УДК 519.7
DOI: 10.17277/voprosy.2015.02.pp.157-169

К ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Н. С. Попов, Чан Минь Тьинь

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент д-р техн. наук, профессор В. Н. Шамкин

Ключевые слова: динамическое программирование; параметрическая идентификация; природо-промышленные системы; поиск коэффициентов; регуляризация; структурная сложность.

Аннотация: Формализована задача параметризации моделей систем с иерархической структурой соединения компонент. Представлен способ задания локально-оптимального критерия оптимизации, согласно которому могут быть найдены параметры моделей отдельных подсистем, и глобально-оптимального для параметров модели всей системы. Рассмотрены два варианта задачи параметрической идентификации – для статических детерминированных и вероятностных систем и случай регуляризации задачи идентификации. В качестве основного метода решения задачи параметризации моделей систем со сложной структурой предложено использовать метод динамического программирования Р. Беллмана.

Математическое моделирование – процесс переноса имеющихся у исследователей знаний и фактов об изучаемых явлениях и процессах в компактную математическую форму – модель, «откалиброванную» под интересуемый объект с помощью специально разработанных процедур. Одной из них является процедура идентификации, состоящая в определении наиболее существенных переменных и связей между ними, с последующей их параметризацией – определением значений всех коэффициентов, входящих в состав математических выражений модели.

Исследование стандартных приемов работы с моделью снимает множество вопросов, возникающих в процессе моделирования, кроме тех, ко-

Попов Николай Сергеевич − доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Природопользование и защита окружающей среды», e-mail: post@nnn.tstu.ru; Чан Минь Тьинь – аспирант кафедры «Природопользование и защита окружающей среды», ТамбГТУ, г. Тамбов.

торые связаны исключительно со спецификой самих объектов исследования – их размерностью, нелинейностью, запаздываниями, неопределенностью поведения, отсутствием информации и другими обстоятельствами, ведущими к усложнению процедур построения модели. К таким объектам относится, например, класс природо-промышленных систем (**ППС**), в общем характеризуемых как сложные [1].

Понятие сложности двойственное [2]. Оно может быть отнесено и к структуре (связности) системы, и к характеру ее поведения во времени (динамической сложности). Рассмотрим структурную сложность системы, характеризуемую двумя свойствами:

– математической структурой несжимаемых компонент (подсистем);

– способом, которым эти компоненты связаны между собой.

Первое позволяет снизить сложность системы посредством объединения отдельных переменных состояния в подсистемы, упрощая при этом ее понимание при моделировании, второе отражает размерность подсистем, их иерархию, длину связей, типы связующих переменных и другую информацию, полезную на этапе концептуализации модели.

Представим три возможных типа (варианта) структурной организации ППС:

1) система распадается на K независимых подсистем (моделей) меньшей размерности переменных состояния и параметров (коэффициентов) (рис. 1, *а*);

2) система компонуется из некоторого числа K иерархически упорядоченных подсистем (рис. 1, *б*);

3) для данного типа характерна полная связность системы, резко усложняющая процедуру параметрической идентификации (рис. 1, *в*).

По мнению специалистов [2], именно системы с иерархической организацией относятся к числу сложных.

Классическая задача теории идентификации связана с выбором наилучшей для данной системы структуры математической модели и ее параметров (из определенного класса моделей) по результатам измерения входных и выходных переменных.

В большинстве практических задач, опубликованных в отечественной и зарубежной литературе, идентификация модели систем со сложной структурой решалась по подсистемам. Формальное объединение моделей

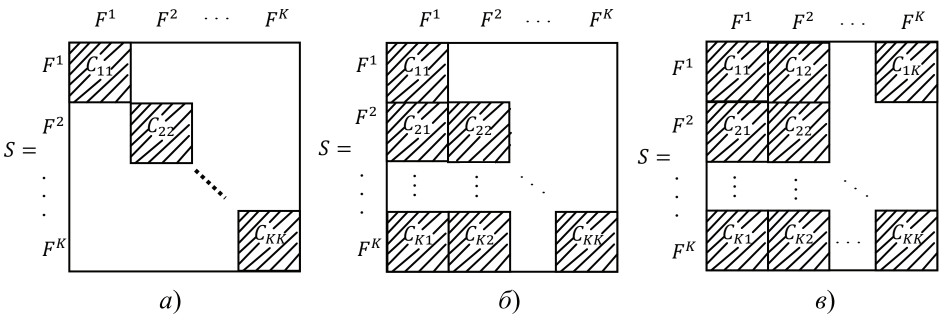

Рис. 1. Результаты структурного анализа системы *S*:
F^i, C_{ij} – соответственно векторы переменных состояния подсистемы S_{ij} и матрицы бинарных отношений между ними, $i, j = \overline{1, K}$

подсистем в единое целое, на основе подсистемных связей, означало завершение процесса построения модели. При этом игнорировался тот факт, что подсистемы являются лишь элементами моделируемой системы. Вместе с тем совпадение процессов в отдельно взятом элементе и его модели вовсе не гарантирует того, что полученная в результате такого объединения модель всей системы будет отражать процессы, происходящие в действительности. Известны примеры удовлетворительной работы моделей систем, состоящих из моделей элементов недостаточно хорошо описывающих реальные процессы [3].

Задачам параметрической идентификации моделей сложных статических систем посвящено мало работ. В одной из основополагающих методология решения ограничена частным случаем структурной организации систем с последовательным соединением звеньев и наличием управляющих воздействий только на нижнем иерархическом уровне [4]. В связи с актуальностью структурного варианта 2 для ППС (см. рис. 1, *б*), в данной работе интерес представляет дальнейшее развитие теории и методов идентификации моделей систем со сложной структурой и вероятностным характером их поведения.

Пусть система на рис. 2 соответствует структурному варианту 2 (см. рис. 1, *б*) и имеет смешанную схему соединения подсистем. Она обладает достаточной общностью и в принципе удовлетворяет требованиям структурной сложности любой реальной ППС. Основные требования, положенные в основу схемы рис. 2, сводятся к следующему:

1) подсистемы нижнего уровня взаимодействуют только с подсистемами верхних уровней через свои выходы;

2) управляющие воздействия допустимы для всех подсистем любого уровня их иерархии;

3) подсистемы одного уровня иерархии не связаны друг с другом;

4) все обратные связи – петли и контуры находятся внутри подсистем.

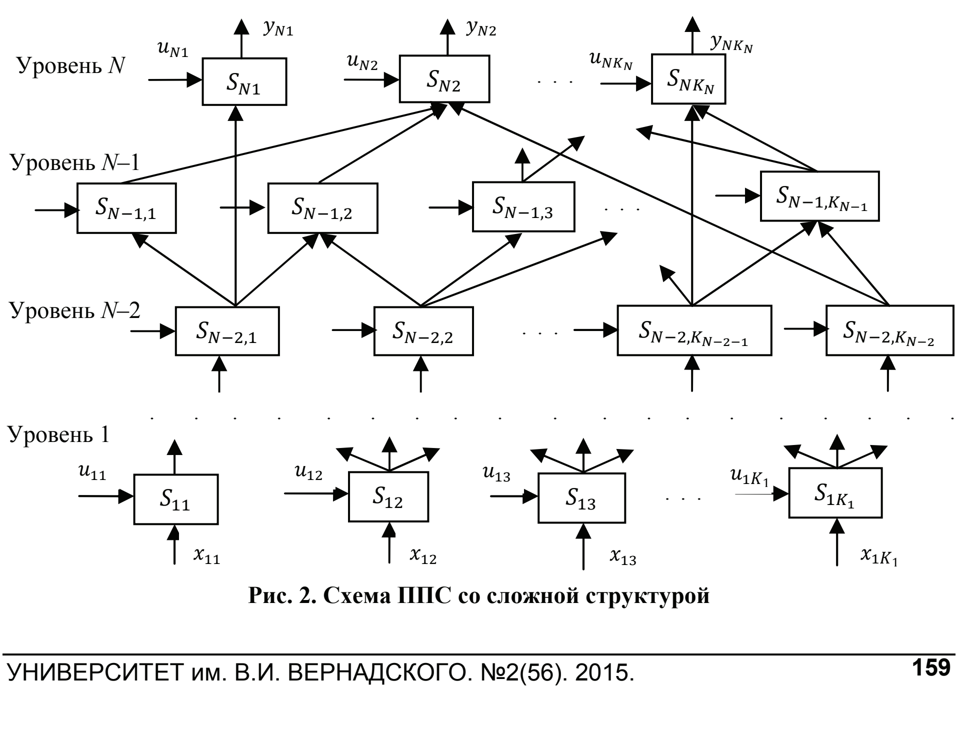

Рис. 2. Схема ППС со сложной структурой

С помощью S_{ij} обозначим j-ю подсистему i-го уровня: $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,K_i}$, а X_{ij}, U_{ij} и Y_{ij} – соответственно множества входных, управляющих и выходных переменных всех подсистем S_{ij}. Тогда x_{ij}, u_{ij} и y_{ij} – соответственно векторы входных, управляющих и выходных переменных подсистемы S_{ij}. Будем считать, что $x_{11},...,x_{1K_1}$ и u_{ij} задаются в реальной системе эксперимента согласно диапазонам их допустимых значений, а переменные y_{ij} измеряются на выходе каждой S_{ij}.

С учетом принятых обозначений требования 1 и 2 формализуем следующим образом:

$$X_{ij}=\times\left\{X_{ij}^{nl}\colon 1\le n<i,\ l=\overline{1,K_n}\right\},\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,K_i};$$
$$Y_{ij}=\times\left\{Y_{ij}^{rs}\colon 1<r\le N,\ s=\overline{1,K_r}\right\},\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,K_i}; \quad (1)$$

$$U_{ij}=\times\left\{u_{ij}\colon j=\overline{1,K_i}\right\}; \quad (2)$$

где X_{ij}^{nl} – множество значений входных переменных S_{ij}, являющихся выходами S_{nl}; Y_{ij}^{rs} – множество значений выходных переменных S_{ij}, являющихся входами S_{ij}; $\times$ – знак декартова произведения.

Требования 3 и 4 для любой пары подсистем S_{ij} и S_{il} одного уровня иерархии формализуем в виде

$$\forall j\ne l\colon\ X_{ij}\cap Y_{il}=\varnothing,\quad i=\overline{1,N}. \quad (3)$$

Считаем, что

$$X_{ij}^{nl}\cap X_{ij}^{rm}=\varnothing,\quad (n,l)\ne(r,m). \quad (4)$$

Пусть M_{ij} означает статическую модель подсистемы S_{ij} и все взаимодействия между моделями сохраняются теми же самыми, что и между подсистемами в ППС. Тогда интересуемый класс моделей подсистем обозначим с помощью функции $\Phi_{ij}(a_{ij})$:

$$\Phi_{ij}(a_{ij})\colon \tilde{X}_{ij}\times\tilde{U}_{ij}\to\tilde{Y}_{ij}\qquad\text{или}\qquad \tilde{y}_{ij}=\Phi_{ij}(a_{ij})(\tilde{x}_{ij},\tilde{u}_{ij}), \quad (5)$$

где $\tilde{X}_{ij}$, $\tilde{U}_{ij}$, $\tilde{Y}_{ij}$ – соответственно множества значений входных, управляющих и выходных переменных модели; $a_{ij}\in A_{ij}$ – вектор искомых параметров модели M_{ij} из допустимого множества значений A_{ij}. Пусть $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{u}_{ij}$, $\tilde{y}_{ij}$ означают соответственно векторы входных, управляющих и выходных переменных модели M_{ij}.

Отождествляя схему соединения подсистем в ППС со структурой связи ее модели на основе (1) – (4) можно записать:

$$\tilde{X}_{ij}=\times\left\{\tilde{X}_{ij}^{nl}\colon 1\le n<i,\ l=\overline{1,K_n}\right\},\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,K_i},$$

$$\tilde{Y}_{ij} = \times\left\{\tilde{Y}_{ij}^{rs}\colon 1 < r \le i,\ s = \overline{1, K_r}\right\},\ i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, K_i},$$

$$\tilde{U}_{ij} = \times\left\{u_{ij}\colon j = \overline{1, K_i}\right\}, \forall\, j \ne l\colon\ \tilde{X}_{ij} \cap \tilde{Y}_{ij},\ i = \overline{1, N},$$

$$\tilde{X}_{ij}^{nl} \cap \tilde{X}_{ij}^{rm} = \varnothing,\ \text{если}\ (n, l) \ne (r, m), \tag{6}$$

где $\tilde{X}_{ij}^{nl}$ – множество значений входных переменных M_{ij}, являющихся выходами M_{nl}; $\tilde{Y}_{ij}^{rs}$ – множество значений выходных переменных M_{ij}, являющихся входами M_{rs}.

Для получения необходимой информации о параметрах a_{ij} модели M_{ij} необходимо поставить эксперимент. Пусть u_{ijl} означает величину управляющего воздействия в l-м эксперименте, $l = \overline{1, L}$, где L – число возможных режимов работы ППС, и пусть y_{ijl} – реакция подсистемы S_{ij} на это воздействие. Тогда, матрицы результатов экспериментов

$$\begin{gathered} U_{ijl} \triangleq (u_{ij1}, u_{ij2}, \ldots, u_{ijL}), \quad Y_{ijl} \triangleq (y_{ij1}, y_{ij2}, \ldots, y_{ijL}), \\ X_{1jl} \equiv \tilde{Y}_{0jL} \triangleq (x_{ij1}, x_{ij2}, \ldots, x_{ijL}), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, K_i} \end{gathered} \tag{7}$$

дают необходимую информацию о моделируемых подсистемах.

В качестве локальной оценки «близости» выходных переменных модели M_{ij} к экспериментальным данным используем критерий вида

$$r_{ij} = \sum_{l=1}^{L} \left\| y_{ijl} - \tilde{y}_{ijl} \right\|^{p}, \tag{8}$$

где $\tilde{y}_{ijl} = \Phi_{ij}(a_{ij})(\tilde{x}_{ijl}, \tilde{u}_{ijl})$; а p – порядок нормы. Если ошибки измерения $\tilde{x}_{ijl}$ и задания $\tilde{u}_{ijl}$ отфильтрованы, тогда $\tilde{x}_{ijl}$ и $\tilde{u}_{ijl}$ тождественны x_{ijl} и u_{ijl}.

Пусть a_{ij}^{*} означает вектор параметров модели M_{ij}, при котором величина r_{ij} минимальна. Модель M_{ij} называется локально оптимальной для r_{ij} и нормы $\|\cdot\|$, если $a_{ij} = a_{ij}^{*}$ [5]. При построении локально оптимальных моделей подсистем не учитываются их связи с другими подсистемами. Поэтому, в результате объединения M_{ij} в единое целое погрешности этих моделей распространяются по схеме и возрастают на выходе иногда до такого уровня, при котором агрегированная модель уже становится неадекватной физической системе. В качестве глобальной оценки точности модели ППС со сложной структурой примем критерий вида

$$R = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K_i} \gamma_{ij} \sum_{l=1}^{L} \left\| y_{ijl} - \tilde{y}_{ijl} \right\|^{p}, \tag{9}$$

где $\tilde{y}_{ijl} = \Phi_{ij}(a_{ij})(\tilde{x}_{ijl}, u_{ijl})$; γ_{ij} – весовые коэффициенты.

В данном случае входные переменные $\tilde{x}_{ijl}$ моделей M_{ij} уже не измеряются, а вычисляются для конкретных значений u_{ijl}, действующих в системе. При этом учитывается естественная структура связей моделируемой системы.

Согласно [6] глобальной идентификацией назовем задачу определения векторов оптимальных параметров a_{ij}^* моделей M_{ij}, при которых достигает минимума критерий

$$R = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K_i}\gamma_{ij}\sum_{l=1}^{L}\left\| y_{ijl} - \Phi_{ij}(a_{ij})(\tilde{x}_{ijl}, u_{ijl})\right\|^p. \tag{10}$$

Модель ППС, в которой $a_{ij} = a_{ij}^*$ для всех моделей подсистем M_{ij} найденных по критерию (10) называется глобально оптимальной.

Частная форма критерия (10) зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$. Пусть y – вектор в E^K, а y^i – его элементы $i=\overline{1,k}$. Если для любого y и его y^i $(j=\overline{1, K_i})$ справедливо $\|y\|^p = \sum_{i=1}^{k}\|y^i\|^p$, тогда норма $\|\cdot\|$ будет названа декомпозируемой в p-й степени.

Норма $\|\cdot\|$ декомпозируема в p-й степени в том случае, когда

$$\| y \| = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left[f(y^i) \right]^p \right\}^{1/p},$$

где y^i – i-я составляющая вектора y; а f – функция, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ f(C) \ge 0, f(C) = 0 \leftrightarrow C = 0;\\ &2)\ f(\alpha C) = |\alpha|\, f(C);\\ &3)\ f(C_1 + C_2) \le f(C_1) + f(C_2). \end{aligned} \tag{11}$$

В частности евклидова норма $\| y \| = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left[f(y^i) \right]^2 \right\}^{1/2}$ декомпозируема во 2-й степени. С учетом выполнения условий (11) для ППС, критерий (10) запишем в виде

$$R = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K_i}\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{m_{ij}}\gamma_{ijt}\left\| \frac{y_{ijlt} - \Phi_{ijt}(a_{ij})(\tilde{y}_{i-1,\,jlt}, u_{ijlt})}{y_{ijlt}} \right\|^p, \tag{12}$$

где m_{ij} – число компонент вектора выходных переменных подсистемы S_{ij}.

Выбор метода решения задачи глобальной идентификации может быть связан со следующими специфическими особенностями структуры модели ППС:

– дискретной распределенностью подсистем модели в «пространстве»;

– относительной независимостью каждой из подсистемных моделей (вектор выходных переменных $\tilde{y}_{ij}$, модели M_{ij} зависит только от вектора ее входных переменных $\tilde{x}_{ij}$, управляющих воздействий u_{ij} и параметров a_{ij}).

С учетом (11), глобальный критерий (12) представляет собой аддитивную функцию критериев индивидуальных подсистем каждого уровня иерархии. Указанные особенности рассматриваемой задачи наилучшим образом реализуются в методе динамического программирования Р. Беллмана [7], гарантирующего нахождение абсолютного минимума критерия (12).

Решение задачи глобальной идентификации модели детерминированной системы характеризуется тем, что значения входных, управляющих и выходных переменных каждой из ее индивидуальных подсистем известны точно. Для вероятностных ППС решение данной задачи существенно усложняется, поскольку результат каждого преобразования входов и управлений в выходные переменные точно не известен. Чтобы принять решение о выборе оптимальных параметров моделей подсистем, требуется определить значения переменных состояния из выборочных наблюдений, содержащих ошибки. Иначе говоря, последовательность решения задачи глобальной идентификации моделей вероятностных ППС, основанная на методе динамического программирования, является процессом с обратной связью.

Символом M_{ij} обозначим j-ю вероятностную статическую модель i-го уровня иерархии в ППС, определяемую соотношением

$$\tilde{z}_{ij} = \hat{\Phi}_{ij}(a_{ij})(\tilde{y}_{i-1,j}, u_{ij}), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, K_i}. \tag{13}$$

Оператор $\hat{\Phi}_{ij}(a_{ij})$ преобразует известные векторы переменных состояния $\tilde{y}_{i-1,j}$ и управлений u_{ij} в случайный вектор с совместной функцией распределения $dG_{ij}(\tilde{y}_{i-1,j}, \tilde{z}_{ij}, u_{ij}, a_{ij})$. Следовательно, в результате использования схемы динамического программирования вектор выходных переменных y_{ij} вероятностной модели M_{ij} преобразуется в случайный вектор $z_{i-1,j}$, между тем как принятие решения о векторе параметров $a_{i-1,j}$ нуждается в точном значении вектора переменных состояния $y_{i-1,j}$. Последовательность преобразований в случае вероятностного оператора $\hat{\Phi}_{ij}(a_{ij})$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\tilde{z}_{N-1,j} = \hat{\Phi}_{N,j}^{-1}(a_{N,j})(\tilde{y}_{N,j}, u_{N,j});\\
&\tilde{z}_{N-2,j} = \hat{\Phi}_{N-1,j}^{-1}(a_{N-1,j})(\tilde{y}_{N-1,j}, u_{N-1,j});\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\tilde{z}_{1,j} = \hat{\Phi}_{1,j}^{-1}(a_{1,j})(\tilde{x}_{0j}, u_{1,j}),
\end{aligned} \tag{14}$$

где обратный оператор $\hat{\Phi}_{1,j}^{-1}\left(a_{1,j}\right)$ характеризует j-ю подсистему нижнего уровня иерархии ППС, а $\hat{\Phi}_{N,j}^{-1}\left(a_{N,j}\right)$ – верхнего.

Соотношения (14) показывают, что для вероятностных моделей подсистем с помощью обратной подстановки невозможно получить конечное состояние процессов в виде функции начального, то есть результаты преобразований можно узнать лишь непосредственным наблюдением за переменными состояния подсистем.

Итак, если оператор $\Phi_{ij}(a_{ij})$ случайный, тогда и вход z_{ij} является случайным, а в силу этого и критерий глобальной идентификации также становится случайным. Сознавая множество причин возникновения неопределенностей в реальной системе, организуем сглаживание случайного поведения ППС и ее модели с помощью некоторой процедуры усреднения. Для этого воспользуемся понятием математического ожидания и в рассматриваемой задаче будем минимизировать критерий следующего вида

$$R = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K_i} E\left\{ \sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{m_{ij}} \left\| \frac{y_{ijlt} - \tilde{y}_{ijlt}}{y_{ijlt}} \right\|^p \right\}, \tag{15}$$

где $E\{\cdot\}$ означает математическое ожидание выражения в фигурных скобках.

Значение $y_{ijlt} = z_{ijlt}$ в (15) является одной из возможных случайных реализаций t-й компоненты вектора выходных переменных подсистемы S_{ij}, полученной в l-м режиме функционирования ППС. При осуществлении этого режима на входе S_{ij} действуют переменные $\underline{y}_{i-1,j}$ и $\underline{u}_{ij}$. Тогда $\tilde{y}_{ijlt}$ следует рассматривать как одну из возможных случайных реализаций t-й компоненты вектора выходных переменных $\tilde{z}_{ij}$ модели (13), при условии подстановки в нее значений $\tilde{\underline{y}}_{i-1,j} \equiv \underline{y}_{i-1,j}$, управлений $\underline{u}_{ij}$ и вектора параметров $a_{ij} \in A_{ij}$.

Учитывая ограниченность набора экспериментальных данных, вместо математического ожидания будем использовать понятие среднего значения. В этом случае критерий (15) примет вид

$$R = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K_i} \left[\frac{1}{\theta} \sum_{\nu=1}^{\theta} \sum_{l=1}^{L} \sum_{t=1}^{m_{ij}} \gamma_{ijt} \left\| \frac{y_{ij\nu lt} - \tilde{y}_{ij\nu lt}}{y_{ij\nu lt}} \right\|^p \right], \tag{16}$$

где θ – число повторно выполненных экспериментов для l-го режима функционирования ППС.

Постановку задачи глобальной идентификации модели вероятностной ППС формализуем следующим образом.

Дано: критерий глобальной идентификации (16) и модели подсистем типа (14).

Требуется: для заданной схемы 2 соединений подсистем в ППС (см. рис. 1, *б*) определить такие векторы параметров модели $a_{11}^*, \ldots, a_{NK_N}^*$. при которых достигает минимума критерий (16) и выполняются условия: $a_{ij} \in A_{ij},\ i = \overline{1,N}, j = \overline{1,K_i}$.

Для решения используем следующие обозначения:

$$\frac{1}{\theta}\sum_{\nu=1}^{\theta}\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{m_{ij}}\gamma_{ijt}\left\|\frac{y_{ij\nu lt}-\tilde{y}_{ij\nu lt}}{y_{ij\nu lt}}\right\|^{p} \triangleq r_{ij}\left(\underline{y}_{ij},\ \underline{\tilde{y}}_{i-1,j},\ \underline{u}_{ij},\ a_{ij}\right),$$

где

$$\underline{y}_{ij} \triangleq \left(y_{ij111},\ \ldots,\ y_{ij\theta Lm_{ij}}\right),\qquad \underline{\tilde{y}}_{i-1,j} \triangleq \left(\tilde{y}_{i-1,j111},\ \ldots,\ \tilde{y}_{i-1,j\theta Lm_{i-1,j}}\right),$$

$$\underline{u}_{ij} \triangleq \left(u_{ij111},\ldots,\ u_{ij\theta Lm_{ij}}\right).$$

Поскольку в рассматриваемой задаче глобальной идентификации сохраняются все те особенности, которые наилучшим образом реализуются в методе динамического программирования, именно этот метод и целесообразно использовать для вычисления значений $a_{11}^{*},\ldots,a_{NK_N}^{*}$. Принципы использования экспериментальной и расчетной информации для вычисления r_{ij} продемонстрированы на рис. 3.

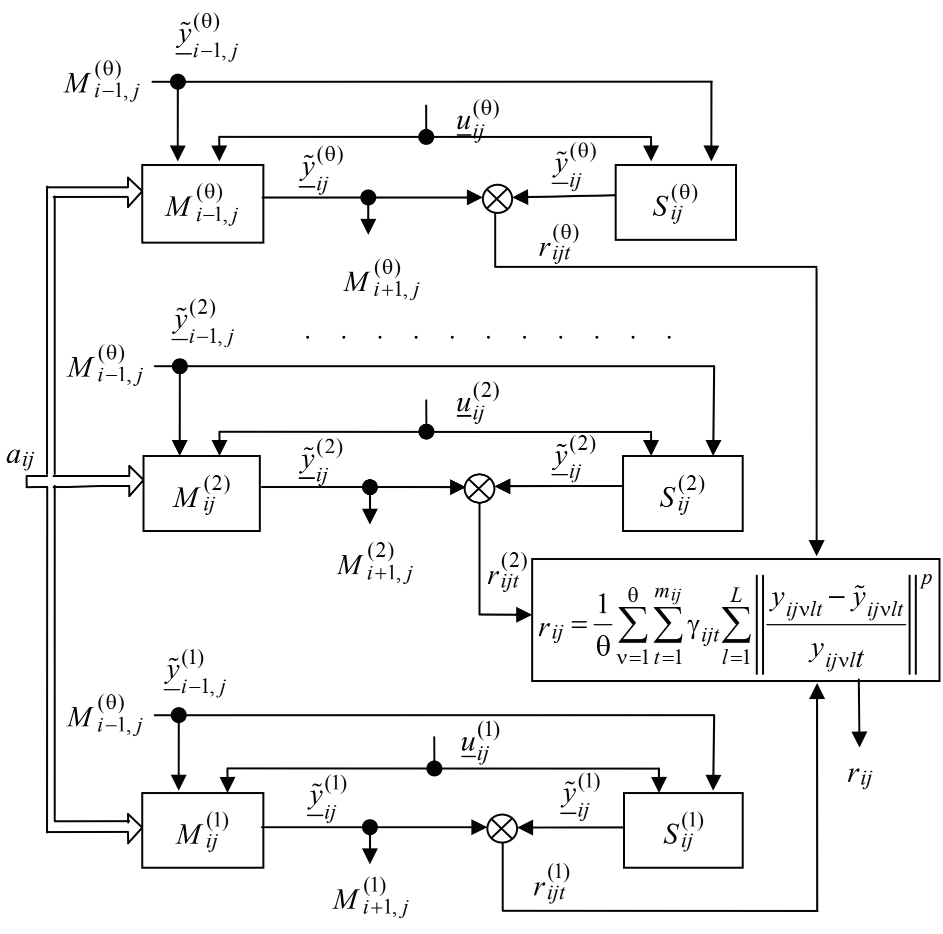

Рис. 3. Фрагмент схемы сбора и обработки информации в задаче глобальной идентификации вероятностной модели ППС

Проблема корректности поставленной задачи (и в частности установление единственности ее решения) относится к числу ключевых проблем моделирования ППС. Смысл ее состоит в том, что значения параметров модели могут иметь самостоятельную ценность, если они объективно отражают закономерности реальных процессов, и использоваться в моделях других систем аналогичного типа, при выполнении различного рода расчетов и т.д. Заметим, что надежность прогнозов по модели значительно повышается в тех случаях, когда ее параметры соответствуют действительным значениям.

Постановка задачи глобальной идентификации по критерию (10) некорректна, так как для нее не выполняется условие единственности по Адамару, что объясняется не строгой выпуклостью критерия (10). Однако, как показано в работах [8, 9], существует возможность регуляризации некорректно поставленной задачи идентификации в корректно поставленную, если заменить выпуклый критерий на равномерно выпуклый. Требования, при которых задача минимизации будет поставлена корректно, сформулированы в виде следующей теоремы [9]. Пусть $R(a)$ – непрерывный (полунепрерывный снизу) равномерно выпуклый функционал, определенный на ограниченном замкнутом и выпуклом множестве A из полного пространства H. Тогда, вариационная задача минимизации $R(a)$ на A будет поставлена корректно.

Итак, запишем модель j-й подсистемы i-го уровня иерархии в форме

$$\begin{gathered}\tilde{y}_{ijlt} = \Phi_{ij}(a_{ij})\left(\tilde{y}_{i-1,jlt}, u_{ijlt}\right),\\ i=\overline{1,N},\quad j=\overline{1,K_i},\quad l=\overline{1,L},\quad t=\overline{1,m_{ij}},\end{gathered} \tag{17}$$

где $\tilde{y}_{ijlt}$ – значение t-й компоненты вектора выходных переменных, рассчитанное для l-го режима функционирования ППС; $\tilde{y}_{i-1,jlt}$ и u_{ijlt} – соответственно входные и управляющие воздействия; a_{ij} – искомые параметры модели M_{ij}.

И пусть критерий глобальной идентификации выглядит следующим образом

$$R(a) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K_i}\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{m_{ij}}\gamma_{ijt}\left\|\frac{y_{ijlt} - \Phi_{ijt}(a_{ij})\left(\tilde{y}_{i-1,jlt}, u_{ijlt}\right)}{y_{ijlt}}\right\|^2. \tag{18}$$

Поскольку $\tilde{y}_{ijlt}$ и $\tilde{y}_{i-1,jlt}$ содержат систематические ошибки численного решения системы нелинейных уравнений модели M_{ij}, а y_{ijlt} – случайные погрешности измерений, критерий (18) назовем «возмущенным», относительно «невозмущенного» критерия $R(a)$, в котором переменные y_{ijlt}, $\tilde{y}_{ijlt}$ и $\tilde{y}_{i-1,jlt}$ заданы точно.

Для регуляризации решения задачи минимизации (18) построим новый неотрицательный критерий вида

$$Q(a) = R(a) + \alpha\Omega(a), \tag{19}$$

в котором вспомогательная функция Ω выбрана таким образом, что при $\alpha > 0$ $Q(a)$ становится равномерно выпуклым.

Поскольку $R(a)$ является выпуклым критерием, в качестве Ω примем равномерно выпуклую функцию и тогда устремив $\alpha \to \infty$, можно сделать $Q(a)$ также равномерно выпуклым. В данном случае зададим Ω в виде

$$\Omega(a) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K_i}\left\| a_{ij} - \overline{a}_{ij} \right\|_{E^{NK_i}},$$

где E^{NK_i} – евклидово пространство размерности N_{K_i}, а $\overline{a}_{ij}$ – некоторая оценка истинных значений параметров модели, характерных для «невозмущенной» задачи.

С учетом этого критерий (18) запишем в форме

$$Q(a) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K_i}\left[\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{m_{ij}} \gamma_{ijt} \left\| \frac{y_{ijlt} - \Phi_{ijt}(a_{ij})\left(\tilde{y}_{i-1,jlt}, u_{ijlt}\right)}{y_{ijlt}} \right\|^2 + \alpha \left\| a_{ij} - \overline{a}_{ij} \right\|^2 \right]. \tag{20}$$

Поскольку параметр α приходится искать для каждой модели M_{ij}, обозначим его через α_{ij}. Значение α_{ij} будем выбирать с таким расчетом, чтобы $Q(a)$ оставался равномерно выпуклым, а систематическая погрешность $\left\| a_{ij}^0 - \overline{a}_{ij} \right\|$ была бы минимальной. Здесь a_{ij}^0 – искомые параметры модели M_{ij}, получаемые в результате минимизации выражения в квадратных скобках, входящего в критерий (20).

В результате процесса минимизации выражение в квадратных скобках принимает вид

$$r_{ij}(a_{ij}^0, a_{ij}) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{m_{ij}} \gamma_{ijt} \left\| \frac{y_{ijlt} - \Phi_{ijt}(a_{ij}^0)\left(\tilde{y}_{i-1,jlt}, u_{ijlt}\right)}{y_{ijlt}} \right\|^2 + \alpha \left\| a_{ij}^0 - \overline{a}_{ij} \right\|^2 \tag{21}$$

и в сущности является функцией одной переменной α_{ij}, поскольку $a_{ij}^0 = a_{ij}^0(\alpha_{ij})$.

Предположим, что погрешность нахождения $\tilde{y}_{ijlt}(a_{ij})$ численным методом пренебрежимо мала. Тогда в качестве оптимального значения выберем такое наименьшее положительное число a_{ij}^0, при котором функция

$$\Psi(a_{ij}^0) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{m_{ij}} \gamma_{ijt} \left\| \frac{y_{ijlt} - \Phi_{ijt}\left(a_{ij}^0\right)\left(\tilde{y}_{i-1,jlt}, u_{ijlt}\right)}{y_{ijlt}} \right\|^2 - L\sum_{t=1}^{m_{ij}} \hat{\sigma}_t^2 \tag{22}$$

наименее отлична от нуля, причем $a_{ij} \in A_{ij} \subset E^{NK_i}$.

Здесь $\hat{\sigma}_t^2$ – оценка дисперсии случайной помехи измерения t-й компоненты выходной переменной с нулевым средним и дисперсией σ_t^2.

Для нахождения оптимальной стратегии решения задачи глобальной идентификации $a_{11}^*, \ldots, a_{NK_N}^*$ воспользуемся обозначениями:

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{m_{ij}}\gamma_{ijt}\left\|\frac{y_{ijlt}-\Phi_{ijt}(a_{ij}^0)\left(\tilde{y}_{i-1,jlt},\ u_{ijlt}\right)}{y_{ijlt}}\right\|^2+\alpha\left\|a_{ij}^0-\overline{a}_{ij}\right\|^2 \triangleq$$

$$\triangleq r_{ij}\left(\underline{y}_{ij},\ \underline{\tilde{y}}_{i-1,j},\ \underline{u}_{ij},\ a_{ij}^0\right),$$

где

$$\underline{y}_{ij} \triangleq \left(y_{ij111}, \ldots, y_{ij\theta Lm_{ij}}\right), \qquad \underline{\tilde{y}}_{i-1,j} \triangleq \left(\tilde{y}_{i-1,j111}, \ldots, \tilde{y}_{i-1,j\theta Lm_{i-1,j}}\right),$$

$$\underline{u}_{ij} \triangleq \left(u_{ij111}, \ldots, u_{ij\theta Lm_{ij}}\right).$$

Постановку регуляризованной задачи глобальной идентификации сформулируем следующим образом: необходимо определить векторы оптимальных параметров a_{ij}^* моделей M_{ij}, при которых достигает минимума критерий (20) и выполняются условия $a_{ij} \in A_{ij}$, $i=\overline{1, N}$, $j=\overline{1, K_i}$.

Учитывая свойство аддитивности критерия (20) и соответствие структуры ППС варианту 2 (см. рис. 1, *б*), приходим к выводу, что для вычисления значений $a_{11}^*, \ldots, a_{NK_N}^*$ целесообразно использовать метод динамического программирования. Таким образом данный метод становится общим для решения всех трех типов задач глобальной идентификации, рассмотренных выше.

Список литературы

1. Повышение энергоэффективности природо-промышленных систем: учебное пособие / Н. С. Попов [и др.] ; под общ. ред. Н. С. Попова. – Тамбов: Изд-во ИП Першина Р. В., 2014. – 146 с.

2. Касти, Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы : пер. с англ. / Дж. Касти. – М. : Мир, 1982. – 216 с.

3. Ротач В. Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования / В. Я. Ротач. – М. : Энергия, 1973. – 440 с.

4. Hasiewicz, Z. Global Identification of Complex Static System with Hierarchical Structure: Deterministic Problem / Z. Hasiewicz // International Journal of Systems Science. – 1977. – Vol. 8, Issue 9. – P. 1021 – 1040.

5. Bubnicki, Z. Identification of Control Plants / Z. Bubnicki. – Warszawa, Amsterdam, Oxford, New York : PWN Polish Scientific Publishers, 1980. – 312 p.

6. Bubnicki Z. // Syst. Sci. – 1975. – Vol. 1, No. 55.

7. Бояринов, А. И. Методы оптимизации в химической технологии / А. И. Бояринов, В. В. Кафаров. – М. : Химия, 1975. – 576 с.

8. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука. – 223 с.

9. Цирлин, А. М. Оптимальное управление технологическими процессами / А. М. Цирлин. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.

References

1. Popov N.S., Bianko V., Lyisenko I.O, P. Novakovski P., Chan Minh Tin, Chuksina L.N., Yakunina I.V. *Povyishenie energoeffektivnosti prirodo-promyishlennyih system* (Energy Efficiency Improving in Natural and Industrial Systems), Tambov: Izdatel'stvo Pershina R.V., 2014, 146 p.
2. Casti J. *Connectivity, Complexity, and Catastrophe in Large-Scale Systems*, Chichester, New York, Brisbane, Toronto: John Wiley & Sons, 1979.
3. Rotach V.Ya. *Raschet dinamiki promyshlennykh avtomaticheskikh sistem regulirovaniya* (The calculation of the dynamics of industrial automatic control systems), Moscow: Energiya, 1973, 440 p.
4. Hasicwicz Z. *International Journal of Systems Science*, 1977, vol. 8, no. 9, pp. 1021-1040, doi: 10.1080/00207727708942099.
5. Bubnicki Z. *Identification of Control Plants*, Warszawa, Amsterdam, Oxford, New York: PWN Polish Scientific Publishers, 1980, 312 p.
6. Bubnicki Z. *Syst. Sci.*, 1975, vol. 1, no. 55.
7. Boyarinov A.I., Kafarov V.V. *Metodyi optimizatsii v himicheskoy tehnologii* (Optimization Methods in Chemical Engineering), Moscow: Himiya, 1975, 576 p.
8. Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metodyi resheniya nekorrektnyih zadach* (Methods for solving ill-posed problems), Moscow: Nauka, 223 p.
9. Tsirlin A.M. *Optimalnoe upravlenie tehnologicheskimi protsessami* (Optimal control of technological processes), Moscow: Energoatomizdat, 1986, 400 p.

On the Problem of Parametric Identification of Models of Complex Systems

N. S. Popov, Tran Minh Chinh

Tambov State Technical University, Tambov

Keywords: dynamic programming; nature and industrial systems; parametric identification; regularization; search coefficients; structural complexity.

Abstract: The task of the parameterization model is formalized for the system with hierarchical structure of connected components. We discussed the method of “locally-optimal” optimization criterion, according to which parameters of the models of individual subsystems and “globally-optimal” for the model parameters of the whole system can be found. Two variants of the problem of parametric identification – for static deterministic and probabilistic systems and the case of regularization of the problem of identification are described. R. Bellman’s method of dynamic programming is proposed as the main method of solving the problem of parameterization models of systems with complex structure.
