УДК 517.977.58

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ СТЕПЕННОЙ MIN-ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ С ЧЕТНЫМИ ПРОПУСКАМИ

А. Н. Бугаевская

ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»), г. Белгород

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор С. В. Блажевич

Ключевые слова и фразы: время быстродействия; линейная система; математическая модель; моменты переключения; оптимальное управление; проблема моментов; четные пропуски.

Аннотация: Рассмотрена задача быстродействия для линейной системы с матрицей, имеющей спектр специального вида, которая сводится к степенной min-проблеме Маркова с четными пропусками. Приведен алгоритм программы, реализующей численное решение задачи быстродействия для линейной системы.

В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает проблема быстродействия, в частности, линейная задача быстродействия. Поскольку время быстродействия является естественным критерием оптимальности, задача быстродействия – один из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. Решение задач линейного быстродействия важно с точки зрения нелинейных систем, так как решение таких задач может быть сведено к решению линейных систем.

Основным звеном, связывающим теоретические исследования с практикой, является разработка для решения задач быстродействия численных методов, ориентированных на компьютерное применение. Интерес представляет решение задач быстродействия для систем большой размерности. Трудность решения таких задач состоит в том, что в процессе вычислений приходится иметь дело с плохо обусловленными матрицами.

Бугаевская Анна Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, e-mail: bugaevskaya@bsu.edu.ru, ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»), г. Белгород.

Рассмотрим задачу быстродействия для линейной системы

$$\dot{x} = Ax + bu; \quad |u| \le 1; \quad x \in E^n; \qquad (1)$$
$$x(0) = x^0; \quad x(\Theta) = 0; \quad \Theta \to \min,$$

где A – матрица размерности $n \times n$; b – n-мерный вектор-столбец; $x \in E^n$ – вектор состояния объекта; $u \in R$ – управление; Θ – время движения объекта из точки x^0 в начало координат. Элементы матрицы A и вектора b – действительные числа.

Задача быстродействия для управляемого объекта (1) заключается в нахождении допустимого управления $u(t)$, переводящего объект из начального состояния $x(0) = x^0 \in E^n$ в начало координат за наименьшее время.

Функция $u(t)$ в решении задачи быстродействия кусочно-постоянная и принимает значения ± 1 [1]. Если спектр матрицы A вещественный, тогда функция $u(t)$ имеет не более $n-1$ точек разрыва [1, 2], которые называются моментами переключения управления.

Пусть ранг матрицы $Q = (b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b)$ равен n, то есть система (1) полностью управляема [2], тогда можно попасть из произвольной точки x^0 в начало координат. Решение системы (1) имеет вид

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}\left(x(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-A\tau} bu(\tau) d\tau \right). \qquad (2)$$

Из выражения (2) при $t = \Theta$ получим соотношение

$$x^0 + \int_0^{\Theta} \mathrm{e}^{-\frac{A\tau^2}{2}} bu(\tau)\, d\tau = 0. \qquad (3)$$

Обозначим через $\tilde{u}$ управление на последнем промежутке $[T_{n-1}; \Theta]$. Если $\tilde{u} = -1$, то управление $u(t)$ будем называть управлением первого рода, если $\tilde{u} = +1$ – управлением второго рода.

Таким образом, решение задачи быстродействия (1) сводится к нахождению времени быстродействия Θ, рода управления $\tilde{u}$ и моментов переключения $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$.

Рассмотрим решение задачи быстродействия (1) для случая, когда спектр матрицы A имеет вид $\sigma(A) = \{(2k-1)\lambda\}_{k=1}^n$. В случае такой матрицы задача быстродействия (1) приводится к виду

$$\dot{x}_k = (2k-1)\lambda x_k + u, \quad k = 1, \ldots, n; \quad |u| \le 1; \qquad (4)$$
$$x \in E^n; \quad x(0) = x^0; \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min.$$

Для задачи быстродействия с ограничениями на управление $|u(t)| \le 1$ в [3, 4] предложен подход, основанный на сведении задачи быстродействия (4) к min-проблеме моментов Маркова.

Пусть управление $u(t)$ переводит произвольную точку x^0 в начало координат за время Θ. Тогда справедливы моментные равенства

$$x_k^0 = -\int_0^{\Theta} e^{-(2k-1)\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Рассмотрим случай $\lambda < 0$. Делая замену переменной $t = e^{-\lambda\tau}$, моментные равенства (5) примут вид

$$x_k^0 = \frac{1}{\lambda} \int_1^{\widetilde{\Theta}} t^{2k-2} u(t)\, dt, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $\widetilde{\Theta} = e^{-\lambda\Theta}$.

Таким образом, решение задачи быстродействия (4) сводится к степенной min-проблеме моментов Маркова

$$\begin{gathered} \int_1^{\widetilde{\Theta}} t^{2k-2} u(t)\, dt = s_{2k-1}, \quad k = 1, \ldots, n; \\ |u(t)| \le 1, \quad t \in [1, \widetilde{\Theta}], \quad \Theta \to \min, \end{gathered} \tag{7}$$

здесь $s = \lambda x^0$. В работах [1, 5] проблема моментов (7) называется степенной min-проблемой моментов Маркова с четными пропусками.

Введем обозначение $\widetilde{T}_i = e^{-\lambda T_i}$, где T_i – моменты переключения оптимального по быстродействию управления в задаче (4), $\widetilde{T}_i$ – точки разрыва функции $u(t)$, решающей min-проблему моментов (7). В дальнейшем также будем называть $\widetilde{\Theta}$ временем быстродействия и $\widetilde{T}_i$ моментами переключения.

Рассмотрим более общий случай, когда функция $u(t)$ имеет $(n-1)$ точек разрыва $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$. Тогда решение моментных равенств (6) приводит к нелинейной системе уравнений со знакочередующимися коэффициентами

$$(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1}\, \widetilde{T}_i^{2k-1} = \frac{\widetilde{\Theta}^{2k-1} + (-1)^n - (2k-1)\,\widetilde{u}\,\lambda x_k^0}{2}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\widetilde{u}$ – управление на последнем промежутке $[\widetilde{T}_{n-1}; \widetilde{\Theta}]$, $\widetilde{u} = \pm 1$.

Обозначим правые части системы (8) через C_{2k-1}, то есть

$$C_{2k-1} = \frac{\widetilde{\Theta}^{2k-1} + (-1)^n - (2k-1)\,\widetilde{u}\,\lambda x_k^0}{2}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Решение системы (8) подробно рассмотрено в [5] и получены уравнения для нахождения времени быстродействия $\widetilde{\Theta}$:

$$\begin{vmatrix} \gamma_3 & \gamma_5 & \cdots & \gamma_{n+1} \\ \gamma_5 & \gamma_7 & \cdots & \gamma_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n+1} & \gamma_{n+3} & \cdots & \gamma_{2n-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

и

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_3 & \gamma_5 & \cdots & \gamma_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n+2} & \cdots & \gamma_{2n-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

в случае четного и нечетного n соответственно. Рекуррентные формулы для нахождения полиномов γ_{2k-1} имеют вид

$$\gamma_1 = C_1, \quad \gamma_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}\left(C_{2k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} C_{2k-2i-1} \sum_{j=1}^{i} \gamma_{2j-1}\gamma_{2i-2j+1}\right), \qquad (12)$$

где $k = 1, \ldots, n$.

Левые части уравнений (10) и (11) являются полиномами от $\widetilde{\Theta}$, x^0, $\widetilde{u}$ в силу (9) и (12). Обозначим определитель в уравнениях (10) или (11) через Δ_{2n-1}.

Теорема. Время быстродействия $\widetilde{\Theta}$ является наибольшим вещественным корнем уравнения

$$\Delta_{2n-1}(x^0, \widetilde{\Theta}, \widetilde{u}) = 0,$$

причем, если $\widetilde{\Theta}$ – наибольший вещественный корень уравнения

$$\Delta_{2n-1}(x^0, \widetilde{\Theta}, -1) = 0,$$

то $\widetilde{u} = -1$ (управление первого рода);

если же $\widetilde{\Theta}$ – наибольший вещественный корень уравнения

$$\Delta_{2n-1}(x^0, \widetilde{\Theta}, +1) = 0,$$

то $\widetilde{u} = +1$ (управление второго рода) [5].

Для задачи (4) время быстродействия $\Theta = -\dfrac{1}{\lambda}\ln\widetilde{\Theta}$.

После того, как найдены время быстродействия $\widetilde{\Theta}$ и род управления, необходимо найти моменты переключения управления $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \ldots, \widetilde{T}_{n-1}$. Рассмотрим метод последовательного нахождения моментов переключения управления, который заключается в следующем. В случае четного n момент переключения $\widetilde{T}_{n-1}$ является наибольшим вещественным корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} \widetilde{\gamma}_1 & \widetilde{\gamma}_3 & \cdots & \widetilde{\gamma}_{n-2} \\ \widetilde{\gamma}_3 & \widetilde{\gamma}_5 & \cdots & \widetilde{\gamma}_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \widetilde{\gamma}_{n-2} & \widetilde{\gamma}_n & \cdots & \widetilde{\gamma}_{2n-3} \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь полиномы $\widetilde{\gamma}_{2k-1}(x^0, \widetilde{T}_{n-1})$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ определяются формулами

$$\widetilde{\gamma}_1 = C_1 + \widetilde{T}_{n-1};$$

$$\widetilde{\gamma}_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}\left(\widetilde{C}_{2k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \widetilde{C}_{2k-2i-1} \sum_{j=1}^{i} \widetilde{\gamma}_{2j-1}\widetilde{\gamma}_{2i-2j+1}\right), \quad k = 2, \ldots, n-1, \quad (13)$$

где $\widetilde{C}_{2k-1} = \widetilde{T}_{n-1}^{2k-1} - C_{2k-1}$ $(k = 1, \ldots, n)$, а C_{2k-1} $(k = 1, \ldots, n)$ имеют вид (9).

В случае нечетного n момент переключения $\widetilde{T}_{n-1}$ является наибольшим вещественным корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} \widetilde{\gamma}_3 & \widetilde{\gamma}_5 & \cdots & \widetilde{\gamma}_{n-1} \\ \widetilde{\gamma}_5 & \widetilde{\gamma}_7 & \cdots & \widetilde{\gamma}_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \widetilde{\gamma}_{n-1} & \widetilde{\gamma}_{n+1} & \cdots & \widetilde{\gamma}_{2n-3} \end{vmatrix} = 0,$$

где полиномы $\widetilde{\gamma}_{2k-1}(x^0, \widetilde{T}_{n-1})$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ также определяются формулами (13).

Далее таким же образом находится $\widetilde{T}_{n-2}$ и все остальные моменты переключения. Порядок определителя в уравнении для нахождения моментов переключения при этом каждый раз уменьшается. Нахождение каждого нового момента переключения требует переопределения последовательности полиномов $\{\widetilde{\gamma}_{2k-1}\}$.

В исходной задаче быстродействия (4) моменты переключения $T_i = -\dfrac{1}{\lambda}\ln \widetilde{T}_i, \quad i = 1, \ldots, n-1.$

Для реализации численного решения задачи быстродействия (4) составлена программа на встроенном в математический пакет Waterloo Maple 9 языке программирования высокого уровня. Для произвольного порядка n системы (4) с заданной точностью определяется время быстродействия и управление, которое является кусочно-постоянной функцией, имеющей $(n-1)$ точек разрыва (моментов переключения). Проводилась проверка точности попадания в начало координат с помощью полученного управления, то есть проверялось равенство (3).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий работу компьютерной программы.

Пример. Приведем результаты численного решения задачи быстродействия (4). Точность вычислений 10^{-90}.

Управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения ± 1 и имеющей $(n-1)$ моментов переключения (точек разрыва) $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$.

Пусть размерность системы (4) $n = 19$, $\lambda = -1$, начальная точка $x^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

В результате численного решения с помощью компьютерной программы получено, что управление $\widetilde{u}$ на последнем промежутке $[T_{18}; \Theta] = -1$ (управление первого рода), время быстродействия

$$\Theta = 0{,}800\ 196\ 554\ 076\ 582\ 731\ 182\ 944\ 237\ 499\ldots,$$

моменты переключения (точки разрыва) управления:

$$T_1 = 0{,}012\ 511\ 299\ 821\ 975\ 195\ 206\ 080\ 430\ 056\ldots;$$
$$T_2 = 0{,}048\ 096\ 332\ 371\ 492\ 640\ 646\ 413\ 641\ 073\ldots;$$
$$T_3 = 0{,}101\ 729\ 513\ 312\ 308\ 400\ 057\ 543\ 321\ 107\ldots;$$
$$T_4 = 0{,}167\ 137\ 863\ 792\ 321\ 362\ 221\ 822\ 892\ 675\ldots;$$
$$T_5 = 0{,}238\ 459\ 399\ 211\ 481\ 730\ 612\ 124\ 025\ 020\ldots;$$
$$T_6 = 0{,}311\ 096\ 256\ 043\ 820\ 944\ 625\ 888\ 639\ 343\ldots;$$
$$T_7 = 0{,}381\ 847\ 930\ 358\ 121\ 959\ 886\ 668\ 144\ 240\ldots;$$
$$T_8 = 0{,}448\ 677\ 793\ 665\ 922\ 124\ 361\ 151\ 933\ 093\ldots;$$
$$T_9 = 0{,}510\ 389\ 459\ 859\ 528\ 757\ 678\ 033\ 180\ 692\ldots;$$
$$T_{10} = 0{,}566\ 343\ 055\ 490\ 052\ 136\ 782\ 147\ 513\ 213\ldots;$$
$$T_{11} = 0{,}616\ 245\ 672\ 359\ 832\ 254\ 581\ 303\ 040\ 663\ldots;$$
$$T_{12} = 0{,}660\ 009\ 406\ 518\ 572\ 205\ 735\ 160\ 742\ 214\ldots;$$
$$T_{13} = 0{,}697\ 659\ 724\ 491\ 874\ 320\ 925\ 169\ 613\ 835\ldots;$$
$$T_{14} = 0{,}729\ 278\ 011\ 778\ 422\ 691\ 964\ 488\ 825\ 731\ldots;$$
$$T_{15} = 0{,}754\ 966\ 241\ 505\ 580\ 382\ 282\ 854\ 370\ 895\ldots;$$
$$T_{16} = 0{,}774\ 825\ 572\ 775\ 082\ 679\ 425\ 202\ 000\ 373\ldots;$$
$$T_{17} = 0{,}788\ 943\ 582\ 654\ 164\ 496\ 912\ 645\ 715\ 565\ldots;$$
$$T_{18} = 0{,}797\ 386\ 806\ 691\ 376\ 025\ 843\ 134\ 610\ 589\ldots,$$

точность попадания в конечную точку порядка 10^{-66}.

Список литературы

1. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1976. – 392 с.

2. Ли, Э. Б. Основы теории оптимального управления : пер. с англ. / Э. Б. Ли, Л. Маркус. – М. : Наука, 1971. – 574 с.

3. Коробов, В. И. Метод порождающей функции в проблеме моментов с периодическими пропусками / В. И. Коробов, Г. М. Скляр // Докл. Акад. наук СССР. – 1991. – Т. 318, № 1. – С. 32 – 35.

4. Korobov, V. I. Markov Power Min-Moment Problem with Periodic Gaps / V. I. Korobov, G. M. Sklyar // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – Vol. 80, No. 1. – P. 1559 – 1581.
5. Korobov, V. I. The Solution of One Time-Optimal Problem on the Basis of the Markov Moment Min-Moment Problem with Even Gaps / V. I. Korobov, A. N. Bugaevskaya // Matematicheskaya Fizika, Analiz, Geometriya. – 2003. – Vol. 10, No. 4. – P. 505 – 523.
6. Бугаевская, А. Н. Решение задачи быстродействия на основе степенной min-проблемы моментов Маркова с четными пропусками / А. Н. Бугаевская // Современные методы исследования в математике и механике. Труды XXIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ / под ред. Д. В. Георгиевского, А. Н. Якивчик. – М., 2001. – С. 60 – 63.

References

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V. Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (The mathematical theory of optimal processes), Moscow: Nauka, 1976, 392 p.
2. Lee E.B., Markus L. *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya* (Foundations of Optimal Control Theory), Moscow: Nauka, 1971, 574 p.
3. Korobov V.I., Sklyar G.M., in *Doklady Akademii nauk SSSR* (Reports of the Academy of Sciences of the USSR), 1991, vol. 318, no. 1, pp. 32-35.
4. Korobov V.I., Sklyar G.M. *Journal of Mathematical Sciences*, 1996, vol. 80, no. 1, pp. 1559-1581.
5. Korobov V.I., Bugaevskaya A.N. *Matematicheskaya Fizika, Analiz, Geometriya*, 2003, vol. 10, no. 4, pp. 505-523.
6. Bugaevskaya A.N., in Georgievskii D.V., Yakivchik A.N.(Ed.) *Sovremennye metody issledovaniya v matematike i mekhanike. Trudy XXIII Konferentsii molodykh uchenykh mekhaniko-matematicheskogo fakul'teta MGU* (Modern methods of research in mathematics and mechanics. XXIII Proceedings of the Conference of Young Scientists of Mechanics and Mathematics Faculty), Moscow, 2001, pp. 60-63.

Computer Modeling of Time-Optimal Control Problem for a Linear System Based on Power Moment Min-Problem with Even Gaps

A. N. Bugayevskaya

Belgorod State National Research University, Belgorod

Key words and phrases: even gaps; linear system; mathematical modeling; moment problem; optimal control; optimal time; switching times.

Abstract: The time-optimal problem for a linear system which matrix has the spectrum of the special form is considered. This problem is reduced to the power Markov moment min-problem with even gaps. The paper presents an algorithm of program, which gives numerical solving of time-optimal control problem for a linear system.

Статья поступила в редакцию 24.02.2014 г.