

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОЙ ВЫТЯЖКИ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК И ЛИСТОВ С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАДИАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИХ И ПИЩЕВЫХ УПАКОВОК

А. Н. Полосин, Т. Б. Чистякова, Е. В. Тяп

*ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный
технологический институт (технический университет)»,
г. Санкт-Петербург*

Рецензент д-р техн. наук, профессор Л. А. Русинов

Ключевые слова и фразы: безмоментная теория оболочек; математическое моделирование; механическая вытяжка; полимерные материалы; реологические модели; температурный профиль заготовки; толщина изделия; численные методы.

Аннотация: Предложена физически обоснованная математическая модель механической вытяжки полимерных пленок и листов, имеющих неравномерный радиальный профиль температуры, для изготовления осесимметричных изделий, применяемых в качестве упаковки фармацевтических препаратов и пищевых продуктов. Модель включает уравнения безмоментной теории оболочек вращения и реологическую модель полимерного материала для условий плоского напряженного состояния; позволяет рассчитать распределение толщины по контуру изделия заданной конфигурации в зависимости от геометрических параметров формирующих инструментов, реологических характеристик и температурного профиля материала, скорости вытяжки. Модель используется для определения радиального профиля температуры заготовки (пленки, листа), который обеспечивает профиль толщины, гарантирующий требуемое качество (паро-, газопроницаемость, твердость) упаковок различной конфигурации.

Полосин Андрей Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры систем автоматизированного проектирования и управления, e-mail: polosin@rbcmail.ru; Чистякова Тамара Балабековна – доктор технических наук, профессор кафедры систем автоматизированного проектирования и управления, проректор по инновациям; Тяп Евгений Викторович – аспирант кафедры систем автоматизированного проектирования и управления, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)», г. Санкт-Петербург.

Введение. Одним из наиболее широко распространенных методов получения полых объемных изделий из полимерных пленок и листов, используемых в качестве тароупаковочных средств для фармацевтических препаратов и пищевых продуктов, является метод механического термоформования. Он заключается в том, что заготовку (пленку, лист), нагретую до температуры размягчения (высокоэластического состояния), подвергают вытяжке на пуансоне в матрице, придавая ей необходимую конфигурацию, а затем охлаждают и удаляют из матрицы [1]. Конкурентными преимуществами метода термоформования перед другими методами изготовления объемных изделий (например, литьем под давлением), обеспечивающими невысокую себестоимость продукции при крупносерийном производстве, являются: существенно (в десятки раз) более низкая стоимость формирующих инструментов, простота их изготовления, аппаратная гибкость, позволяющая оперативно перенастраиваться на новые конфигурации и геометрические параметры изделий, возможность получения тонкостенных изделий.

Основной характеристикой, определяющей качество формованных изделий, является распределение толщины стенок по их контуру. Так, разнотолщинность стенки изделия влияет на его барьерные характеристики и, как следствие, на время сохранности качества упакованной в него продукции. Пониженная проницаемость водяного пара приводит к цементации и почти полной потере способности таблеток распадаться, повышенная проницаемость водяного пара уменьшает прочность таблеток, повышенная кислородопроницаемость способствует развитию аэробных микроорганизмов и обуславливает окисление продуктов питания. Кроме того, более тонкие участки стенки изделия (например, дно, участок сопряжения дна и боковой стенки) характеризуются меньшей прочностью и, как следствие, при повышенных физических нагрузках (например, при ударе во время падения) подвергаются преждевременному разрушению, приводящему к нарушению целостности упаковки и порче продукта.

Одним из факторов, существенно влияющих на степень разнотолщинности изделия, является температура заготовки. С ростом температуры в диапазоне, обеспечивающем высокоэластические свойства полимерного материала, его сопротивляемость растяжению уменьшается (увеличиваются деформации растяжения), что обуславливается значительным ослаблением сил межмолекулярного взаимодействия вследствие усиливающихся тепловых колебаний сегментов макромолекул материала. Поэтому, создавая неравномерное распределение температуры по радиусу заготовки так, чтобы наиболее деформируемые при вытяжке участки заготовки имели меньшую температуру, можно получить требуемую толщину на любом участке изделия, значительно повысив его разнотолщинность или обеспечив заданный профиль толщины, гарантирующий, например, повышенную прочность участков, наиболее подверженных физическим нагрузкам. Однако, несмотря на большие достижения в направлении совершенствования технологии термоформования с целью повышения качества изделий, в настоящее время отсутствуют даже эмпирические зависимости для выбора температурных профилей заготовок, обеспечивающих заданное распределение толщины стенки изделия. По этой причине на современных формовочных агрегатах температурный профиль заготовки для каждого вида изделия подбирается опытным путем. При этом расходуют-

ся относительно большие количества дорогостоящего сырья, а достигаемые температурные профили, как правило, не являются оптимальными, что приводит к получению недостаточно качественных упаковок и сокращению сроков гарантийной сохранности упакованной продукции.

Поэтому целью работы является решение актуальной для фармацевтической и пищевой промышленности задачи, заключающейся в разработке математической модели (ММ) механической вытяжки, основанной на физических концепциях, позволяющей прогнозировать качество формованных изделий и выбирать температурные профили заготовок, обеспечивающие заданные профили толщины стенок изделий для различных типов полимерных материалов и конфигураций изделий.

Формализованное описание процесса механической вытяжки как объекта моделирования. Постановка задачи моделирования. Анализ ассортимента формованных изделий, применяемых для упаковки фармацевтических препаратов и пищевых продуктов, показал, что большинство из них представляет собой осесимметричные тела типа «усеченный конус» (а) и «цилиндр» (б) (например, блистеры для таблеток, стаканчики, банки для молочных продуктов), как показано на рис. 1. Это подтверждается анализом номенклатуры изделий, выпускаемых на оборудовании ведущих компаний (например, ILLIG Maschinenbau, Германия; MEAF Machines B.V., Нидерланды).

Вытяжка закрепленной в зажимной раме заготовки, имеющей начальную толщину δ_0 и радиальный температурный профиль $T(r)$, $0 \leq r \leq R_0$, осуществляется за счет двухосного растяжения в меридиональном и окружном (экваториальном) направлениях под действием соответствующих нормальных напряжений $\sigma_m = \sigma_m(r, h)$ и $\sigma_c = \sigma_c(r, h)$. Эти напряжения возникают вследствие вдавливания в заготовку цилиндрического пуансона, движущегося со скоростью v_p . Увеличение площади поверхности формируемой оболочки на каждом шаге вытяжки приводит к уменьшению толщины ее стенки $\delta = \delta(r, h)$. Угол между свободным (не контактирующим с пуансоном) участком и стенкой матрицы $\alpha = \alpha(h)$ уменьшается. Изменяя радиусы матрицы R_0 и пуансона R_p , можно получать изделия с различным углом наклона стенок (до 90°). Схема и формализованное описание механической вытяжки как объекта моделирования представлены на рис. 2.

Задача моделирования заключается в следующем.

Для процесса механической вытяжки полимерных материалов в осесимметричные изделия разработать ММ $Y = F(X, V, r, h)$, позволяющую

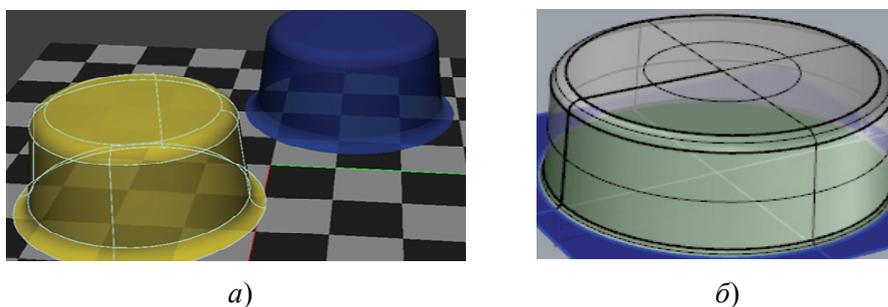


Рис. 1. 3D-модели осесимметричных изделий, применяемых для упаковки:
а – усеченный конус; б – цилиндр

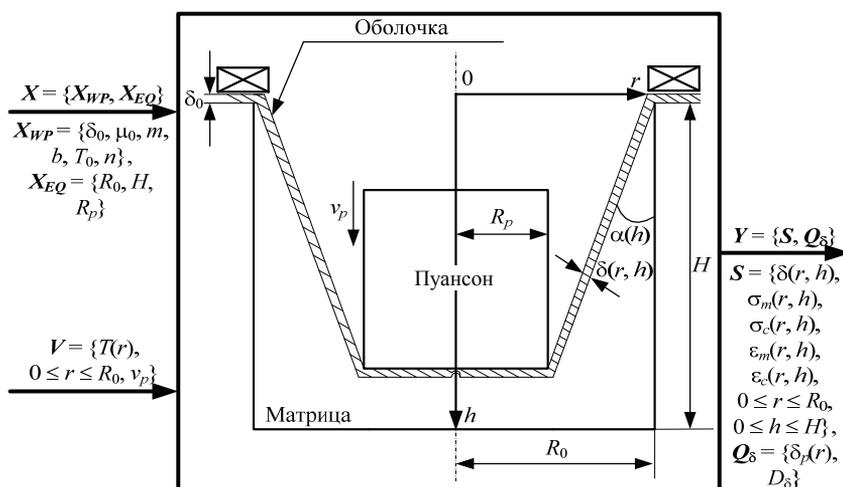


Рис. 2. Схема и формализованное описание механической вытяжки:

X, V, Y – векторы входных, варьируемых и выходных параметров процесса;

X_{WP}, X_{EQ} – векторы характеристик заготовки и формирующих инструментов;

μ_0, m, b, T_0, n – реологические характеристики полимерного материала;

H – глубина матрицы, равная высоте изделия, м; S, Q_δ – векторы параметров состояния

процесса и показателей качества изделия; $\varepsilon_m = \varepsilon_m(r, h), \varepsilon_c = \varepsilon_c(r, h)$ –

деформации оболочки в меридиональном и окружном направлениях;

$\delta_p(r)$ – толщина стенки изделия, м; D_δ – индекс разнотолщинности, %;

r – радиальная координата текущего положения материальных

точек оболочки, м; h – координата по глубине матрицы, м

для заданных входных параметров X выбирать значения режимных параметров $V \in [V^{\min}; V^{\max}]$, варьируемых в регламентных пороговых ограничениях $V^{\min} = \{T^{\min}, v_p^{\min}\}$, $V^{\max} = \{T^{\max}, v_p^{\max}\}$, обеспечивающие требуемое качество изделия по толщине Q_δ :

– равнотолщинность $D_\delta \leq D_\delta^{\max}$, гарантирующую равномерную проницаемость изделия (без участков с недостаточной или избыточной паро- и кислородопроницаемостью), если изделие используется для упаковки фармацевтических препаратов, где D_δ^{\max} – предельно допустимый (зависящий от назначения изделия) индекс разнотолщинности стенки изделия, %;

– заданное распределение толщины стенки по радиальной координате $\|\delta_p^0(r) - \delta_p(r)\| \leq \Delta_\delta$, гарантирующее, например, повышенную прочность отдельных участков, если изделие используется для упаковки пищевых продуктов, где $\delta_p^0(r)$ – заданное радиальное распределение толщины стенки изделия, м; Δ_δ – предельно допустимое отклонение распределения толщины от задания, м.

Формирование математического описания механической вытяжки.

В литературе описаны аналитические ММ, позволяющие на основе закона сохранения массы рассчитать распределение толщины стенки по высоте для вакуум-пневмоформованных осесимметричных изделий различной конфигурации и степени вытяжки [2, 3]. Процесс формования заготовки представляется в виде последовательности актов кратковре-

менной равномерной вытяжки свободных участков и приведения бесконечно малых элементов разогретой заготовки в контакт с относительно холодными стенками матрицы, способствующий резкому затормаживанию деформаций вследствие мгновенного образования отвердевшей тонкой корки на поверхности заготовки. Однако вследствие допущений об однородном характере утонения на свободных участках, форме профиля заготовки на этапах ее формирования и равномерности нагрева заготовки эти ММ не могут достаточно адекватно описать процесс термоформования. Кроме того, вводимые в ММ коэффициенты утяжки и охлаждения материала должны определяться экспериментальным путем для каждого типа материала, отношения радиусов зажимной рамы и матрицы, тепловых условий процесса. Математическая модель основана на использовании одного уравнения статики безмоментной теории оболочек (БМТО) вращения и физических уравнений связи напряжений и деформаций для плоского напряженного состояния. Недостатками предложенного решения являются отсутствие учета влияния на напряжения скоростей деформаций, а также введение экспериментальных значений поля деформаций для главных составляющих и их использование при получении решения для напряжений по физическим уравнениям. Более общим подходом к анализу деформационных процессов при термоформовании является применение реологических моделей, отражающих влияние деформационных свойств полимерных материалов на сопротивление растяжению. Примерами такого подхода являются ММ, базирующиеся на БМТО и описывающие вытяжку на пуансоне с использованием модели Огдена [4] и степенной модели [5]. Но ММ, предложенная в источнике [5], не учитывает влияния теплового состояния материала и скоростей деформаций растяжения на сопротивление, а ММ, предложенная в работе [5], не содержит критерий и процедуру проверки достоверности результатов расчета, заключающуюся в сопоставлении объема оболочки на каждом шаге вытяжки с объемом заготовки. На базе вязкоупругой модели предложен метод расчета разнотолщинности при реализации процесса механо пневмоформования осесимметричных изделий в зависимости от геометрических параметров формирующих инструментов, скорости пуансона и времени релаксации. Однако не учитывается деформация растяжения в окружном направлении.

Анализ характеристик процесса механической вытяжки и свойств полимеров позволил обосновать допущения, принимаемые при построении ММ:

1) толщина заготовки одинакова по ее радиусу (разнотолщинность пренебрежимо мала);

2) заготовка жестко закреплена в зажимной раме, поэтому утяжка материала в матрицу из-под рамы отсутствует (скорость окружной деформации в точке закрепления равна нулю);

3) температурный профиль заготовки не изменяется (изотермический режим) вследствие кратковременности операции формования (время формования, а значит, и время контакта заготовки с пуансоном, как правило, составляет 1...3 с), низкой теплопроводности термопластов (0,12...0,29 Вт/(м·К)) [6], применения теплоизоляционного покрытия пуансона (например, фторопласта, велюра, бархата), повышающего тепловое сопротивление его контактной поверхности;

4) полимерный материал несжимаем, так как коэффициент Пуассона полимеров, находящихся в высокоэластическом состоянии, близок к 0,5; анизотропия свойств материала вследствие ориентационной вытяжки его макромолекул мала;

5) кривизна образующей боковой поверхности конической оболочки незначительна; это обусловлено тем, что степень кривизны уменьшается с увеличением радиуса пуансона, а, как правило, в данной операции отношение радиусов пуансона и матрицы составляет 0,5...0,8;

6) вследствие малой (по сравнению с радиусом) толщины и гибкости оболочки в ней реализуется безмоментное плоское напряженное состояние (изгиб отсутствует, нормальные напряжения в меридиональном и окружном направлении равномерно распределены по толщине оболочки, нормальное напряжение в направлении, перпендикулярном к поверхности оболочки, и касательные напряжения пренебрежимо малы);

7) инерционные и массовые силы пренебрежимо малы в связи с малой массой оболочки и малыми (0,05...0,2 м/с) средними скоростями формоизменения;

8) реологическая модель материала построена путем обобщения (на основе постулата Ильюшина о пропорциональности девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций для изотропных материалов) данных опытов по одноосному растяжению, выполненных в различных деформационно-температурных режимах, на случай плоского напряженного состояния с учетом близкого к монотонному характера развития деформаций [5].

Применение указанных допущений позволило сформировать математическое описание механической вытяжки полимерных материалов, включающее следующие уравнения и краевые условия:

– уравнение несжимаемости материала

$$\varepsilon_m + \varepsilon_c + \varepsilon_\delta = 0, \quad (1)$$

$$v_p \frac{d\varepsilon_m}{dh} = s_m, \quad v_p \frac{d\varepsilon_c}{dh} = s_c, \quad \varepsilon_\delta = \ln\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right), \quad 0 \leq r \leq R_0, \quad 0 < h \leq H; \quad (2)$$

– уравнение баланса сил растяжения материала в меридиональном и окружном направлениях (вывод уравнения приведен в работе [7])

$$\frac{d(\delta\sigma_m)}{dr} = \delta \frac{\sigma_c - \sigma_m}{r}, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < h \leq H; \quad (3)$$

– уравнение непрерывности деформаций растяжения, отвечающее осесимметричному случаю формоизменения оболочки (получено в работе [7])

$$r \frac{ds_c}{dr} = s_m - s_c - \frac{v_p \sin(2\alpha)}{2(R_0 - R_p)}, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < h \leq H; \quad (4)$$

– реологическая модель материала

$$\sigma_m - \bar{\sigma} = 2\eta s_m, \quad \sigma_c - \bar{\sigma} = 2\eta s_c, \quad \bar{\sigma} = (\sigma_m + \sigma_c)/3, \quad \eta = \mu I_s^{n-1}, \quad (5)$$

$$\mu = \mu_0 I_\varepsilon^m \exp[-b(T - T_0)]; \quad (6)$$

– геометрическая модель оболочки

$$r = r_0 \exp(\varepsilon_c), \quad \alpha = \arctg[(R_0 - R_p)/h], \quad 0 < h \leq H, \quad (7)$$

$$V_h = 2\pi \left\{ \int_0^{R_p} r \delta dr + \int_{R_p}^{R_0} \left(r + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\delta}{\sin \alpha} dr \right\}, \quad 0 < h \leq H; \quad (8)$$

– краевые условия

$$h = 0: \varepsilon_m = \varepsilon_c = 0, \quad r = 0: \sigma_m = \sigma_c, s_m = s_c, \quad r = R_0: \sigma_m = \sigma_{mb}, s_c = 0, \quad (9)$$

где $\varepsilon_\delta = \varepsilon_\delta(r, h)$ – деформация оболочки в направлении нормали к ее поверхности, характеризующая уменьшение толщины оболочки (определяется в мере Генки); $s_m = s_m(r, h)$, $s_c = s_c(r, h)$ – скорости деформаций в меридиональном и окружном направлениях, c^{-1} ; $\bar{\sigma}$ – среднее (изотропное) напряжение, Па; η – параметр пропорциональности дивидиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций (аналог вязкости жидкости), Па·с; $\mu = \mu(r, h)$ – коэффициент сопротивления материала растяжению (аналог коэффициента консистенции вязкой жидкости), Па·сⁿ; $I_s = 2\sqrt{s_m^2 + s_m s_c + s_c^2}$ – квадратичный инвариант тензора скоростей деформаций (интенсивность скоростей деформаций), c^{-1} ; $I_\varepsilon = 2\sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_m \varepsilon_c + \varepsilon_c^2}$ – квадратичный инвариант тензора деформаций (степень деформационного упрочнения материала, связанная с его формоизменением); V_h – объем оболочки на каждом шаге вытяжки, м³; r_0 – радиальная координата материальных точек заготовки, м; σ_{mb} – напряжение в точке закрепления материала в зажимной раме, Па.

Краевые условия при $r = 0$ сформированы исходя из подтверждаемого экспериментами [8] предположения об однородности деформации оболочки в приближении к центру основания пуансона. Этому способствует облицовка пуансона материалом (например, фторопластом) с малым коэффициентом трения.

Подстановка формулы для расчета деформации ε_δ из (2) в уравнение (1) позволяет получить формулу для расчета распределения толщины оболочки по радиальной координате на каждом шаге формования

$$\delta = \delta_0 \exp[-(\varepsilon_m + \varepsilon_c)], \quad 0 \leq r \leq R_0, \quad 0 < h \leq H. \quad (10)$$

Подстановка выражения для напряжения $\bar{\sigma}$ в первые два уравнения реологической модели (5) позволяет получить промежуточные уравнения $2\sigma_m - \sigma_c = 6\eta s_m$, $2\sigma_c - \sigma_m = 6\eta s_c$, преобразование которых с учетом выражения для параметра η дает окончательное реологическое уравнение

$$2\mu I_s^{n-1} (2s_m + s_c) = \sigma_m. \quad (11)$$

Подстановка промежуточных уравнений в уравнение (3) с учетом выражения для η и уравнения (11) дает итоговое уравнение баланса сил

$$\frac{d(\delta\sigma_m)}{dr} = \frac{\delta}{r} \frac{s_c - s_m}{2s_m + s_c} \sigma_m, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < h \leq H. \quad (12)$$

Преобразование второго из промежуточных уравнений дает формулу для напряжения в окружном направлении σ_c

$$\sigma_c = 0,5\sigma_m + 3\mu I_s^{n-1} s_c. \quad (13)$$

Система уравнений (2), (4), (6)–(13) представляет собой ММ, позволяющую для заданной толщины, реологических характеристик, температурного профиля заготовки, геометрических параметров формирующих инструментов и скорости вытяжки рассчитать профили толщины, напряжений, деформаций, скоростей деформаций оболочки на каждом шаге вытяжки. При этом неравномерность радиального распределения температуры материала T и деформаций его растяжения ε_m , ε_c приводит в соответствии с формулой (6) к неодинаковости коэффициентов сопротивления μ на отдельных участках оболочки.

Алгоритм расчета выходных параметров механической вытяжки. Расчет (рис. 3) осуществляется так, что на каждом j -м шаге по глубине матрицы ($j = \overline{1, N}$, $N = [H/\Delta h]$) вычисляются угол α^j (7) и для каждого i -го участка оболочки по радиальной координате ($i = \overline{1, M}$, $M = [R_0/\Delta r]$) деформации ε_{mi}^j , ε_{ci}^j , коэффициент сопротивления μ_i^j (6), радиальная координата r_i^j (7), толщина δ_i^j (10). При этом на первом шаге $j = 1$, соответствующем малому углу поворота α^1 образующей, не контактирующей с пуансоном зоны оболочки, деформация в меридиональном направлении принимается соответствующей малому равномерному уменьшению толщины оболочки

$$\varepsilon_{mi}^1 = \ln \left\{ \frac{R_0 - R_p (1 - \sin \alpha^1)}{R_0 \sin \alpha^1} \right\}, \quad i = \overline{1, M},$$

радиальная координата i -й материальной точки рассчитывается по формуле, полученной из определения деформации ε_m в мере Генки

$$r_i^1 = r_{i-1}^1 + \exp(\varepsilon_{mi}^1) \sin^k(\alpha^1) \Delta r, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad r_0^1 = 0, \quad r_M^1 = R_0,$$

где $k = 0$, если $r_{i-1}^1 \leq R_p$, $k = 1$, если $r_{i-1}^1 > R_p$, деформация в окружном направлении определяется как $\varepsilon_{ci}^1 = \ln(r_i^1/r_{0i}^1)$, $i = \overline{1, M}$.

Значения деформаций, коэффициента сопротивления и толщины при $i = 0$ принимаются равными значениям этих параметров при $i = 1$.

Критерием достоверности результатов расчета является равенство текущего объема оболочки V_h^j , рассчитываемого по формуле (8), интегралы в которой вычисляются по методу Симпсона, объему заготовки $V_0 = \pi R_0^2 \delta_0$ в пределах допустимой погрешности Δ_V . Если это равенство не выполняется, то шаги по глубине матрицы Δh и радиальной координате Δr уменьшаются в два раза, и расчет повторяется.

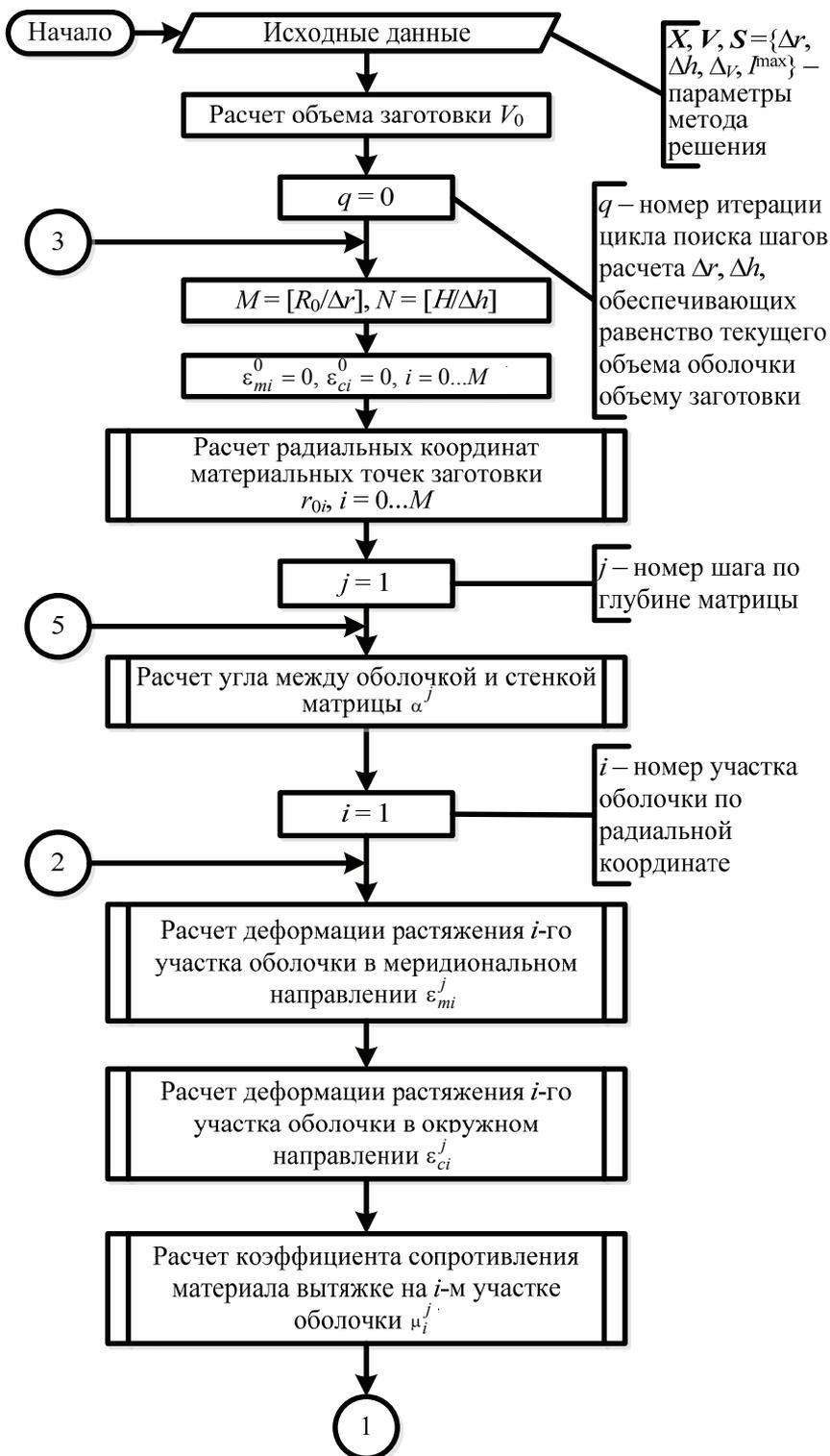


Рис. 3. Алгоритм расчета выходных параметров процесса вытяжки (начало):
 Δr – шаг расчета по радиальной координате, м; Δh – шаг расчета по глубине матрицы, м;
 I^{\max} – максимальное число итераций при поиске шагов расчета $\Delta r, \Delta h$

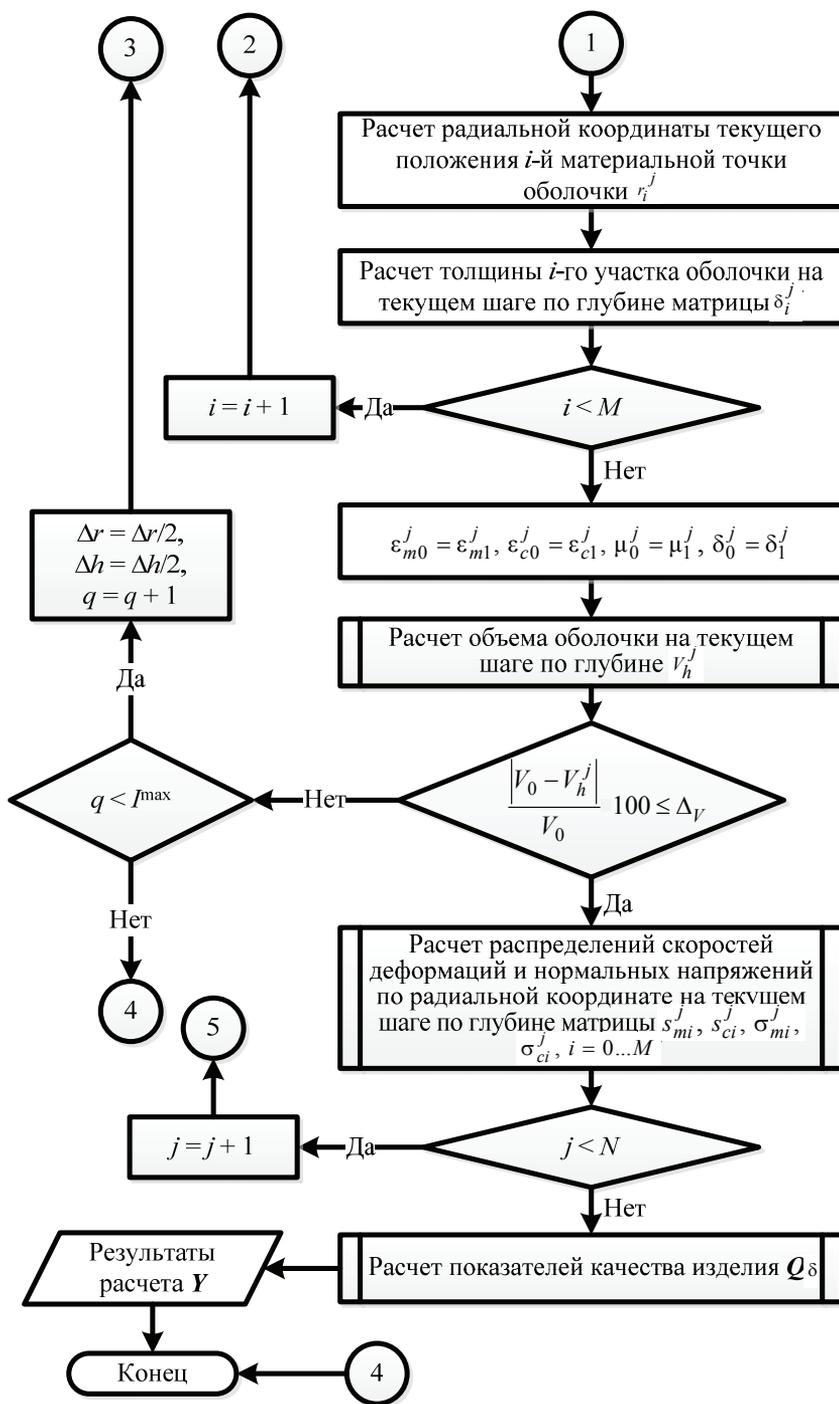


Рис. 3. Продолжение

После выполнения равенства объемов V_h и V_0 на текущем j -м шаге осуществляется расчет распределений скоростей деформаций и напряжений по радиальной координате оболочки. Вычисления осуществляются в направлении от точки закрепления материала в зажимной раме ($i = M$)

к центру пуансона ($i = 0$). Особенностью задачи является неполнота информации, заключающаяся в том, что неизвестно граничное значение меридионального напряжения σ_{mb} . Поэтому для расчета используется итерационный метод [9], заключающийся в поиске такого значения σ_{mb} , при котором в пределах допустимой погрешности выполняется условие $|s_{m0}^j - s_{c0}^j| \leq \Delta_s$, определяющее однородность деформации оболочки в приближении к центру основания пуансона. На каждой итерации при очередном приближении для напряжения σ_{mb} ($\sigma_{mM}^j = \sigma_{mb}$), известной из краевого условия скорости окружной деформации $s_{cM}^j = 0$ и рассчитываемой по следующей формуле, полученной из уравнения (11) с учетом последнего краевого условия (9), скорости меридиональной деформации

$$s_{mM}^j = 0,5^{1+1/n} (\sigma_{mM}^j / \mu_M^j)^{1/n}$$

последовательно для каждого i -го участка оболочки ($i = \overline{M-1, 1}$) вычисляются скорость окружной деформации s_{ci}^j , меридиональное напряжение σ_{mi}^j , скорость меридиональной деформации s_{mi}^j и окружное напряжение σ_{ci}^j (13). Начальное приближение для напряжения σ_{mb} формируется исходя из условия равномерного растяжения меридионального волокна оболочки. Для расчета скорости окружной деформации и меридионального напряжения используются формулы, полученные путем разностной аппроксимации дифференциальных уравнений (4) и (12) по схеме Эйлера, обеспечивающей первый порядок точности, с учетом переменности и неодинаковости (из-за неравномерного растяжения при формовании) длин участков, на которые разбито (при дискретизации задачи) меридиональное волокно оболочки:

$$s_{ci}^j = s_{ci+1}^j - \left[s_{mi+1}^j - s_{ci+1}^j - \frac{v_p \sin(2\alpha^j)}{2(R_0 - R_p)} \right] \frac{r_{i+1}^j - r_i^j}{r_{i+1}^j}, \quad i = \overline{M-1, 1};$$

$$\sigma_{mi}^j = \sigma_{mi+1}^j \frac{\delta_{i+1}^j}{\delta_i^j} \left(1 + \frac{s_{mi+1}^j - s_{ci+1}^j}{2s_{mi+1}^j + s_{ci+1}^j} \frac{r_{i+1}^j - r_i^j}{r_{i+1}^j} \right), \quad i = \overline{M-1, 1}.$$

При этом используется условие преобразования скорости окружной деформации при сходе с края пуансона (в точке сопряжения контактного и свободного участков): $s_{ci}^j = s_{ci}^j / \sin \alpha^j$, если $r_i^j \leq R_p$ и $r_{i+1}^j > R_p$. Скорость меридиональной деформации при известных значениях μ_i^j , s_{ci}^j и σ_{mi}^j рассчитывается путем решения нелинейного уравнения (11) методом Ньютона, обеспечивающим квадратичную скорость сходимости. В качестве начального приближения используется значение s_{ci+1}^j , вычисленное на предыдущем участке. Значения скоростей деформаций при $i = 0$ принимаются равными их значениям при $i = 1$.

Деформации на следующем $(j + 1)$ -м шаге по глубине матрицы рассчитываются исходя из вычисленных на j -м шаге скоростей деформаций, принимаемых постоянными за один шаг формования, по формулам, полученным в результате разностной аппроксимации дифференциальных уравнений (2) по схеме Эйлера:

$$\varepsilon_{mi}^{j+1} = \varepsilon_{mi}^j + s_{mi}^j \Delta h / v_p, \quad \varepsilon_{ci}^{j+1} = \varepsilon_{ci}^j + s_{ci}^j \Delta h / v_p, \quad i = \overline{0, M}.$$

Расчет повторяется вплоть до достижения дна матрицы ($h^j = H$).

После этого рассчитываются показатели качества изделия: радиальное распределение толщины стенки $\delta_p(r) = \delta(r, H)$, $0 \leq r \leq R_0$; индекс разнотолщинности $D_\delta = f[\delta_p(r)]$ (по методике, описанной в работе [10]). Таким образом, разработанный алгоритм позволяет исследовать влияние радиального температурного профиля заготовки на показатели качества изделия (упаковки) по толщине и выбирать профиль температуры, обеспечивающий требуемое качество, для различных конфигураций изделий и типов полимерных материалов.

Пример расчета выходных параметров механической вытяжки.

Проверка адекватности ММ выполнена путем сравнения рассчитанных и измеренных распределений толщины стенки по радиальной координате для изделий типа «усеченный конус», отличающихся высотой и углом наклона боковых стенок, изготавливаемых из различных типов полимерных материалов (полистирола, поливинилхлорида) при равномерных и неравномерных температурных профилях заготовок и различных скоростях вытяжки. Средние квадратические отклонения профилей толщины не превышают 10 мкм (при изменении толщины в диапазоне 200...1000 мкм), что соответствует пределу основной допускаемой погрешности измерения толщины, поэтому ММ адекватно описывает реальный объект.

На рисунке 4, а приведены профили толщины стенки изделия типа «усеченный конус» из полистирола ($\delta_0 = 1000$ мкм, $R_0 = H = 50$ мм, $R_p = 30$ мм) для различных условий формования. Профиль 2 рассчитан при температурном профиле заготовки с температурным градиентом, возрастающим от центра к краю: $T_2(0) = 125$ °С, $T_2(R_0) = 140$ °С. Шаги расчета по радиальной координате ($\Delta r = 0,1$ мм) и высоте ($\Delta h = 0,1$ мм) формующей матрицы обеспечивают отклонение объема стенок изделия от объема заготовки, не превышающее 1 %.

Из расчетных данных видно, что формованное изделие характеризуется разнотолщинностью, вызываемой неравномерностью распределения нормальных напряжений (см. рис. 4, б), при этом наибольшая степень утонения имеет место в области контакта с поверхностью пуансона.

Варьируя распределением температуры по радиальной координате заготовки, можно обеспечить получение требуемой толщины на любом участке изделия. Так, уменьшение температуры наиболее деформируемого (вследствие большей интенсивности напряжений) участка заготовки, контактирующего с пуансоном, с 135 до 125 °С и ее повышение от переходного участка в направлении к краю заготовки с 135 до 140 °С приводят к снижению разнотолщинности изделия с 12 % (профиль 1) до 3 % (профиль 2). Из рисунка 4, а видно, что неравномерное распределение температуры по радиальной координате заготовки обеспечивает при механической вытяжке наилучшее распределение толщины стенки изделия.

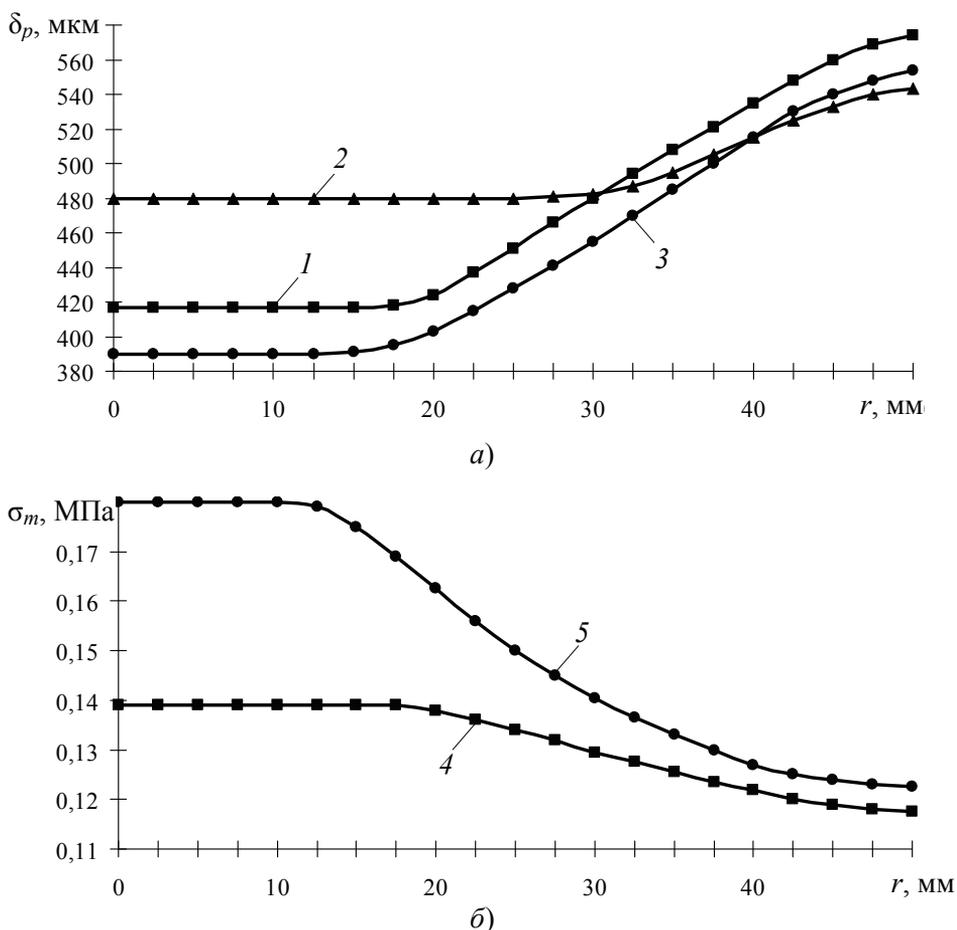


Рис. 5. Распределения толщины стенки изделия (а) и меридионального напряжения (б) в изделии по радиальной координате:

1 – $T_1 = 135\text{ }^\circ\text{C}$, $v_{p1} = 10\text{ мм/с}$; 2 – $T_2 = T_2(r)$, $v_{p1} = 10\text{ мм/с}$; 3 – $T_1 = 135\text{ }^\circ\text{C}$, $v_{p2} = 20\text{ мм/с}$;
 4 – $T_1 = 135\text{ }^\circ\text{C}$, $v_{p1} = 10\text{ мм/с}$; 5 – $T_1 = 135\text{ }^\circ\text{C}$, $v_{p2} = 20\text{ мм/с}$

С увеличением скорости вытяжки (скорости пуансона) в два раза толщина стенки изделия уменьшается на 6 %, что вызвано ростом напряжений, действующих в оболочке (см. рис. 4, б).

По рассчитанному распределению толщины вычисляются барьерные характеристики изделия, и оценивается его способность защитить упакованный товар как от обезвоживания и кислородной недостаточности, так и от избыточного водо- и кислородопоглощения, приводящих к потере качества [11].

Заключение. Предложена ММ механической вытяжки полимерных пленок и листов с неравномерным радиальным профилем температуры в осесимметричные изделия – тароупаковочные средства для фармацевтических препаратов и пищевых продуктов, базирующаяся на безмоментной теории оболочек вращения и законах реологии высокоэластических материалов. Модель настраивается на тип полимерного материала, геометрические характеристики изделия, режимные параметры процесса и позволяет рассчитать распределения толщины, напряжений, деформаций и скоро-

стей деформаций по профилю оболочки при ее формоизменении по высоте формирующей матрицы. Вычислительные эксперименты, выполненные на модели, показали, что неравномерность радиального профиля температуры заготовки приводит к снижению разнотолщинности изделия. Модель позволяет на стадии проектирования изделий дать прогнозную количественную оценку их качества и определить температурный профиль заготовки.

Список литературы

1. Шварцманн, П. Термоформование. Практическое руководство : пер. с англ. / П. Шварцманн. – СПб. : Профессия, 2006. – 288 с.
2. Шерышев, М. А. Математическое описание процессов переработки пластмасс / М. А. Шерышев. – М. : РХТУ им. Д. И. Менделеева, 2005. – 144 с.
3. Rosenzweig, N. Wall Thickness Distribution in Thermoforming / N. Rosenzweig, Z. Tadmor // *Polymer Engineering and Science*. – 1979. – Vol. 19, No. 13. – P. 946 – 951.
4. Michaeli, W. Wanddicke optimieren / W. Michaeli, M. Küppers // *Maschinenmarkt*. – 1990. – Jg. 96, № 10. – S. 92 – 96.
5. Нейман, Я. С. Математическая модель позитивного термоформования листовых заготовок в изделия типа усеченного конуса / Я. С. Нейман, А. М. Воскресенский, Ю. В. Никитин // *Машины и технология переработки полимеров : межвуз. сб. науч. тр. / под ред. Р. Г. Мирзоева, А. М. Воскресенского*. – Л., 1974. – С. 105 – 111.
6. Шерышев, М. А. Переработка листов из полимерных материалов / М. А. Шерышев, В. С. Ким. – Л. : Химия, 1984. – 216 с.
7. Полосин, А. Н. Расчет параметров напряженно-деформированного состояния осесимметричных оболочек при механической вытяжке полимерных материалов / А. Н. Полосин, Т. Б. Чистякова, К. Колерт // *Информ. технологии моделирования и управления*. – 2009. – № 7(59). – С. 987 – 996.
8. Нейман, Я. С. Исследование возможности получения равнотолщинных изделий при позитивном пневмо- и вакуумформовании / Я. С. Нейман, А. М. Воскресенский, Ю. В. Никитин // *Машины и технология переработки полимеров : межвуз. сб. науч. тр. / под ред. Р. Г. Мирзоева, А. М. Воскресенского*. – Л., 1974. – С. 99 – 105.
9. Гартман, Т. Н. Основы компьютерного моделирования химико-технологических процессов / Т. Н. Гартман, Д. В. Клушин. – М. : Академия, 2006. – 416 с.
10. Чистякова, Т. Б. Математическая модель процесса механического термоформования для управления качеством полимерных изделий / Т. Б. Чистякова, А. Н. Полосин, Е. В. Кузьменков // *Хим. технология*. – 2011. – № 11. – С. 693 – 702.
11. Программный комплекс и математические модели для проектирования фармацевтических блистерных упаковок с заданными барьерными характеристиками / Т.Б. Чистякова [и др.] // *Известия С.-Петерб. гос. технол. института (техн. университета)*. – 2013. – № 22(48). – С. 98 – 105.

References

1. Schwarzmann P. *Termoformovanie. Prakticheskoe rukovodstvo* (Thermoforming. A Practical Guide), St. Petersburg: Professiya, 2006, 288 p.
2. Sheryshev M.A. *Matematicheskoe opisaniye protsessov pererabotki plastmass* (The mathematical description of the processes of plastics processing), Moscow: RKhTU im. D. I. Mendeleeva, 2005, 144 p.
3. Rosenzweig N., Tadmor Z. *Polymer engineering and science*, 1979, vol. 19, no. 13, pp. 946-951.
4. Michaeli W., Küppers W. *Maschinenmarkt* [Maschinenmarkt], 1990, vol. 96, no. 10, pp. 92-96.

5. Neiman Ya.S., Voskresenskii A.M., Nikitin Yu.V., in Mirzoev R.G., Voskresenskii A.M. (Eds.) *Mashiny i tekhnologiya pererabotki polimerov*, Leningrad, 1974, pp. 105-111.
 6. Sheryshev M.A., Kim V.S. *Pererabotka listov iz polimernykh materialov* (Recycling of plastics sheets), Leningrad: Khimiya, 1984, 216 p.
 7. Polosin A.N., Chistyakova T.B., Kolert K. *Informatsionnye tekhnologii modelirovaniya i upravleniya*, 2009, no. 7(59), pp. 987-996.
 8. Neiman Ya.S., Voskresenskii A.M., Nikitin Yu.V., in Mirzoev R.G., Voskresenskii A.M. (Eds.) *Mashiny i tekhnologiya pererabotki polimerov*, Leningrad, 1974, pp. 99-105.
 9. Gartman T.N., Klushin D.V. *Osnovy komp'yuternogo modelirovaniya khimiko-tekhnologicheskikh protsessov* (Fundamentals of computer simulation of chemical-engineering processes), Moscow: Akademiya, 2006, 416 p.
 10. Chistyakova T.B., Polosin A.N., Kuz'menkov E.V. *Khimicheskaya tekhnologiya*, 2011, no. 11, pp. 693-702.
 11. Chistyakova T.B., Polosin A.N., Tyan E.V., Kolert K. *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo instituta (tekhnicheskogo universiteta)*, 2013, no. 22(48), pp. 98-105.
-

Mathematical Model of Mechanical Stretching of Polymeric Films and Sheets with Nonuniform Radial Temperature Profile for Control of Pharmaceutical and Food Packages Quality

A. N. Polosin, T. B. Chistyakova, E. V. Tyan

*Saint-Petersburg State Institute of Technology (Technical University),
Saint-Petersburg*

Key words and phrases: mathematical modeling; mechanical stretching; membrane theory of shells; numerical methods; polymeric materials; rheological models; temperature profile of workpiece; thickness of product.

Abstract: Physically based mathematical model of mechanical stretching of polymeric films and sheets with nonuniform radial temperature distribution for manufacturing axially symmetric products used as pharmaceutical and food packages has been developed. It includes equations of membrane theory of revolution shells and rheological model of polymeric material for two-dimensional stress state. The model enables to calculate distribution of thickness along profile of product of given configuration in dependence on geometrical parameters of forming equipment, rheological characteristics and temperature profile of polymeric material, speed of stretching. The model is used to determine radial temperature profile of workpiece (polymeric film, sheet) that ensures thickness distribution guaranteeing required quality (vapor and gas permeability, hardness) of packages of different configurations.

© А. Н. Полосин, Т. Б. Чистякова, Е. В. Тян, 2014

Статья поступила в редакцию 02.11.2014 г.