь, указанные формы мыслительной деятельности способствуют развитию умений выделять главное и отбрасывать второстепенное, кратко и ясно выражать свои мысли, ставить задачи, получать и четко формулировать выводы, а эти умения успешно «встраиваются» в математическую деятельность, в том числе – в процессы математического моделирования.

В контексте формирования системы общекультурных компетенций здесь следует говорить о такой их составляющей, как логико-алгоритмическая культура [4]. Последняя понимается как специфическая подсистема культуры, которая прямо и непосредственно связана с социально-информационной, информационно-математической деятельностью, информационной культурой, культурой мышления [5]. Высокий уровень сформированности логико-математической культуры способствует развитию активных, самостоятельных форм приобретения знаний, повышает мотивацию обучения, гарантирует правильность принимаемых решений.

Таким образом, *логико-алгоритмическая культура является инвариантным ядром математической компетенции*, поскольку (независимо от направления профессиональной подготовки) неразрывно связана с мотивационно-ценностным компонентом данной компетенции и компонентом «кругозор». С другой стороны, наличие данной культуры содействует формированию следующих компонент в системе общекультурных компетенций [6]:

– способности к научному пониманию процессов и явлений в различных сферах жизни и деятельности, а также к аргументированному их объяснению:

– способности ориентироваться в актуальных проблемах общественной жизни (в сути проблем, причинах их возникновения, мнениях о путях решения);

– умений различать факты, суждения, оценки, устанавливать их связь с определенной системой ценностей, определять собственное аксиологическое поле;

– коммуникативных умений, включающих в себя речевую культуру, логичность рассуждений, убедительность объяснений.

Следовательно, формирование и развитие логико-алгоритмической культуры обучающегося способствует усилению культурообразующей роли образования.

2. Требования к содержанию логико-алгоритмической подготовки обучающихся в системе «школа – вуз»

Согласно Закону РФ «Об образовании» система образования является непрерывной, поскольку предусматривает преемственность образовательных программ и государственных образовательных стандартов различного уровня и направленности. Сущность преемственности в обучении заключается в преодолении разрыва между разными ступенями образования в процессе непрерывного получения, расширения, углубления и развития знаний и умений, в установлении необходимой связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных ступенях его изучения.

С точки зрения принципа преемственности, содержательно-методические проблемы логико-алгоритмической подготовки бакалавров следует рассматривать в контексте системы «школа – вуз».

Выделим два уровня логико-алгоритмической подготовки в данной системе:

– пропедевтический уровень, включающий в себя начальные понятия и простейшие факты математической логики и первичные представления об алгоритмах, приобретаемые в рамках учебных дисциплин «Математика» и «Информатика» средней школы;

– уровень бакалаврской подготовки (речь идет об инженерных направлениях подготовки).

В таблице 1 приведены требования к результатам освоения логико-алгоритмической содержательной линии. Данные требования сформулированы на основе положений следующих нормативных документов в области математического образования: ФГОС среднего (полного) общего образования и высшего образования [3] и Концепции развития Российского математического образования [7].

Вышеприведенные требования к результатам освоения логико-алгоритмической линии демонстрируют развитие этих результатов от первичных представлений и простейших умений, освоенных выпускником школы до конкретных знаний и умений в области логико-математического моделирования процессов и явлений (формализации рассуждений средствами операций над высказываниями и предикатами) и выстраивания алгоритмов решения практических и прикладных задач в том числе – и в профессиональной деятельности бакалавра.

Таблица 1

Требования к результатам логико-алгоритмической подготовки обучающихся в терминах «знать, уметь, владеть»

Знать, уметь, владеть	Пропедевтический уровень: требования к результатам логико-алгоритмической подготовки выпускников средней школы	Требования к результатам логико-алгоритмической подготовки бакалавров (инженерные направления подготовки)
Знать (иметь представление, понимать)	Выпускники средней школы: – имеют представление о возможностях применения формального математического аппарата к решению задач, возникающих в теории и практике; – имеют представления об аксиоматическом построении математической теории, о логическом статусе аксиом, определяемых и неопределяемых понятий, определений и теорем; – понимают, что законы логики математических рассуждений имеют универсальный характер и применимы во всех областях человеческой деятельности	Бакалавры инженерных направлений подготовки знают: – понятие формулы и классификацию формул алгебры высказываний и логик предикатов; – понятия предикатов и операции над предикатами; – основные тавтологии и равносильности алгебры высказываний и логики предикатов; – требования к алгоритмам и способы задания алгоритмов; – основные алгоритмические системы (машина Тьюринга, рекурсивные функции, нормальные алгоритмы Маркова); – тезисы Чёрча и Тьюринга о вычислимых функциях и теорему Тьюринга; – примеры алгоритмически неразрешимых задач
Уметь	Выпускники средней школы умеют: – проводить дедуктивные и индуктивные рассуждения при доказательстве теорем и решении задач; – аргументировать суждения, делать логически обоснованные выводы, отличать доказанные утверждения от недоказанных; – формализовать составные высказывания путем построения таблиц истинности; – строить словесные алгоритмы и соответствующие блок-схемы	Бакалавры инженерных направлений подготовки умеют: – преобразовывать формулы алгебры высказываний и логики предикатов; – строить нормальные формы формул алгебры высказываний; – находить множества истинности предикатов; – устанавливать следование и равносильность предикатов; – оперировать с кванторами; – строить машину Тьюринга
Владеть	Выпускники средней школы владеют: – стилем мышления, характерным для математики, его абстрактностью, доказательностью, строгостью; – математической символикой; – навыками алгоритмического мышления и понимают необходимость формального описания алгоритмов	Бакалавры инженерных направлений подготовки владеют: – синтаксисом и семантикой алгебры высказываний и логики предикатов; – способами оценки сложности алгоритмов; – языком кванторов и предикатов для записи математических утверждений; – навыками алгоритмического описания математических задач

3. Логико-алгоритмическая практика в процессе освоения обучающимися курса математики

Речь идет о практике решения математических задач, использующей знания и умения в области математической логики, а также понятия, факты и методы теории алгоритмов. Сформулируем несколько принципов, на которых основана данная практика.

3.1. *Принцип построения контрпримеров* к утверждениям основан на законах логики предикатов. Так, если мы имеем высказывание $\forall x\, P(x)$, то, согласно законам де Моргана для кванторов, отрицанием $\neg(\forall x\, P(x))$ будет утверждение $\exists x\, \bar{P}(x)$. Это означает, что проверить *недостоверность* данного утверждения можно, построив соответствующий контрпример. Так, убедиться в том, что условие непрерывности функции в точки является лишь необходимым для ее дифференцируемости в точке («любая дифференцируемая в данной точке функция является в ней и непрерывной»), можно, построив пример непрерывной в некоторой точке функции, не обладающей в ней производной (этим свойством обладает функция $y = |x|$ в точке $x = 0$).

3.2. *Принцип проверки равносильности переходов.* Если заданы одноместные предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на некоторой предметной области *X*, то следование предикатов $P(x) \Rightarrow Q(x)$ означает, что высказывание $Q(x_0)$ истинно для всякого x_0, для которого истинно $P(x_0)$. Убедиться в следовании предикатов можно путем сравнения множеств истинности M_P^+ и M_Q^+: следование $P(x) \Rightarrow Q(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $M_P^+ \subseteq M_Q^+$.

Равносильность предикатов $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ определяется как совместное следование $P(x) \Rightarrow Q(x)$ и $Q(x) \Rightarrow P(x)$. Другими словами истинность $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ есть истинность конъюнкции ($(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow P(x))$. Формулируемый принцип проверки означает, что замена предложения $P(x)$ на $Q(x)$ возможна путем проверки равенства множеств истинности $M_P^+ = M_Q^+$. На практике, для конечных множеств истинности, это означает, что переход $P(x) \Rightarrow Q(x)$ станет равносильным, если выполнена проверка включения $M_Q^+ \subseteq M_P^+$. Так, уже на пропедевтическом уровне освоения логико-алгоритмической линии учащемуся должно быть известно, что решение иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ путем перехода к уравнению-следствию $f(x) = g^2(x)$ требует проверки корней, найденных для последнего уравнения.

3.3. *Принцип построения систем и совокупностей.* Данный принцип означает, что всякая математическая задача, сведенная к совместному выполнению условий $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ есть задача о *системе* таких условий (например, системе неравенств), а значит, предполагается нахождение множества истинности, общего для указанных предикатов: $M_{P_1}^+ \cap M_{P_2}^+ \cap ... \cap M_{P_n}^+$. Если же задача преобразована к рассмотрению нескольких попарно исключающих друг друга условий $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$, то получена задача о *совокупности* условий (например, совокупности неравенств), и, следовательно, требуется найти множество $M_{P_1}^{+} \cup M_{P_2}^{+} \cup ... \cup M_{P_n}^{+}$.

Понимание данного принципа, то есть логических основ построения и решения систем и совокупностей, способствует устранению типичных для таких задач ошибок и затруднений обучающихся.

3.4. *Принцип распознавания стандартных классов задач и следования алгоритму их решения* состоит в следующем:

1) проверить характерные признаки принадлежности задачи данному классу;

2) выполнить последовательно шаги соответствующего алгоритма.

Полезным компонентом логико-алгоритмической деятельности является построение словесных алгоритмов. Например, на основе теорем о функциях, непрерывных на отрезке, и теорем об условиях экстремумов (необходимых и достаточных) обучающийся может самостоятельно построить алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

3.5. *Принцип поиска специальных приемов алгоритмически неразрешимых задач.* Прежде всего, обучающийся должен иметь представления о классах таких задачах, и, следовательно, не тратить время и усилия на поиск соответствующих универсальных формул и правил. Последовательность действий по решению каждой такой задачи не может считаться алгоритмом, поскольку здесь утрачивается свойство массовости алгоритма, то есть возможность его применения к целому классу однотипных задач, различающихся конкретными значениями исходных данных. Покажем на примере, как реализуется данный принцип.

Пример. В какой момент времени t процессы $f(t) = \sin(t-1)$ и $g(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3 + t + 1$ имеют равные скорости протекания?

Прежде всего найдем скорости протекания процессов: $f'(t) = \cos(t-1)$, $g'(t) = (t-1)^2 + 1$. Трансцендентное уравнение

$$\cos(t-1) = (t-1)^2 + 1$$

не «вписывается» ни в один из известных классов алгоритмически разрешимых уравнений. Специальный (основанный на анализе областей значений функций f' и g') прием состоит в оценке левой части уравнения сверху, а правой – снизу:

$$\cos(t-1) \le 1 \le (t-1)^2 + 1.$$

Следовательно,
$$\begin{cases} \cos(t-1) = 1; \\ (t-1)^2 + 1 = 1, \end{cases} \quad \text{откуда } t = 1.$$

4. Логико-алгоритмическое моделирование

4.1. *Логико-математической моделью объекта, процесса или явления мы называем систему математических отношений, описывающих связи между его элементарными звеньями с помощью логических операций.* В свою очередь, *алгоритмической моделью процесса мы называем конеч-*

ную последовательность элементарных действий $\{a_n\}$, *ведущую от совокупности исходных M данных к требуемому конечному результату R.* Поскольку речь идет об однозначном соответствии $M \to R$ (так называемом алфавитном операторе), такое моделирование относится к математическому. Можно также здесь говорить о логико-алгоритмическом моделировании, поскольку каждый переход a_n обусловлен определенным звеном цепочки логических действий (логического вывода).

4.2. Обсуждавшаяся выше логико-алгоритмическая практика обучающихся в процессе освоения курса математики может быть дополнена прикладными и практико-ориентированными задачами, имеются ввиду приложения как «внутриматематические», так и выходящие за пределы собственно предметной области «Математика».

В дополнение к типам задач, приведенным в п. 3, укажем следующее важное приложение. На основе аналогии логических операций и действий над случайными событиями могут конструироваться представления «комбинированного» случайного события в виде результата действий над простыми событиями (с заданными вероятностями). Такая конструкция позволяет применять затем стандартные теоремы о вероятностях [8].

Алгоритмическое моделирование целесообразно использовать в приближенных вычислениях. Например, учащимся может быть предложено построение алгоритма нахождения корня алгебраического уравнения по методу половинного деления.

К задачам практико-ориентированного характера относятся «классические» задачи на упрощение релейно-контактных схем (**РКС**). В основе их решения лежат следующие интерпретации: последовательное соединение переключателей есть конъюнкция соответствующих пропозиционных переменных, а параллельное соединение – их дизъюнкция. Принцип упрощения состоит в следующем:

1) представить (формализовать) содержательную модель РКС, то есть записать соответствующую формулу алгебры высказываний (**АВ**);

2) упростить формулу с помощью основных равносильностей АВ;

3) интерпретировать результат в виде «более экономной» РКС.

В качестве примера рассмотрим РКС, представленную на рис. 1, *а*.

Ее анализ состоит в упрощении формулы

$$\left(X \wedge ((Y \wedge \bar{Z}) \vee Z)\right) \vee \left(\bar{X} \wedge ((Y \wedge Z) \vee \bar{Z})\right)$$

к виду

$$(X \wedge Z) \vee \left(\bar{X} \wedge \bar{Y}\right) \vee Y.$$

Следовательно, приходим к более экономной схеме (рис. 1, *б*).

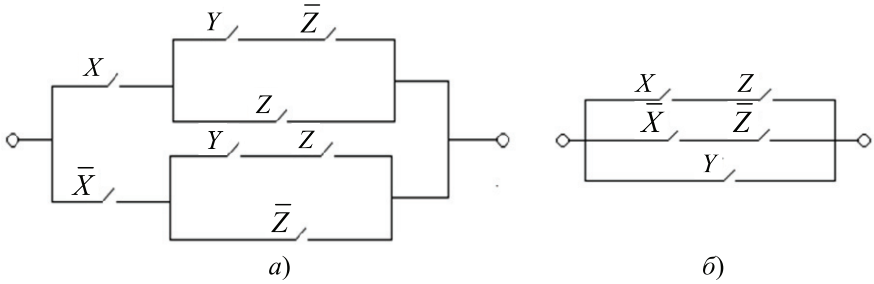

Рис. 1. Пример релейно-контактной схемы:
а – исходная схема; *б* – интерпретация модели

4.3. Решение профессионально-ориентированных задач с помощью логико-алгоритмического моделирования возможно в рамках изучения общеинженерных и специальных дисциплин, что способствует расширению представлений студентов о возможностях математического моделирования и укреплению межпредметных связей.

Выводы

В настоящей работе в соответствии с поставленной целью решены следующие задачи:

1) сформулировано понятие логико-алгоритмического компонента математической компетенции обучающихся и установлена роль логико-алгоритмической культуры в формировании системы общекультурных компетенций;

2) на основе положений нормативных документов, регламентирующих математическое образование, предложены требования к знаниям и умениям, приобретаемым обучающимися в процессе логико-алгоритмической подготовки (пропедевтический уровень и уровень бакалавриата);

3) сформулированы принципы, на которых, по мнению авторов, должна быть основана логико-алгоритмическая практика в процессе освоения обучающимися курса математики;

4) предложено понятие логико-алгоритмического моделирования и описан круг соответствующих задач.

Список литературы

1. Антонова, Н. А. Современные требования информационного общества к уровню алгоритмической подготовки специалистов информационного профиля / Н. А. Антонова // Наука и ее роль в современном мире : материалы междунар. науч.-практ. конф. / М-во образования и науки Респ. Казахстан ; Караганд. ун-т «Болашак». – Караганды, 2009. – Т. 4. – С. 89 – 94.

2. Нахман, А. Д. Технологические аспекты формирования профессионально-математической компетентности магистрантов на основе решения профессионально ориентированных задач / А. Д. Нахман, А. Ю. Севостьянов // Вопр. соврем. науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. – 2011. – № 4(35). – С. 182 – 187.

3. Федеральные Государственные Образовательные Стандарты [Электронный ресурс] // Министерство образования и науки Российской Федерации : офиц. сайт. – Режим доступа : Минобрнауки.рф/документы/336 (дата обращения 1.02.2017).

4. Нахман, А. Д. Формирование логико-алгоритмической культуры студентов инженерных направлений подготовки [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / А. Д. Нахман // Инновации в образовании : электрон. науч. журн. – 2016. – № 6. – 60 с. – Режим доступа : http://innovations.esrae.ru/14-14 (дата обращения 1.02.17)

5. Наумов, А. А. Алгоритмическая культура в контексте подготовки специалистов в области информатики / А. А. Наумов // Вестн. Моск. пед. университета. Сер. Информатика и информатизация образования. – 2006. – № 7. – С. 268 – 269.

6. Лебедев, О. Е. Культурологические основы образовательных стандартов современной школы / О. Е. Лебедев // Педагогика. – 2008. – № 2. – С. 110 – 115.

7. Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс] // Math.ru : офиц. сайт. – Режим доступа : www.math.ru/conc/vers/conc-3003.pdf (дата обращения: 01.02.2017).

8. Нахман, А. Д. Задачи на вычисление вероятности события / А. Д. Нахман // Математика в школе. – 2011. – № 1. – С. 34 – 41.

References

1. Antonova N.A. [Current requirements of the information society to the level of algorithmic preparation of information profile specialists], *Nauka i ee rol' v sovremennom mire* [Science and its role in the modern world], proceedings of the international scientific-practical conference, Karaganda, January 30, 2009, vol. 4, pp. 89-94. (In Russ.)
2. Nakhman A.D. [Some Technological Aspects of Formation of Professional-Mathematical Competence of Masters on the Basis of Solving Professional-Oriented Mathematical Problems] *Voprosy sovremennoi nauki i praktiki. Universitet im. V.I. Vernadskogo* [Problems of Contemporary Science and Practice. Vernadsky University], 2011, no. 4(35), pp. 182-187. (In Russ., abstract in Eng.)
3. *Federal'nye Gosudarstvennye Obrazovatel'nye Standarty* [Federal State Educational Standards], available at: Minobrnauki.rf/dokumenty/336 (accessed February 1, 2017).
4. Nakhman A.D. *Formirovanie logiko-algoritmicheskoi kul'tury studentov inzhenernykh napravlenii podgotovki* [Formation of logical-algorithmic culture of students of engineering areas of training], available at: http://innovations.esrae.ru/14-14 (accessed February 1, 2017)
5. Naumov A.A. [Algorithmic Culture in the context of the preparation of specialists in the field of informatics], *Vestnik Moskovskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija: Informatika i informatizacija obrazovanija* [Bulletin of the Moscow Pedagogical University. Series: Informatics and Informatization of Education], 2006, no. 7, pp. 268-269. (In Russ.)
6. Lebedev O.E. [Cultural foundations of modern school education standards], *Pedagogika* [*Pedagogy*], 2008, no. 2, pp. 110-115. (In Russ.)
7. [The concept of the development of Russian mathematics education], available at: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.pdf (accessed February 1, 2017).
8. Nakhman A.D. [Problems on calculation of probability of event], *Matematika v shkole* [Математика в школе], 2011, no. 1, pp. 34-41.

Logical-Algorithmic Component of Mathematical Competence of Students

Yu. V. Rodionov, O. A. Glivenkova, A. D. Nakhman

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: logical-algorithmic culture; logical-algorithmic modeling; requirements for content of training.

Abstract: The authors formulate the concepts of the logical-algorithmic component of mathematical competence of students. The role of logical-algorithmic culture in the formation of the system of general cultural competencies is discussed. The requirements for knowledge and skills acquired by students in the process of logical-algorithmic training (propaedeutic level and bachelor's level) are proposed. The concept of logical-algorithmic modeling is introduced and a range of relevant problems is proposed.
