

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦАХ
ПРИ КОНТРОЛЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ
ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИМ МЕТОДОМ
ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН**

Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент д-р техн. наук, профессор С.В. Пономарев

Ключевые слова и фразы: коэффициент температуропроводности; краевые задачи теплопереноса; математическое моделирование; полигармонический метод; температурные волны.

Аннотация: Построена математическая модель теплопереноса в полуограниченных твердых однородных изотропных материалах при задании на границе периодической функции времени, удовлетворяющей условию $\int_0^{\tau_0} T(x, \tau) d\tau = 0$. Построено решение краевой задачи теплопереноса с учетом реальных граничных условий. Рассмотрен частный случай этого решения.

Введение

Анализ методов температурных волн [1] позволил выявить проблемы, возникающие при их реализации. Основная проблема заключается в том, что при нагревании поверхности исследуемого образца потоком воздуха или жидкости постоянной температуры она не сразу принимает температуру омывающей среды. В связи с этим математическое выражение условий эксперимента является приближением к реальным условиям, что может быть приемлемым для плохих проводников, но для хороших – привести к значительным ошибкам [2]. В этом случае при организации эксперимента следует принимать специальные меры, например, значительно увеличивать скорость, с которой жидкость обтекает твердое тело. Таким образом, необходимо учитывать профиль температурной волны и оценивать

Артюхина Екатерина Леонидовна – аспирант кафедры «Управление качеством и сертификация», e-mail: artuykhina@yahoo.com; Мищенко Сергей Владимирович – доктор технических наук, профессор, научный руководитель кафедры «Управление качеством и сертификация», ТамбГТУ, г. Тамбов.

влияние несоответствий реальных условий принятым. Данная проблема решается заданием граничных условий краевой задачи теплопереноса на основании реально регистрируемых, по которым могут быть найдены искомые тепловые характеристики.

Решение задачи теплопереноса с обобщенными граничными условиями

Рассмотрим задачу теплопереноса в однородном изотропном полуграниченном цилиндрическом образце с обобщенными граничными условиями, под которыми будем понимать произвольную периодическую функцию, удовлетворяющую ограничению $\int_0^{\tau_0} T(x, \tau) d\tau = 0$. Предположим,

что температура на плоской поверхности образца представляет собой осесимметричную периодическую функцию. Будем считать, что в исследуемом образце отсутствуют физико-химические превращения, приводящие к зависимости тепловых свойств от времени.

При этих предположениях придем к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < \infty; \quad (1)$$

$$T(\infty, \tau) = T_0; \quad (2)$$

$$T(0, \tau) = T_A f(\tau), \quad (3)$$

где $T(x, \tau)$ – температура тела в точке с координатой x в момент времени τ , К; a – коэффициент температуропроводности, м²/с; T_0 – начальная температура тела, К; T_A – амплитуда колебания температуры, К; $f(\tau)$ – некоторая периодическая функция времени, определенная ниже.

В рассматриваемой задаче периодическое изменение температуры образца обеспечивается поочередным омыванием торца цилиндрического образца потоками жидкости с температурами T_1 и T_2 в течение равных интервалов времени $b = \frac{\tau_0}{2}$. В этом случае профиль температуры поверхности образца в первом приближении может быть представлен трапецией *ONLM* (рис. 1).

Найдем спектр профиля температурной волны. Функция $f(\tau)$ может быть представлена в виде

$$f(\tau) = \begin{cases} k\tau, & 0 \leq \tau < d; \\ 1, & d \leq \tau < b-d; \\ \frac{b-\tau}{d}, & b-d \leq \tau < b+d; \\ -1, & b+d \leq \tau < 2b-d; \\ k\tau, & 2b-d \leq \tau < 2b. \end{cases} \quad (4)$$

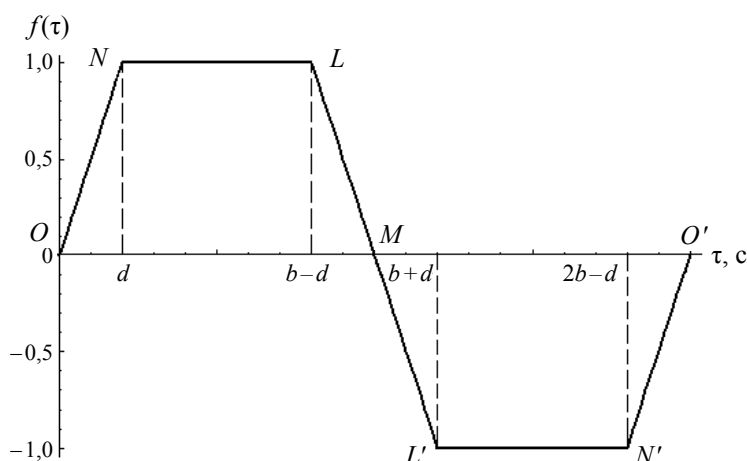


Рис. 1. Профиль температурной волны на поверхности исследуемого образца

Функция $f(\tau)$ является нечетной $f(-\tau) = -f(\tau)$, поэтому на сегменте $[0, \tau_0]$ при выполнении условия Дирихле она может быть представлена в виде суммы ряда Фурье

$$f(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m \sin \frac{m\pi\tau}{b}, \quad \text{где } g_m = \frac{2}{b} \int_0^b f(\tau) \sin \frac{m\pi\tau}{b} d\tau,$$

Так как сегмент $[0, \tau_0]$ состоит из отрезков $[0, d]$, $[d, b-d]$, $[b-d, b]$

$$\int_0^b f(\tau) \sin \frac{m\pi\tau}{b} d\tau = \int_0^d k\tau \sin \frac{m\pi\tau}{b} d\tau + \int_d^{b-d} \sin \frac{m\pi\tau}{b} d\tau + \int_{b-d}^b \frac{b-\tau}{d} \sin \frac{m\pi\tau}{b} d\tau.$$

Вычислим коэффициенты разложения функции $f(\tau)$ в ряд Фурье:

$$I_1 = \int_0^d \frac{1}{d} \sin \frac{m\pi\tau}{b} d\tau = -\frac{b^2}{dm^2\pi^2} \left(\sin \frac{m\pi d}{b} - \frac{m\pi d}{b} \cos \frac{m\pi d}{b} \right);$$

$$I_2 = \int_d^{b-d} \sin \frac{m\pi\tau}{b} d\tau = -\frac{b}{m\pi} \left(\cos \frac{m\pi(b-d)}{b} - \cos \frac{m\pi d}{b} \right);$$

$$I_3 = \int_{b-d}^b \frac{b-\tau}{d} \sin \frac{m\pi\tau}{b} d\tau = \frac{b}{m\pi} \cos \frac{m\pi(b-d)}{b} + \frac{b^2}{dm^2\pi^2} \sin \frac{m\pi(b-d)}{b};$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{b^2}{dm^2\pi^2} \left(\sin \frac{m\pi(b-d)}{b} + \sin \frac{dm\pi}{b} \right);$$

$$g_m = \frac{2}{b} (I_1 + I_2 + I_3) = \frac{2b}{dm^2\pi^2} \left(\sin \frac{m\pi(b-d)}{b} + \sin \frac{dm\pi}{b} \right).$$

Тогда разложение функции $f(\tau)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(\tau) = \frac{\tau_0}{d\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^2} \left(\sin \left[\frac{2 \left(\frac{\tau_0}{2} - d \right) m\pi}{\tau_0} \right] + \sin \left[\frac{2dm\pi}{\tau_0} \right] \right) \sin \left[\frac{2m\pi\tau}{\tau_0} \right]. \quad (5)$$

Графики функций $f(\tau)$, построенных по их представлению отрезком ряда при числе членов ряда $m = 100$ и $m = 10$, $b = 100$, $d = 25$, представлены на рис. 2.

Погрешность аппроксимации трапеции отрезком ряда Фурье при $m = 10$ представлена на рис. 3.

Погрешность аппроксимации трапеции отрезком ряда Фурье при $m = 100$ не превышает $2 \cdot 10^{-5}$.

Решение краевой задачи (1) – (4) с учетом (5) имеет вид

$$\vartheta(a, \tau_0, \tau, d) = \frac{\tau_0}{d\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \left(\sin \left[\frac{2 \left(\frac{\tau_0}{2} - d \right) (2m+1)\pi}{\tau_0} \right] + \sin \left[\frac{(2m+1)2d\pi}{\tau_0} \right] \right) \times \\ \times \exp \left[-x \sqrt{\frac{(2m+1)2\pi}{a\tau_0}} \right] \sin \left[\frac{(2m+1)2\pi\tau}{\tau_0} - x \sqrt{\frac{(2m+1)2\pi}{a\tau_0}} \right]. \quad (6)$$

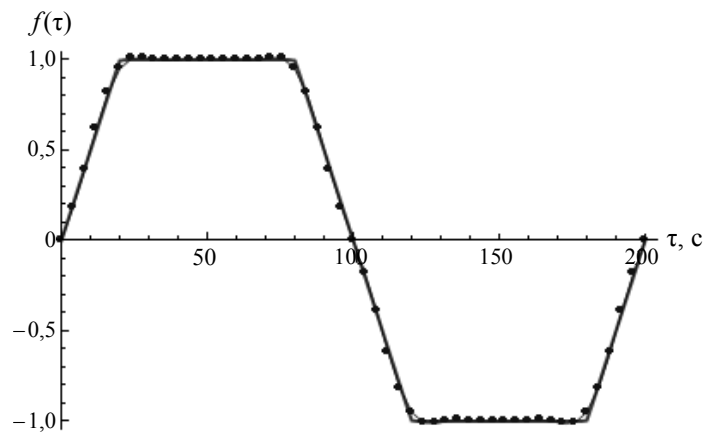


Рис. 2. Графики функций $f(\tau)$ при различном числе m членов ряда:
 ●●●●●●●●●● – 10; — — — — — 100

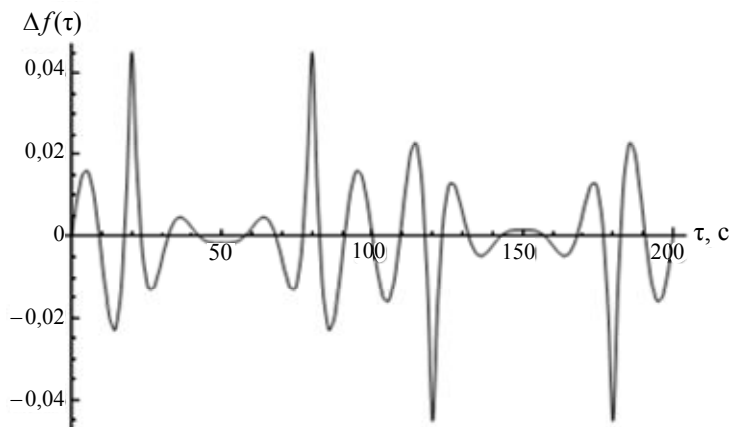


Рис. 3. Погрешность аппроксимации трапеции отрезком ряда Фурье при $m = 10$

Перейдя в (6) к безразмерным переменным $Fo = \frac{a\tau_0}{x^2}$, $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0}$,

$\vartheta(x, \tilde{\tau}) = \frac{T(x, \tau)}{T_A}$, получим

$$\vartheta(Fo, \tilde{\tau}, d) = \frac{\tau_0}{d\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \left(\sin \left[\frac{2\left(\frac{\tau_0}{2} - d\right)(2m+1)\pi}{\tau_0} \right] + \sin \left[\frac{(2m+1)2d\pi}{\tau_0} \right] \right) \times \\ \times \exp \left[-\sqrt{\frac{(2m+1)2\pi}{Fo}} \right] \sin \left[(2m+1)2\pi\tilde{\tau} - \sqrt{\frac{(2m+1)2\pi}{Fo}} \right]. \quad (7)$$

Соотношения (6), (7) позволяют вычислить по результатам эксперимента искомое значение коэффициента температуропроводности в соответствии с выбранной методикой. Так в случае фазовой методики для заданного диапазона изменения коэффициента температуропроводности a строят семейство температурных кривых $T_i = T(a_i, d, \tau_0, \tau)$, где τ_0 определяется исходя из значений a и геометрии исследуемого образца, d – определяемая в эксперименте величина. Для каждой температурной кривой находят время запаздывания из соотношения $T(a_i, d, \tau_0, \tau_{zi}) = 0$. Множество пар чисел $\{a_i, \tau_{zi}\}$ аппроксимируют некоторой функцией, определяющей искомый коэффициент температуропроводности. Более подробно фазовый метод изложен в работе [3].

Проведем оценку погрешностей определения a при значениях d , отличных от нуля.

На рисунке 4 приведены температурные кривые для значения коэффициента температуропроводности $a = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ при расстоянии от области задания тепловых возмущений до места расположения датчика температуры $x = 10^{-3} \text{ м}$ и значениях d из интервала $[10; 50]$.

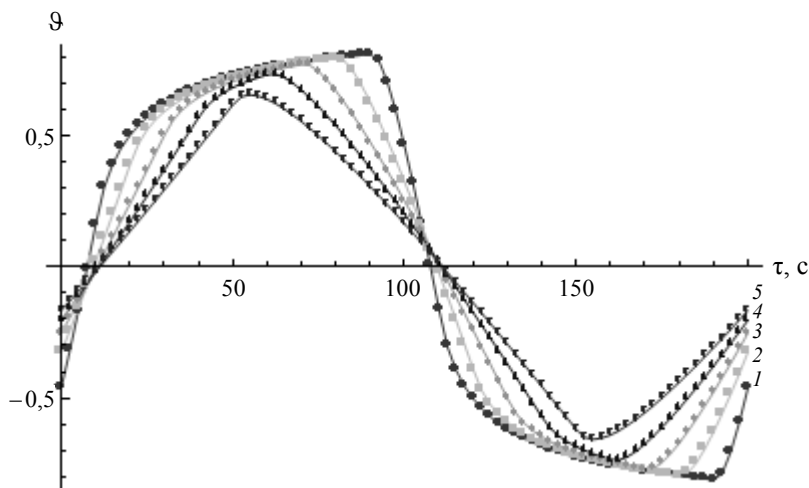


Рис. 4. Зависимость $\vartheta(\tau)$ для различных значений коэффициента формы d :
 1 – 10; 2 – 20; 3 – 30; 4 – 40; 5 – 50

Для каждой температурной кривой $\vartheta(a, \tau_0, \tau, d)$ вычислим величину времени запаздывания из условия $\vartheta(a, \tau_0, \tau, d) = 0$.

График зависимости $\tau_3(d)$ представлен на рис. 5.

Вычисление значения коэффициента температуропроводности без учета d приведет к значительным погрешностям. Действительно,

$$a(d = 20) = 6,86 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}, \Delta a = 3,14 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}, \delta a = 45,7 \%$$

$$a(d = 50) = 5,66 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}, \Delta a = 4,34 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}, \delta a = 76,68 \%$$

Таким образом, коэффициент температуропроводности существенно зависит от d и должен рассчитываться на основании соотношения (7). Отмеченные обстоятельства вынуждают к анализу влияния параметра формы на время запаздывания τ_3 во всем диапазоне исследуемых тепловых свойств. На рисунке 6 приведены зависимости $\tau = \tau(d)$ для значений a в диапазоне исследуемых свойств $a \in (1 \dots 6) \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

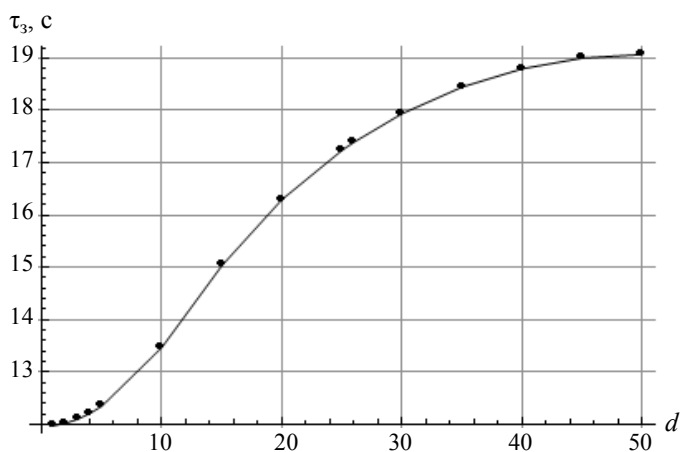


Рис. 5. Изменение τ_3 в зависимости от характера профиля температурной кривой

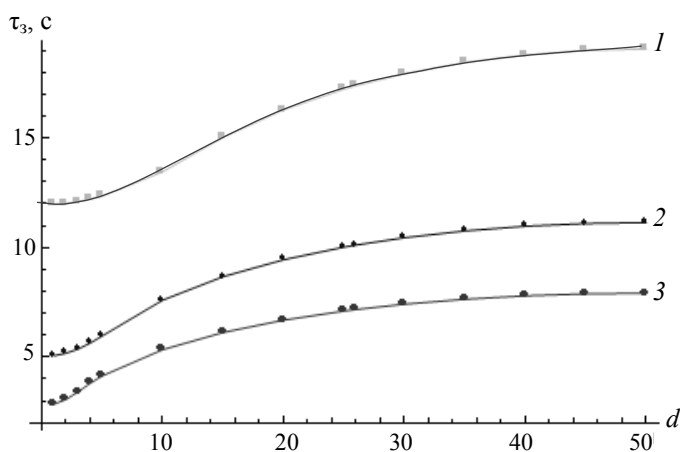


Рис. 6. График зависимости времени запаздывания от параметра формы при различных значениях a , $\text{м}^2/\text{с}$:
1 – $1 \cdot 10^{-7}$; 2 – $3 \cdot 10^{-7}$; 3 – $6 \cdot 10^{-7}$

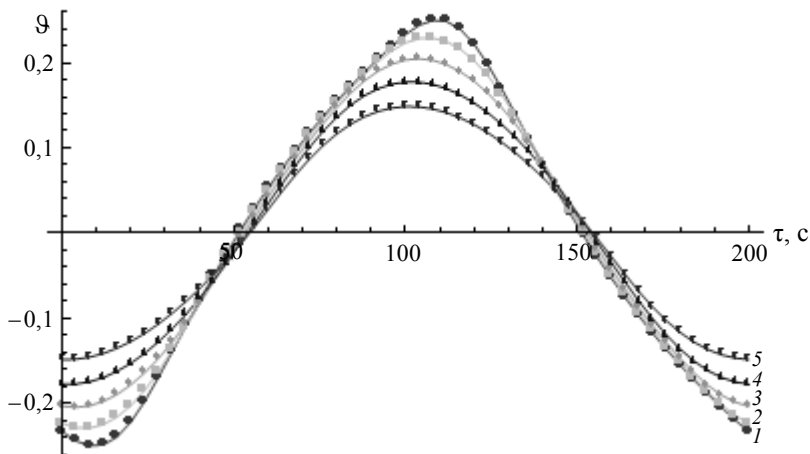


Рис. 7. Температурные кривые для $a = 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $x = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ при различных значениях коэффициента формы d : 1 – 10; 2 – 20; 3 – 30; 4 – 40; 5 – 50

При значениях $x \geq 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ фазовые смещения температурных кривых при изменении параметра d незначительны (рис. 7). В связи с этим применение фазовой методики определения коэффициента температуропроводности в этих условиях нецелесообразно.

Таким образом, проведенный анализ температурных полей в зависимости от параметра d , определяющего форму температурной волны, позволил выявить следующие закономерности.

1. При малых значениях параметра d – до 1,5 % величины полупериода – температурная волна незначительно отличается от меандра, и может быть использовано решение задачи, приведенное в работе [4]. В этом случае возможно применение как фазового, так и амплитудного полигармонических методов.

2. При значениях параметра d более 2,5 % полупериода профиль температурной волны – трапеция. В этом случае необходимо применение решения задачи с модифицированными граничными условиями (7), использование фазового метода возможно при ограничениях на диапазон исследуемых материалов и координату положения датчика температуры (расстояния от зоны температурных возмущений до точки регистрации температуры). Причем применение фазового метода требует совершенных измерительных средств. Учитывая вышесказанное, приходим к выводу о целесообразности применения амплитудного метода контроля температуропроводности при значениях d , превышающих 2,5 % полупериода.

Расширение границ применимости полигармонического метода связано с регистрацией профиля температурной волны в точке контроля и аппроксимации ее решением, определенным по профилю температурной волны в реальном эксперименте.

Выводы

Решение задачи о распространении температурных волн в полуограниченном в тепловом смысле образце при задании на его границе периодической функции, удовлетворяющей условию $\int_0^{\tau_0} T(x, \tau) d\tau = 0$, позволило:

- 1) сформулировать новый полигармонический метод контроля температуропроводности твердых материалов, исключая ограничения на форму периодической функции;
- 2) существенно расширить класс контролируемых материалов;
- 3) сформулировать четкие критерии применения методик контроля температуропроводности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (государственный контракт № 16.526.11.6010 от 28.10.2011 г.).

Список литературы

1. Филиппов, Л.П. Измерение теплофизических свойств веществ методом периодического нагрева. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 105 с.
2. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.
3. Артюхина, Е.Л. Фазовый полигармонический метод температурных волн для контроля температуропроводности твердых изотропных материалов / Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко // *Вопр. соврем. науки и практики*. Ун-т им. В.И. Вернадского. – 2013. – № 1(45). – С. 48–52.
4. Артюхина, Е.Л. Теоретическое обоснование полигармонических методов температурных волн для контроля температуропроводности твердых изотропных материалов / Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко // *Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та*. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 30–37.

Mathematical Modeling of Heat Transfer in Samples when Monitoring Thermal Conductivity by Polyharmonic Method of Temperature Waves

E.L. Artyukhina, S.V. Mishchenko

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: boundary value problem of heat transfer; mathematical modeling; polyharmonic method; temperature waves; thermal diffusivity.

Abstract: The mathematical model of heat transfer in semi-infinite homogeneous isotropic material in case of setting on the border of an periodic function, satisfying the following condition

$$\int_0^{\tau_0} T(x, \tau) d\tau = 0$$
 has been built. The solution of the boundary value problem of heat transfer with the actual boundary conditions has been built. A particular case of this solution has been examined.

© Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко, 2013