

## **КРИТЕРИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИНФОРМАЦИОННЫХ КАНАЛОВ**

**А. А. Львов, М. С. Светлов, Ю. А. Ульянина**

*ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина», г. Саратов;  
ФГБУН «Институт проблем точной механики и управления РАН», г. Саратов*

*Рецензент д-р техн. наук, профессор Ю. В. Садомцев*

**Ключевые слова:** информационный канал; критерий эффективности; математическая модель.

**Аннотация:** Рассмотрены основные (критериальные) параметры, по которым целесообразно проводить сравнение математических моделей информационных каналов, разработан критерий эффективности моделей  $K$ -ичных информационных каналов, учитывающий предложенную геометрическую интерпретацию метрики не двоичных кодовых множеств.

На современном этапе развития цифровых информационных управляющих, измерительных, телекоммуникационных систем (ИУС, ИИС, ИКТС) во главу угла ставится задача повышения их эффективности. Поскольку наиболее сложным, дорогостоящим и в большинстве случаев неконтролируемым звеном систем является информационные каналы (ИК), эффективность систем в первую очередь определяется эффективностью каналов. В связи с этим, задача повышения эффективности ИК – одна из наиболее актуальных задач. Реальные не двоичные ИК являются сложными стохастическими структурами, поэтому их синтез и анализ целесообразно осуществлять с использованием математического моделирования.

Для современных цифровых ИУС, ИИС, ИКТС характерны модели дискретных каналов связи (КС), в частности кодовых. К таким моделям относятся модели симметричных и несимметричных каналов без памяти,

---

Львов Алексей Арленович – доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные системы и технологии», e-mail: alvova@mail.ru, ФГБОУ ВПО «СГТУ им. Ю. А. Гагарина»; Светлов Михаил Семёнович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, ФГБУН «ИПТМУ РАН»; Ульянина Юлия Александровна – аспирант кафедры «Информационные системы и технологии», ФГБОУ ВПО «СГТУ им. Ю. А. Гагарина», г. Саратов.

модель дискретного канала с памятью, характеризующегося коррелированными замираниями, модели Маркова, Гильберта, Фричмана, Пуртова и др. [1 – 4]. Как показал анализ, варианты геометрической интерпретации метрик таких математических моделей не позволяют в полной мере реализовать потенциальную помехоустойчивость двоичных ( $K$ -ичных) кодов. В работе [5] предложен вариант геометрической интерпретации метрики двоичных кодовых множеств, позволяющий реализовать в более полной мере их потенциальную помехоустойчивость. В источнике [6] разработаны математические модели  $K$ -ичных ИК ( $K$ -каналов), учитывающие предложенные метрические особенности двоичных кодов. Для оценки эффективности таких моделей необходимо введение соответствующего критерия. В литературе [7 – 10] предложены критерии эффективности КС, однако, для моделей  $K$ -каналов их применение не дает качественных результатов. Целью работы является разработка критерия эффективности  $K$ -каналов, учитывающего метрические особенности  $K$ -ичных кодов.

*Базовая математическая модель.* В работе [6] предложена математическая модель несимметричного  $K$ -канала общего типа (с ошибками трансформации и стирания) в виде модели двух последовательно соединенных моделей каналов  $A$  и  $B$ , в каждом из которых возможны лишь однократные ошибки. Такая модель соответствует последовательному синхронному каналному интерфейсу (без учета канальных задержек). Граф переходных вероятностей и уравнения математической модели приведен на рис. 1.

$$\left. \begin{aligned} q_0^A \left( q_0^B + \sum_{i=1}^{K-1} (p_{0i}^B + p_{0x_i}^B) \right) + \sum_{i=1}^{K-1} p_{0i}^A (q_i^B + p_{i0}^B + p_{ix_i}^B) + \sum_{i=1}^{K-1} p_{0x_i}^A (q_{x_i}^B + p_{x_i0}^B + p_{x_{ji}}^B) &= 1, \\ q_i^A (q_i^B + p_{i0}^B + p_{ix_i}^B) + p_{i0}^A \left( q_0^B + p_{0i}^B + p_{0x_i}^B + \sum_{j=1}^{K-1} (p_{0j}^B + p_{0x_j}^B) \right) + p_{ix_i}^A (q_{x_i}^B + p_{x_i0}^B + p_{x_{ji}}^B) &= 1, \end{aligned} \right\} (1)$$

$$i, j \in \overline{1, K-1}, i \neq j.$$

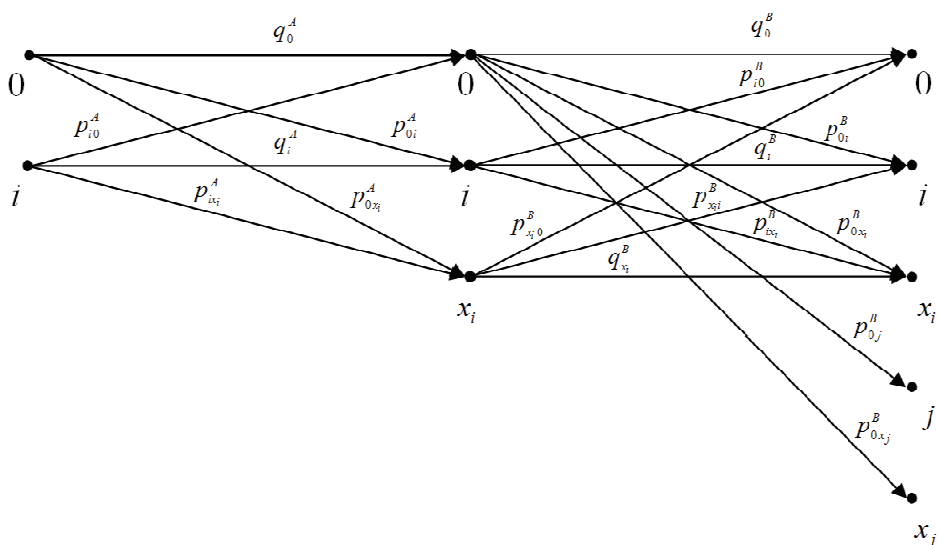


Рис. 1. Базовая математическая модель несимметричного  $K$ -канала общего типа

На рисунке 1 обозначено:  $q_0^A, q_0^B$  ( $q_i^A, q_i^B$ ) – вероятности правильного приема нулевых (токовых) символов в каналах  $A$  и  $B$ , соответственно;  $p_{0i}^A, p_{0i}^B$  ( $p_{i0}^A, p_{i0}^B$ ) – вероятности возникновения одиночных ошибок трансформации на разрядах, занятых нулевыми (токовыми) символами, в каналах  $A$  и  $B$  соответственно;  $p_{0x_i}^A, p_{0x_i}^B$  ( $p_{ix_i}^A, p_{ix_i}^B; p_{x_i0}^B, p_{x_i}^B$ ) – вероятности возникновения одиночных ошибок стирания на разрядах, занятых нулевыми (токовыми; «стёртыми») символами, в каналах  $A$  и  $B$  соответственно;  $q_{x_i}^B$  – вероятность правильного приема символа стирания в канале  $B$ .

Из математической модели, представленной на рис. 1, легко получить модели для частных случаев  $K$ -каналов: математические модели  $K$ -каналов с ошибками трансформации (без ошибок стирания) и математические модели  $K$ -каналов только с ошибками стирания. Для этого в первом случае необходимо приравнять все вероятности возникновения ошибок стирания к нулю, а во втором – приравнять нулю все вероятности возникновения ошибок трансформации.

Особенностью представленной математической модели является то, что в соответствии с предложенным в источнике [5] принципом геометрической интерпретации метрик математических моделей двоичных кодов. При известной статистике канала значения  $p_{ij}$  и  $p_{ix_j}$  вероятностей трансформации ненулевых (токовых) символов  $i$  и  $j$  друг в друга и стирания в несоответствующие («чужие») символы ( $i, j = 1, K-1, i \neq j$ , где  $K$  – основание канального алфавита) являются величинами второго порядка малости по отношению к значениям  $p_{0i}, p_{0x_j}, p_{i0}$ , вероятностей трансформации и стирания символов с участием нулевого символа.

Представленная математическая модель позволяет более качественно оценить статистику несимметричных  $K$ -каналов и, следовательно, повысить эффективность ИК и систем передачи информации в целом.

*Параметры эффективности.* Подробный анализ математических моделей ИК позволил выделить основные параметры (критериальные), по которым целесообразно проводить их сравнение. Нормированные значения коэффициентов эффективности по критериальным параметрам определяются отношением их реальных значений к максимально возможным. Анализ математической модели несимметричного  $K$ -канала общего типа позволил определить максимальные значения критериальных параметров.

*Параметр, учитывающий число состояний модели.* Одним из наиболее значимых параметров, влияющих на эффективность моделей ИК, является параметр, характеризующий количество возможных состояний модели. Чем большее число состояний отображает модель, тем качественнее она описывает реальный канал. Максимальное число состояний  $K$ -каналов отражает двухкаскадная модель [6]

$$(N_{\text{сост}})_{\text{max}} = 2K^2 + 11K - 12. \quad (2)$$

Таким образом, с учетом формулы (2) коэффициент эффективности  $\eta_{\text{сост}}$ , учитывающий число состояний модели, примет вид

$$\eta_{\text{сост}} = \frac{N_{\text{сост}}}{2K^2 + 11K - 12}, \quad (3)$$

где  $N_{\text{сост}}$  – число состояний исследуемой модели ИК.

Чем ближе коэффициент  $\eta_{\text{сост}}$  к единице, тем большее число состояний ИК отображает модель.

*Параметр, учитывающий число вариантов режимов исходов приема (обнаружения и/или исправления ошибок) в ИК.* Максимальное число режимов обнаружения и/или исправления ошибок, соответствующее модели несимметричного  $K$ -канала, определяется формулой

$$(N_{\text{реж}})_{\text{max}} = \sum_{\substack{r+s+e=0 \\ s \leq r}}^{d_{\text{min}}-1} C_n^{r+s+e}, \quad (4)$$

где  $d_{\text{min}}$  – минимальное кодовое расстояние используемого рабочего кодового множества;  $n$  – число разрядов используемого канального кода;  $r$  – значение кратности обнаружения ошибок трансформации;  $s$ ,  $e$  – значения кратностей исправления ошибок трансформации и стирания соответственно;  $C_n^{r+s+e}$  – число сочетаний из  $n$  элементов по  $r+s+e$ .

С учетом выражения (4) коэффициент эффективности  $\eta_{\text{реж}}$ , учитывающий число вариантов режимов исходов приема в ИК, запишется в виде

$$\eta_{\text{реж}} = \frac{N_{\text{реж}}}{\sum_{\substack{r+s+e=0 \\ s \leq r}}^{d_{\text{min}}-1} C_n^{r+s+e}}, \quad (5)$$

где  $N_{\text{реж}}$  – число вариантов режимов обнаружения и/или исправления ошибок исследуемой модели ИК.

Чем ближе значение коэффициента  $\eta_{\text{реж}}$  к единице, тем большее число вариантов режимов исходов приема отражает модель.

*Параметр, учитывающий степень несимметричности канала.* Несмотря на то что реальные ИК являются несимметричными, часто требуются применения специальных мер искусственного симметрирования, что для  $K$ -каналов весьма затруднительно, большинство моделей ИК соответствует симметричным ИК. Поэтому, чем в большей степени модель отражает несимметричность канала, тем она эффективнее. Условия несимметричности канала можно записать в виде

$$p_{0i} \neq p_{i0}; p_{0x_i} \neq p_{ix_i}, \quad (6)$$

где  $p_{0i}$ ,  $p_{i0}$  – вероятности возникновения ошибок трансформации;  $p_{0x_i}$ ,  $p_{ix_i}$  – вероятности возникновения ошибок стирания.

Из (5) следует, что чем больше отличие значений вероятностей возникновения ошибок определенного типа, тем выше степень несимметричности канала. Разность  $N_{\text{тр}}$  значений вероятностей возникновения ошибок трансформации определяется формулой

$$N_{\text{тр}} = \sum_{i=1}^{K-1} |p_{i0} - p_{0i}|.$$

Разность  $N_{\text{ст}}$  значений вероятностей возникновения ошибок стирания записывается в виде

$$N_{\text{ст}} = \sum_{i=1}^{K-1} |p_{ix_i} - p_{0x_i}|.$$

Комбинированный (комплексный) параметр  $N_{\text{несим}}$ , характеризующий несимметричность канала, может быть выражен как произведение параметров  $N_{\text{тр}}$  и  $N_{\text{ст}}$

$$N_{\text{несим}} = \sum_{i=1}^{K-1} |p_{i0} - p_{0i}| \sum_{i=1}^{K-1} |p_{ix_i} - p_{0x_i}|. \quad (7)$$

В случае полностью (абсолютно) несимметричного канала при  $p_{i0} \gg p_{0i}$  и  $p_{ix_i} \gg p_{0x_i}$ , когда значениями  $p_{0i}$  и  $p_{0x_i}$  как величинами высокого порядка малости можно пренебречь, выражение (7) примет вид

$$(N_{\text{несим}})_{\text{max}} = (K-1)^2 p_{i0} p_{ix_i}.$$

Таким образом, с учетом формул (7) и (8) нормированный коэффициент эффективности  $\eta_{\text{несим}}$  по параметру несимметричности канала запишется в виде

$$\eta_{\text{несим}} = \frac{\sum_{i=1}^{K-1} |p_{i0} - p_{0i}| \sum_{i=1}^{K-1} |p_{ix_i} - p_{0x_i}|}{(K-1)^2 p_{i0} p_{ix_i}}. \quad (8)$$

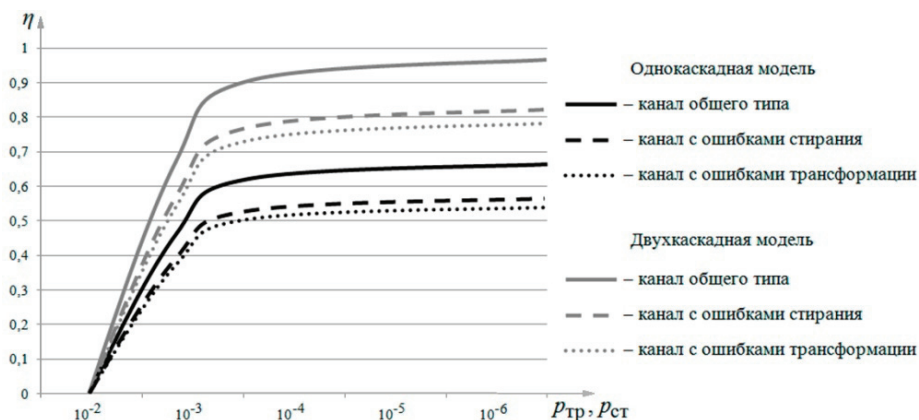
Чем ближе значение коэффициента  $\eta_{\text{несим}}$  к единице, тем выше степень отображения несимметричности канала.

*Критерий эффективности моделей ИК.* С учетом (3), (5), (9) коэффициент эффективности  $\eta$  моделей  $K$ -каналов примет вид

$$\eta = \eta_{\text{сост}}^\alpha \eta_{\text{исх}}^\beta \eta_{\text{несим}}^\gamma, \quad (9)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – весовые коэффициенты, учитывающие значимость («вес») критериальных параметров. Целочисленные (для простоты вычислений) значения этих коэффициентов задаются разработчиком и/или заказчиком.

Очевидно, что чем ближе значение коэффициента  $\eta$  к единице, тем эффективнее рассматриваемый вариант модели ИК.



**Рис. 2. Значения коэффициента эффективности для двухкаскадной и однокаскадной моделей**

*Результаты моделирования.* На базе программного комплекса проведен сравнительный анализ математических моделей  $K$ -каналов по разработанному критерию на примере двухкаскадной и однокаскадной моделей троичных несимметричных ИК с ошибками трансформации, стирания, общего типа. Результаты расчетов приведены на графиках рис. 2 (весовые коэффициенты приняты равными единице).

Как видно из графиков, двухкаскадная модель является более эффективной в плане выбранного критерия.

Таким образом, основным результатом работы является критерий эффективности моделей  $K$ -каналов, учитывающий предложенный вариант геометрической интерпретации метрики  $K$ -ичных кодовых множеств.

#### *Список литературы*

1. Adoul, J-P. A. A Critical Statistic for Channels with Memory / J-P. A. Adoul, B. D. Fritchman, L. N. Kanal // IEEE Transactions on Information Theory. – 1972. – No. 18. – P. 151 – 159.
2. Murthy, D. N. P. Models / D. N. P. Murthy, M. Xie, R.W. Jiang. – John Wiley & Sons Ltd., 2007.
3. Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике : межвуз. сб. / Горьков. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского ; редкол.: А. А. Марков (отв. ред.) и др. – Горький: ГГУ, 1986. – 210 с.
4. Гильберт, Д. Избранные труды. Т. 1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики / Д. Гильберт. – М. : Факториал, 1998. – 575 с.
5. Ульянина, Ю. А. Оценка основных характеристик двоичных ПСП-кодов / А. А. Львов, М. С. Светлов, Ю. А. Ульянина // АТМ-2013 : сб. трудов III Международ. науч. конф. : в 2 т. / под ред. А. А. Львова и М. С. Светлова. – Саратов : Райт-Экспо, 2013. – Т. 2. – С. 44 – 53.
6. Ульянина, Ю. А. Математическая модель  $K$ -ичных каналов / Н. А. Львова, М. С. Светлов, Ю. А. Ульянина // САІУ-2013 : матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції. – Запоріжжя : Класичний приватний університет, 2013. – С. 155 – 157.
7. Радиотехнические системы передачи информации / В. А. Борисов [и др.]. – М. : Радио и связь, 1990. – 304 с.
8. Теория передачи сигналов / А. Г. Зюко [и др.]. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.

9. Теория электрической связи : учеб. для вузов / А. Г. Зюко [и др.]. – М. : Радио и связь, 1999. – 432 с.
10. Панфилов, И. П. Теория электрической связи / И. П. Панфилов, В. Е. Дырда. – М. : Радио и связь, 1991. – 344 с.

#### References

1. Adoul J-P.A., Fritchman B.D., L.N. Kanal (1972). *IEEE Transactions on Information Theory*, no. 18.
2. Murthy D.N.P., Xie M., Jiang R.W. (2007). *Models*, John Wiley & Sons Ltd.
3. Markov A.A. (1986). *Kombinatorno-algebraicheskie metody v prikladnoi matematike* (Combinatorial-Algebraic Methods in Applied Mathematics), Gor'kii: GGU, 210 p.
4. Gil'bert D. (1998). *Izbrannye trudy. T. 1. Teoriya invariantov. Teoriya chisel. Algebra. Geometriya. Osnovaniya matematiki* (Selected works. Vol. 1. The theory of invariants. Number theory. Algebra. Geometry. Foundations of Mathematics), Moskva: Faktorial, 575 p.
5. L'vov A.A., Svetlov M.S., Ul'yanina Yu.A. (2013). *ATM-2013: sbornik trudov III Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii : v 2 tomakh* (ATM-2013: collection of works of the III International scientific conference: in 2 volumes), Saratov: Rait-Ekspo, vol. 2., pp. 44-53.
6. L'vova N.A., Svetlov M.S., Ul'yanina Yu.A. (2013). *SAIU-2013: materialy IV Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* (SAIU 2013: Proceedings of the IV International scientific and practical conference), Zaporozh'e : Klassicheskii privatnyi universitet, pp. 155-157.
7. Borisov V.A. [at all] (1990). *Radiotekhnicheskie sistemy peredachi informatsii* (Radio systems of information transfer), Moskva: Radio i svyazi, 304 p.
8. Zyuko A.G. [at all]. (1986). *Teoriya peredachi signalov* (The theory of signal transmission), Moskva: Radio i svyazi, 304 p.
9. Zyuko A.G. [at all]. (1999). *Teoriya elektricheskoi svyazi: uchebnik dlya vuzov* (Theory of telecommunications: a textbook for high schools), Moskva: Radio i svyazi, 432 p.
10. Panfilov I.P., Dyrda V.E. (1991). *Teoriya elektricheskoi svyazi* (Theory of electrical communication), Moskva: Radio i svyazi, 344 p.

---

### Criterion of Mathematical Model Efficiency for Information Channels

A. A. Lvov, M. S. Svetlov, Yu. A. Ulyanina

*Gagarin Saratov State Technical University, Saratov  
Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov*

**Keywords:** criterion of efficiency; information channel; mathematical model.

**Abstract:** This paper highlights the basic (criteria) parameters by which it is advisable to carry out the comparison of mathematical models of information channels (IC); the criterion of model  $K$ -ary IC taking into account the authors' geometrical interpretation of the proposed metric non-binary code sets was developed.

---

© А. А. Львов, М. С. Светлов, Ю. А. Ульянина, 2015