

## РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ МЕМБРАННОГО АГРЕГАТА ДЛЯ ОЧИСТКИ ПРОМЫШЛЕННЫХ РАСТВОРОВ И СТОКОВ МЕТОДОМ УЛЬТРАФИЛЬТРАЦИИ

**В. Ю. Богомолов, В. И. Кочетов, С. И. Лазарев**

*ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов*

*Рецензент д-р хим. наук, доцент В. М. Поликарпов*

**Ключевые слова:** байонетный затвор; мембранный аппарат; напряжение.

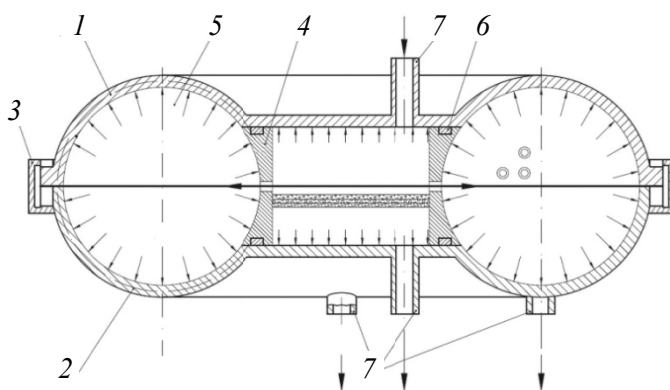
**Аннотация:** Предложены расчетная схема и методика расчета на прочность и жесткость байонетного затвора, представляющего собой тонкую короткую цилиндрическую оболочку, на одном краю которой имеется кольцо, а на другой – зубья, и нагруженного со стороны зубьев регулярной нагрузкой.

Мембранный аппарат комбинированного типа [1] относится к области разделения, концентрирования и очистки растворов методами микро-, ультра- и нанофильтрации и может использоваться в химической, микробиологической, медицинской и пищевой промышленности. Основная задача аппарата – повышение качества и эффективности разделения и очистки растворов путем совмещения в нем элементов плоскокамерного и трубчатого мембранных аппаратов в одном аппарате, имеющем небольшие габариты.

Основными несущими узлами корпуса мембранного аппарата являются верхняя и нижняя крышки, соединенные между собой с помощью замкового байонетного кольца 3 (рис. 1). Каждая крышка представляет собой открытую торообразную оболочку, сопряженную по наружному диаметру с кольцом, а по внутреннему – с круглой пластиной. Наряду с требованиями качества и эффективности разделения и очистки растворов, конструкция аппарата, в первую очередь несущие крышки и байонетный затвор, должны удовлетворять условиям безопасности эксплуатации. Процесс расчета и выбора оптимальных конструктивных характеристик для крышек аппарата (толщины торовой оболочки, круглой пластины и колец) рассмотрен ранее [2].

---

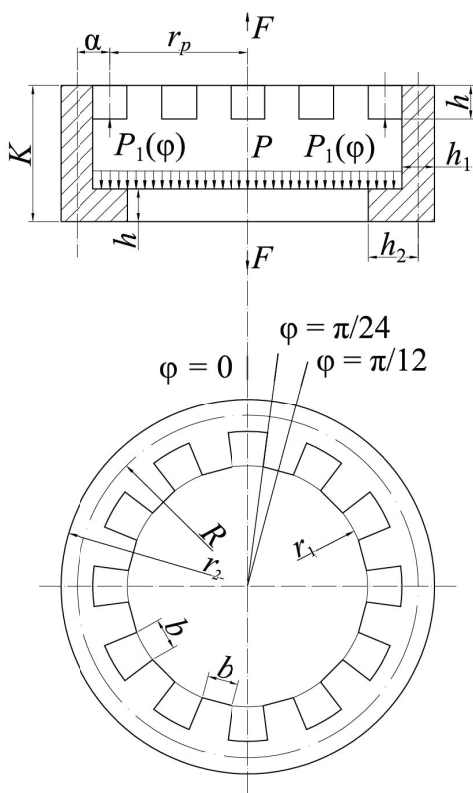
Богомолов Владимир Юрьевич – аспирант кафедры «Прикладная геометрия и компьютерная графика»; Кочетов Виктор Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная геометрия и компьютерная графика»; Лазарев Сергей Иванович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная геометрия и компьютерная графика», e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов.



**Рис. 1. Общий вид мембранного аппарата комбинированного типа:**  
 1 – верхняя крышка; 2 – нижняя крышка; 3 – байонетное кольцо (замок);  
 4 – корпус плоскокамерного модуля; 5 – камера трубчатого модуля;  
 6 – уплотнение; 7 – патрубки для входа и выхода разделяемого раствора

Байонетный затвор, наряду с крышками, является одним из ответственных узлов мембранного аппарата комбинированного типа, с точки зрения прочности и жесткости, от которых зависят качество и надежность работы аппарата в целом.

В процессе работы аппарата распорное усилие, передаваемое от крышек байонетному затвору, достигает значительных величин. Основное



**Рис. 2. Общий вид байонетного затвора**

назначение байонетного затвора – обеспечение надежного запирания крышек, исключающее их размыкание под давлением. Поэтому исследование напряженно-деформированного состояния байонетного затвора представляет большой практический интерес.

Байонетный затвор (рис. 2) состоит из короткой цилиндрической оболочки ( $l/R < 1$ ), снабженной, с одной стороны, байонетными выступами (зубьями), а с другой, – кольцом. Короткая цилиндрическая оболочка подвергается со стороны зубьев значительным силовым воздействиям, которые по своему характеру являются несимметричными. Другой край оболочки снабжен опорным кольцом, на которое действует равномерная осесимметричная нагрузка.

Интенсивность неосесимметричной нагрузки на байонетный

затвор в случае отсутствия технологических неточностей изготовления зубьев может быть представлена в виде ряда Фурье как четкая периодическая функция центрального угла  $\varphi$  с шагом

$$T = \frac{2\pi}{m} \quad (\text{рис. 3})$$

$$p(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\varphi, \quad (1)$$

где  $m$  – число байонетных выступов (зубьев);

$$a_0 = p_0, \quad a_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p(\varphi) \cos i\varphi d\varphi.$$

Из симметрии нагрузки следует, что коэффициенты ряда Фурье  $a_i$  (1) отличны от нуля для  $i$ , пропорциональных  $m$ , т.е.  $i = k_1 m$ . При этих  $i$  получим:

$$a_i = \frac{m}{\pi} \int_{-T/4}^{+T/4} p_0 \cos i\varphi d\varphi = \frac{mP_0}{\pi} \frac{\sin k_1 m\varphi}{k_1 m} \Big|_{-T/4}^{+T/4} = \begin{cases} 0, & \text{при } k_1 = 2, 4, 6, \dots; \\ \frac{2p_0(-1)^{\frac{k_1-1}{2}}}{\pi k_1}, & \text{при } k_1 = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Обозначив  $k_1 = (2s - 1)$ , получим окончательное выражение для ряда Фурье (1):

$$p(\varphi) = \frac{p_0}{2} + \frac{2p_0}{\pi} \sum_{s=1,2,3}^{\infty} \frac{\cos(m(2s-1)\varphi)}{(2s-1)} (-1)^{s+1}. \quad (2)$$

Величина  $p_0$  определяется из условия равновесия:

$$p_0 = \frac{F}{\pi r_p},$$

где  $F$  – распорное усилие, действующее на байонетный затвор, Н;  $r_p$  – радиус окружности действия нагрузки  $p(\varphi)$ , м.

Таким образом, расчет зоны сопряжения байонетного затвора, нагруженного внешней регулярной нагрузкой интенсивностью  $p(\varphi)$ , распределенной по окружности радиуса  $r_p$ , согласно принципу суперпозиции, сводится к решению осесимметричной задачи под действием нагрузки постоянной интенсивности  $p_0/2$  и к решению неосесимметричной задачи.

При решении данных задач расчленим байонетный затвор на короткую цилиндрическую оболочку и кольцо.

**Осесимметричная задача сопряжения короткой цилиндрической оболочки с кольцом.** Рассматриваемая осесимметричная задача дважды статически неопределима. Произведя разрез в месте сопряжения короткой оболочки с кольцом, получим основную систему (рис. 4), в которой  $M_0$ ,  $Q_0$  – неизвестные внутренние силовые факторы.

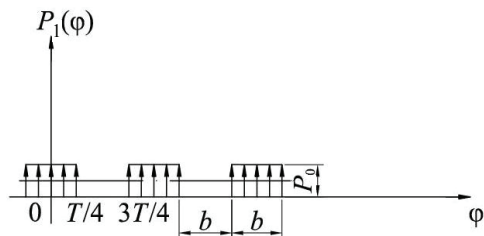


Рис. 3. График неосесимметричной нагрузки на байонетный затвор

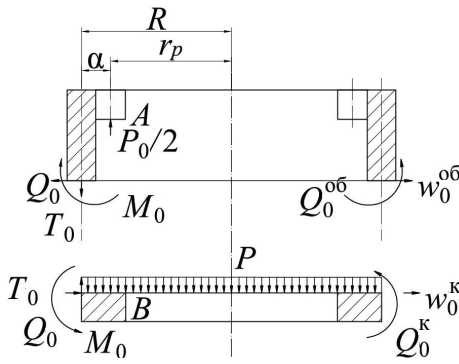


Рис. 4. Расчетная схема осесимметричной задачи

Что касается усилия  $T_0$ , то оно находится из условия равновесия

$$T_0 = \frac{P_0 r_p}{2 R}, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус срединной поверхности короткой оболочки, м.

Обозначив радиальные перемещения в месте разреза оболочки и кольца  $w_0^{об}$  и  $w_0^к$ , а углы поворота  $\nu_0^{об}$  и  $\nu_0^к$ , получим условия совместности перемещений в соответствии с их положительными направлениями (см. рис. 4):

$$w_0^{об} = w_0^к, \quad \nu_0^{об} = \nu_0^к. \quad (4)$$

Согласно [3] уравнения (4) могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{Q_0}{4D\beta^3} f_{11} + \frac{M_0}{4D\beta^2} f_{12} - \frac{m_0}{4D\beta^2} f_{34} - \frac{\mu T_0 R}{Eh_1} = \\ & = \frac{1}{EI_3} \left( \frac{P_0 r_p^2 + M_0 R - Q_0 R \frac{h}{2} - T_0 R^2}{2} \right) \frac{h}{2} - \frac{Q_0 R}{EI_1} - \frac{Q_0}{4D\beta^2} f_{12} - \frac{M_0}{4D\beta} f_{32} + \frac{m_0}{4D\beta} f_{44} = \\ & = \frac{1}{EI_3} \left( \frac{P_0 r_p^2 + M_0 R - Q_0 R \frac{h}{2} - T_0 R^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $f_{ik}$  – функции влияния ( $i = k = 1, 2, 3, 4$ ), определяемые по формулам

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\text{sh}(2\beta l) - \sin(2\beta l)}{\text{sh}^2(\beta l) - \sin^2(\beta l)}; & f_{12} &= 2 \frac{\text{sh}^2(\beta l) + \sin^2(\beta l)}{\text{sh}(\beta l) - \sin^2(\beta l)}; \\ f_{22} &= 2 \frac{\text{sh}(2\beta l) + \sin(2\beta l)}{\text{sh}^2(\beta l) - \sin^2(\beta l)}; & f_{33} &= 2 \frac{\text{ch}(\beta l) \sin(\beta l) - \text{sh}(\beta l) \cos(\beta l)}{\text{sh}^2(\beta l) - \sin^2(\beta l)}; \\ f_{34} &= 4 \frac{\text{sh}(\beta l) \sin(\beta l)}{\text{sh}^2(\beta l) - \sin^2(\beta l)}; & f_{44} &= 4 \frac{\text{ch}(\beta l) \sin(\beta l) + \text{sh}(\beta l) \cos(\beta l)}{\text{sh}^2(\beta l) - \sin^2(\beta l)}, \end{aligned}$$

$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h_1^2}}$ ;  $m_0 = \frac{P_0}{2} a \frac{r_p}{R}$ ;  $D = \frac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость

оболочки;  $E$  и  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно;  $a = R - r_p$ ;  $h_1$  – толщина оболочки, м;  $I_1$  и  $I_3$  – геометрические

характеристики кольца;  $I_1 = h \ln \frac{r_2}{r_1}$ ;  $I_3 = \frac{h^3}{12} \ln \frac{r_2}{r_1}$ ;  $h$  – толщина кольца, м;

$$r_1 = R - h_2; \quad r_2 = R + \frac{h_1}{2}.$$

Из системы уравнений (5) находим  $Q_0$ ,  $M_0$ , далее напряжения и перемещения при осесимметричном нагружении.

Напряжения в оболочке

$$\sigma_{0\max}^{\text{об}} = \frac{6M_0}{h_1^2} \pm \frac{T_0}{h_1}. \quad (6)$$

Напряжения в кольце

$$\sigma_{0\max}^{\text{к}} = \frac{m_{x0}h/2}{I_3} + \frac{Q_0}{I_1}, \quad (7)$$

где  $m_{x0} = \frac{P_0}{2}a - M_0 + Q_0 \frac{h}{2}$ .

Максимальное перемещение в кольце (т.  $B$  на рис. 4)

$$f_B = \sqrt{u_B^2 + w_B^2}, \quad (8)$$

где

$$u_B = \vartheta_0 \frac{h_2}{2} = \frac{1}{EI_3} \left( \frac{p_0}{2} r_p^2 + M_0 R - Q_0 R \frac{h}{2} - T_0 R^2 \right) \frac{h_2}{2};$$

$$w_B = \frac{1}{EI_3} \left( \frac{p_0}{2} r_p^2 + M_0 R - Q_0 R \frac{h}{2} - T_0 R^2 \right) \frac{h}{2}.$$

**Неосесимметричная задача сопряжения короткой оболочки с кольцом.** Основная система получается путем расчленения конструкции по окружности сопряжения оболочки и кольца (см. рис. 5). Неизвестные силовые факторы на границе сопряжения оболочки и кольца:

$$\begin{aligned} T &= T_0 \cos i\varphi; \\ Q &= Q_0 \cos i\varphi; \\ M &= M_0 \cos i\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $T_0$ ,  $Q_0$ ,  $M_0$  – максимальные значения интенсивности внутренних силовых факторов в случае регулярного нагружения.

В основу решения этой задачи положена работа [4].

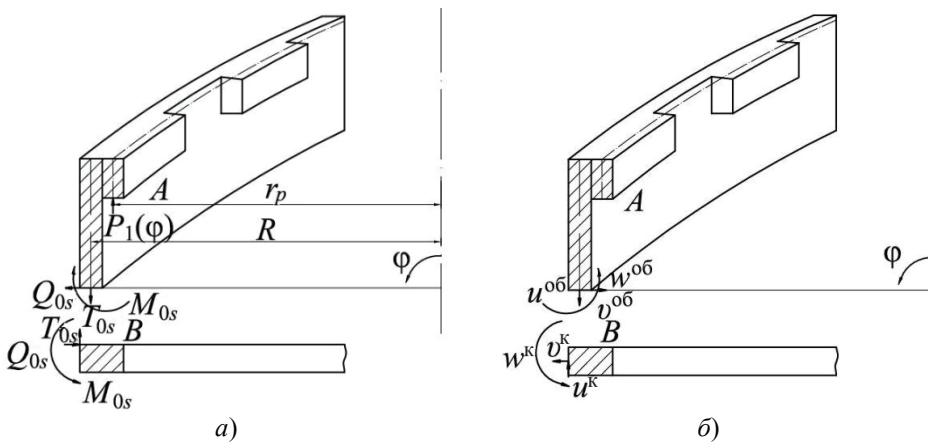


Рис. 5. Расчетная схема неосесимметричной задачи на границе сопряжения оболочки и кольца: а – силы взаимодействия; б – перемещения

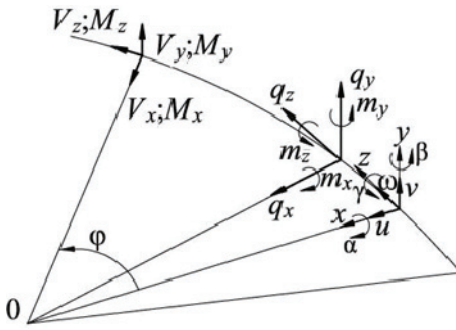


Рис. 6. Положительные направления усилий и перемещений в кольце

На рисунке 6 показаны внешние и внутренние силовые факторы, действующие на кольцо, а также положительные направления усилий и перемещений. Кольцо несет распределенную нагрузку в виде сил с интенсивностью  $q_x, q_y, q_z$ , а также моментную нагрузку интенсивностью  $m_x, m_y, m_z$ . Внутренние силовые факторы будут:  $V_x, V_y, V_z, M_x, M_y, M_z$ .

Условия совместности перемещений в соответствии с принятыми положительными направлениями для них (см. рис. 6) имеют вид:

$$\begin{aligned} \vartheta^{об} &= \vartheta^к; \\ u^{об} &= -u^к; \\ w^{об} &= -w^к. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (9) выражения для перемещений оболочки и кольца (10) запишем

$$\begin{aligned} & -\frac{R}{i^2} \left[ -\frac{Q_{0s}}{4D\beta^2} f_{12} - \frac{M_{0s}}{4D\beta} f_{22} + \frac{2p_0}{\pi} a \frac{(-1)^{s+1}}{4D\beta(2s-1)} f_{44} \right] = \\ & = -\frac{R^4 \left(1 + \frac{\lambda}{i^2}\right)}{EI_x (i^2 - 1)^2} T_{0s} + \frac{R^3 (1 + \lambda)}{EI_x (i^2 - 1)} M_{0s} - \frac{k_1}{2} \frac{R^3 (1 + \lambda)}{EI_x (i^2 - 1)} Q_{0s}; \\ & -\frac{Q_{0s}}{4D\beta^2} f_{12} - \frac{M_{0s}}{4D\beta} f_{22} + \frac{2p_0}{\pi} a \frac{(-1)^{s+1}}{4D\beta(2s-1)} f_{44} = \\ & = -\frac{R^3 (1 + \lambda)}{EI_x (i^2 - 1)^2} T_{0s} + (1 + \lambda i^2) \frac{R^2}{EI_x (i^2 - 1)^2} M_{0s} - \frac{k_1}{2} \frac{R^2 (1 + \lambda i^2)}{EI_x (i^2 - 1)^2} Q_{0s}; \\ & \frac{Q_{0s}}{4\beta^3 D} f_{11} + \frac{M_{0s}}{4D\beta^2} f_{12} - \frac{2p_0}{\pi} a \frac{(-1)^{s+1}}{4D\beta^2 (2s-1)} f_{34} - \mu \frac{2p_0}{\pi} \frac{r_p (-1)^{s+1}}{Eh_1 (2s-1)} = \\ & = -\left\{ \frac{k_1}{2} \frac{R^3 (1 + \lambda)}{EI_x (i^2 - 1)^2} T_{0s} - \frac{k_1}{2} \frac{R^2 (1 + \lambda i^2)}{E\lambda I_x (i^2 - 1)} M_{0s} + \frac{R^4}{EI_y (i^2 - 1)^2} \left[ 1 + \frac{k_1}{4R^2} \frac{I_y}{I_x} (1 + \lambda i^2) \right] Q_{0s} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\lambda = \frac{EI_x}{EI_k}$ ,  $T_{0s}, Q_{0s}, M_{0s}$  – составляющие внутренних сил взаимодействия  $s$ -й гармоники.

Решение системы уравнений (11) дает величины максимальных значений сил взаимодействия  $T_{0s}, Q_{0s}, M_{0s}$  в месте сопряжения оболочки

с кольцом. Далее определяются напряжения и перемещения при неосесимметричном нагружении.

Суммарные осевые и кольцевые напряжения в оболочке будут равны соответственно:

$$\sigma_x = \frac{T_x}{h_1} \pm \frac{6M_x}{h_1^2}; \quad (12)$$

$$\sigma_t = \frac{T_t}{h_1} \pm \frac{6M_t}{h_1^2}, \quad (13)$$

где

$$T_x = T_{x0} + \sum_{s=1}^{\infty} T_{xs} \cos i\varphi; \quad M_x = M_{x0} + \sum_{s=1}^{\infty} M_{xs} \cos i\varphi; \quad (14)$$

$$T_t = T_{t0} + \sum_{s=1}^{\infty} T_{ts} \cos i\varphi; \quad M_t = M_{t0} + \sum_{s=1}^{\infty} M_{ts} \cos i\varphi.$$

Суммарные нормальные и касательные напряжения в кольце определяются по следующим формулам:

$$\sigma_{z \max} = \left| \frac{V_z}{A} + \frac{M_y}{I_y} \frac{h}{2} + \frac{M_x}{I_x} \frac{k_2}{2} \right|; \quad (15)$$

$$\tau_{x \max} = \left| \frac{M_z}{\alpha h^3} + \frac{2}{3} \frac{V_y}{A} \right|,$$

где

$$V_z = V_{z0} + \sum_{s=1}^{\infty} V_z \cos i\varphi; \quad V_x = \sum_{s=1}^{\infty} V_{xs} \sin i\varphi; \quad V_y = \sum_{s=1}^{\infty} V_{ys} \sin i\varphi; \quad (16)$$

$$M_x = M_{x0} + \sum_{s=1}^{\infty} M_{xs} \cos i\varphi; \quad M_y = \sum_{s=1}^{\infty} M_{ys} \cos i\varphi; \quad M_z = \sum_{s=1}^{\infty} M_{zs} \sin i\varphi,$$

$V_{z0}, T_{x0}, T_{t0}, M_{x0}, M_{t0}$  – осесимметричные составляющие внутренних силовых факторов, определяемые по уравнениям (6) и (7). Неосесимметричные составляющие уравнений (16) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} V_{xs} &= -q_{xs} R \frac{i}{(i^2 - 1)}; \quad V_{ys} = -q_{ys} \frac{R}{i}; \quad V_{zs} = q_{xs} \frac{R}{(i^2 - 1)}; \\ M_{xs} &= -\frac{1}{(i^2 - 1)} (m_{zs} R - q_{ys} R^2); \quad M_{ys} = -q_{xs} \frac{R^2}{i^2 - 1}; \\ M_{zs} &= -\frac{1}{i(i^2 - 1)} (m_{zs} R - q_{ys} R^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Максимальное перемещение зуба в т.  $A$  (см. рис. 5) байонетного затвора определяется по формуле

$$f_{A \max} = \sqrt{u_A^2 + w_A^2}, \quad (18)$$

где  $u_A, w_A$  – осевое и радиальное перемещения конца зуба в т.  $A$  соответственно,

$$u_A = u_A^o + u_A^H; \quad (19)$$

$$w_A = w_A^o + w_A^H,$$

где  $u_A^o, w_A^o$  – осесимметричные составляющие перемещения конца зуба;  $u_A^H, w_A^H$  – неосесимметричные составляющие перемещения конца зуба, определяемые по формулам:

$$w_A^o = \frac{m_0}{4D\beta^2} f_{12} - \frac{M_0}{4D\beta^2} f_{34} - \frac{Q_0}{4D\beta^3} f_{33} - \mu \frac{T_0 R}{Eh_1};$$

$$u_A^o = \vartheta_A^o \frac{h_2}{2} = \left( -\frac{m_0}{4D\beta} f_{22} + \frac{M_0}{4D\beta} f_{44} + \frac{Q_0}{4D\beta^2} f_{34} \right) \frac{h_2}{2};$$

$$w_A^H = \frac{2p_0}{\pi} \frac{r_p}{R} a \frac{(-1)^{s+1}}{4D\beta^2 (2s-1)} f_{12} - \frac{M_{0s}}{4D\beta^2} f_{34} - \frac{Q_{0s}}{4D\beta^3} f_{33} - \mu \frac{2p_0}{\pi} \frac{r_p}{h_1} \frac{(-1)^{s+1}}{(2s-1)};$$

$$u_A^H = \vartheta_A^H \frac{h_2}{2} = \left( -\frac{2p_0}{\pi} \frac{r_p}{R} a \frac{(-1)^{s+1}}{4D\beta (2s-1)} f_{22} + \frac{M_{0s}}{4D\beta} f_{44} + \frac{Q_{0s}}{4D\beta^2} f_{34} \right) \frac{h_2}{2}, \quad (20)$$

$s = 1, 2, 3, \dots$

Ряды для  $u_A^H$  и  $w_A^H$  имеют хорошую сходимость и при расчете можно обойтись одним членом ряда ( $s = 1$ ).

Таким образом, предложены расчетная схема и методы расчета на прочность и жесткость байонетного затвора, представляющего собой короткую цилиндрическую оболочку, на одной стороне которой имеется кольцо, а на другой – зубья, при нагружении регулярной нагрузкой. Приведенная методика расчета байонетного затвора позволила оценить напряженно-деформированное состояние конструкции при регулярном нагружении и показать, что напряжения и перемещения при таком нагружении могут значительно отличаться от расчетов, полученных при осесимметричном нагружении [5].

#### Список литературы

1. Пат. 2496560 Российская Федерация, МПК В01D 61/18. Баромембранный аппарат комбинированного типа / Кочетов В. И., Лазарев С. И., Попов В. Ю. ; патентообладатель ФГБОУ ВПО «Тамб. гос. техн. ун-т». – № 2012114024/05 ; заявл. 10.04.2012 ; опубл. 27.10.2013, Бюл. № 30. – 10 с.
2. Кочетов, В. И. Расчет аппарата комбинированного типа для очистки промышленных растворов методом ультрафильтрации / В. И. Кочетов, С. И. Лазарев., В. Ю. Богомолов // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2014. – № 11. – С. 11 – 14.
3. Бояршинов, С. В. Основы строительной механики машин / С. В. Бояршинов. – М. : Машиностроение, 1977. – 457 с.
4. Прочность, устойчивость, колебания : справочник. В 3 т. Т. 1 / под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1988. – 415 с.
5. Духовный, А. Н. К исследованию напряженного состояния байонетного затвора / А. Н. Духовный, И. И. Тарасов, И. К. Сбродов // Тр. ВНИИРТмаша. – Тамбов, 1970. – Вып. 4. – С. 11 – 14.



## References

1. Kochetov V.I., Lazarev S.I., Popov V.Yu., Tambov State Technical University, *Baromembrannyyi apparat kombinirovannogo tipa* (Baromembranes unit combined type), Russian Federation, 2013, Pat. 2496560.
2. Kochetov V.I., Lazarev S.I., Bogomolov V.Yu. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2015, vol. 50, no. 11-12, DOI: 10.1007/s10556-015-9964-8.
3. Boyarshinov S.V. *Osnovy stroitel'noi mekhaniki mashin* (Basics of structural mechanics machines), Moscow: Mashinostroenie, 1977, 457 p.
4. Birgera I.A., Panovko Ya.G. (Eds.) *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya: spravochnik* (Strength, stability, oscillations: a handbook), vol. 1 of 3, Moscow: Mashinostroenie, 1988, 415 p.
5. Dukhovnyi A.N., Tarasov I.I., Sbrodov I.K. *Trudy VNIIRTMasha* (Proceedings of VNIIRTMash), Tambov, 1970, issue 4, pp. 11-14.

---

### Calculation of Elements of Membrane Unit for Treatment of Industrial Solutions and Wastewaters by Ultrafiltration Method

V. Yu. Bogomolov, V. I. Kochetov, S. I. Lazarev

*Tambov State Technical University, Tambov*

**Keywords:** bayonet; effort; membrane apparatus.

**Abstract:** The authors proposed the calculation scheme and method of calculating the strength and rigidity of bayonet. A bayonet is a short thin cylindrical shell with a ring at one end and teeth at the other. A bayonet is loaded with a regular load at the side of teeth.

---

© В. Ю. Богомолов, В. И. Кочетов, С. И. Лазарев, 2015