

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

---

УДК 519.876.5

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ РАЗРЫВНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

**М.А. Амагов, Г.М. Амадова**

*ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный  
исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»), г. Белгород*

*Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор С.В. Блажевич*

**Ключевые слова и фразы:** взаимодействие популяций; математическая модель; нелинейная динамика; предельные циклы; разностные уравнения; разрывные уравнения.

**Аннотация:** Исследованы системы уравнений в конечных разностях с разрывными правыми частями. Введенное авторами доопределение уравнений на поверхностях разрыва позволило применить аппарат символьной алгебры математического пакета Maple. Составленная в указанном пакете программа позволяет строить траектории разрывных систем. В качестве примера использования программы исследована биологическая система «один хищник – две жертвы» с неперекрывающимися поколениями.

Системы уравнений в конечных разностях (**СУВКР**), называемые еще рекуррентными уравнениями, имеют широкое практическое применение. Они используются для приближенного решения дифференциальных уравнений, а также для решения целого ряда задач физики, биологии и других отраслей науки и техники. В частности, в биологии такие уравнения используются для описания динамики численности популяций с неперекрывающимися поколениями [1–5].

Теоретический аппарат сведения дифференциальных уравнений к разностным при их приближенном интегрировании разработан для случая, когда правые части уравнений непрерывны. Однако при решении задач теории автоматического управления и регулирования, оптимального

---

Амагов Михаил Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа; Амадова Галина Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры педагогики и методики начального образования, e-mail: amatova@bsu.edu.ru, ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»), г. Белгород.

управления и других часто используются дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями.

Кроме того, целесообразность их введения может быть вызвана не только прикладными, но и чисто математическими причинами, когда для упрощения математической модели некоторые функции в уравнении заменяются кусочно-непрерывными функциями [6–9]. Естественно, что для приближенного решения таких уравнений должны использоваться кусочно-непрерывные СУВКР.

В данной статье рассматриваются СУВКР, которые после соответствующих упрощений [1] приводятся к виду:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где функция  $f(x)$  определена в некоторой области  $G \subset R^n$  и отображает эту область в себя, то есть  $f: G \rightarrow G$ , причем случай  $G = R^n$  не исключается.

Очевидно, что СУВКР вида (1) равносильна заданию итераций:

$$f^1 = f(x), \quad f^2 = f(f(x)), \quad f^3 = f(f(f(x))), \dots \quad (2)$$

При произвольном  $x_0 \in G$ , с помощью (2) для функции  $f$  получим:

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \dots \quad (3)$$

Итерации (2) могут быть вычислены и для разрывной функции  $f$ , но если СУВКР получены из дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями, то последовательность (3) должна быть согласована с возможным существованием скользящих режимов.

Из теории систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями [7–9] известно, что если изображающая точка попала в область  $S_0$  скользящих движений на поверхности разрыва  $S$ , то дальнейшее ее движение происходит по поверхности  $S$  до тех пор, пока она не покинет  $S_0$ . То есть в случае разрывных СУВКР точки последовательности (3) при попадании в область скользящих движений должны находиться на поверхности разрыва.

Для определения понятия области скользящих движений СУВКР (1) каждые две соседние точки  $x_k$  и  $x_{k+1}$  последовательности (3) соединим отрезком прямой и будем трактовать как вектор  $\vec{v}_k = \overrightarrow{x_k x_{k+1}}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , начинающийся в точке  $x_k$ . Ломаную  $L$  с вершинами в точках (3) будем называть траекторией СУВКР (1).

Общность рассуждений не нарушится, если предположим, что функция  $f$  имеет в области  $G$  единственную гладкую поверхность разрыва  $S$ , разбивающую  $G$  на две части  $G^+$  и  $G^-$ . Обозначим через  $\vec{n}$  единичную нормаль к  $S$ , направленную от  $G^-$  к  $G^+$ , а через  $\vec{v}^+$  ( $\vec{v}^-$ ) – предел  $\vec{v}_0$  при стремлении  $x_0$  к  $x \in S$  из области  $G^+$  ( $G^-$ ). Аналогично,  $f^+(f^-)$  – предел  $f(x_0)$  при стремлении  $x_0$  к  $x \in S$  из области  $G^+$  ( $G^-$ ). Проекции векторов  $\vec{v}^+$  ( $\vec{v}^-$ ) на нормаль  $\vec{n}$  обозначим  $\vec{v}^+$  ( $\vec{v}^-$ ).

Далее введем следующее определение: областью скользящих движений будем называть область  $S_0$  на поверхности  $S$  разрыва правой части СУВКР, в каждой точке которой выполнены неравенства

$$\bar{v}_n^- \geq 0, \bar{v}_n^+ \leq 0, v_n^- - v_n^+ > 0. \quad (4)$$

Движение по траектории  $L$  системы, начинающейся в точке  $x_0$ , происходит в направлении, задаваемом векторами  $\bar{v}_k$ . Точки итераций (3) будут проходиться в порядке возрастания номеров. Если при этом окажется, что никакой из векторов  $\bar{v}_k$  не пересекает поверхности разрыва  $S$  в точках области  $S_0$ , то траектория  $L$  будет состоять только из точек (3) и соединяющих их векторов  $\bar{v}_k$ .

Если же какой-то вектор  $\bar{v}_k$  пересекает поверхность  $S$  и точка пересечения  $x^*$  принадлежит  $S_0$ , то положим  $\bar{v}_k = \overrightarrow{x_k x^*}$ , то есть точку  $x^*$  считаем  $x_{k+1}$ , следующей за точкой  $x_k$ . Далее, из точки  $x_{k+1}$  строим два вектора  $\bar{v}^+(x_{k+1})$  и  $\bar{v}^-(x_{k+1})$ , концы которых соединяем отрезком прямой  $l_1$ , уравнение которого:  $x = f^+(x_{k+1})t + (1-t)f^-(x_{k+1})$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Затем находим точку  $\bar{x}$  пересечения отрезка  $l_1$  с поверхностью  $S$ . Если точка пересечения  $\bar{x}$  принадлежит  $S_0$ , то полагаем  $x_{k+2} = \bar{x}$  и из точки  $x_{k+2}$  строим два вектора  $\bar{v}^+(x_{k+2})$  и  $\bar{v}^-(x_{k+2})$ , концы которых соединяем отрезком прямой  $l_2$  и т.д.

Все построенные таким образом точки лежат на поверхности  $S$ . Процесс их построения может закончиться двояко: либо на некотором шаге отрезок  $l_m$  не будет иметь точек пересечения с поверхностью  $S$ ; либо точка пересечения  $l_m$  и  $S$  существует, но не лежит в области  $S_0$  скользящих движений.

В каждом из указанных случаев движение будет продолжаться либо по вектору  $\bar{v}^+(x_{k+m})$ , либо по вектору  $\bar{v}^-(x_{k+m})$ , в зависимости от условий решаемой задачи.

В результате описанного процесса мы получим последовательность точек

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, \dots, \quad (5)$$

часть из которых лежит на поверхности  $S$ . Траекторией СУВКР в этом случае будем считать ломаную  $L$  с вершинами в точках (5). При условиях, наложенных на функцию  $f$ , ломаная  $L$  всегда будет иметь бесконечное число вершин и звеньев.

Система уравнений в конечных разностях, имеющая несколько поверхностей разрыва, задается  $N$  уравнениями

$$x_{k+1} = f_i(x_k), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.i)$$

и  $N$  списками поверхностей  $\Sigma_i = [S_{i,1}, S_{i,2}, \dots, S_{i,p_i}]$ , заданных неявными уравнениями

$$S_{i,j} : S_{i,j}(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p_i. \quad (7.i)$$

Авторами данной статьи на языке программирования пакета компьютерной алгебры Maple разработана программа SEFD (System of Equations in Finite Difference), осуществляющая графическое построение траекторий кусочно-непрерывной СУВКР (6.i), (7.i).

Данная процедура реализуется в виде следующей последовательности шагов.

**Шаг 1.** Вычисляются все необходимые для работы программы величины, в частности, вычисляется точка  $x_1^* = f_{IE}(x_0)$  и строится отрезок  $[x_0, x_1^*]$ .

Далее, выполняется  $n$ -кратный цикл из семи шагов, который повторяется до тех пор, пока не будет построена ломаная  $L$  из  $n$  звеньев.

**Шаг 2.** После построения отрезка  $[x_{k-1}, x_k^*]$ , где точка  $x_k^*$  находится с помощью уравнения системы (6.i), то есть  $x_k^* = f_i(x_{k-1})$ , составляются уравнения этого отрезка:  $x = x_k^* t + x_{k-1}(1-t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Шаг 3.** Правые части уравнений отрезка  $[x_{k-1}, x_k^*]$  подставляются в уравнения поверхностей  $Sfs[i][j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, ns[i]$ . В результате получаем  $ns[i]$  уравнений вида

$$Sfs[i][j](x_k^* t + x_{k-1}(1-t)) = 0. \quad (8)$$

На следующих шагах 4–8 находится очередное звено ломаной  $L$  и номер  $m$  системы, по которой будет продолжено движение.

**Шаг 4.** Решаются уравнения (8). Если ни одно из них не имеет решений, то полагаем  $j = 0$ ,  $\varphi:(k, 0) \rightarrow k$ ,  $m = k$ ,  $x_k = x_k^*$ , и отрезок  $[x_{k-1}, x_k]$  будет очередным звеном ломаной  $L$ . Движение продолжается по траектории системы (6.k).

**Шаг 5.** При непустом множестве  $sol[i][j]$  решений уравнений (8), то есть при  $sol[i][j] = \{t_1^j, t_2^j, \dots, t_{K_j}^j\} \neq \emptyset$ ,  $t_p^j > 0$ ,

$\forall p, j | p = 1, 2, \dots, K_j, j = 1, 2, \dots, ns[i]$ , где  $t_p^j \neq t_q^j$  для  $p \neq q$ , из множества ре-

шений  $\bigcup_{j=1}^{ns[i]} \bigcup_{p=1}^{K_j} \{t_p^j\}$  выбирается  $t^* = \min \left( \bigcup_{j=1}^{ns[i]} \bigcup_{p=1}^{K_j} \{t_p^j\} \right)$ . Если минимум дости-

гается для единственного значения  $t_{p_0}^{j_0}$ , то  $\varphi:(i, j_0) \rightarrow m$ .

Если при этом точка  $\bar{x} = x_k^* t^* + x_{k-1}(1-t^*)$  не лежит в области скользящих движений на поверхности  $Sfs[i][j_0]$ , то полагаем  $x_k = x_k^*$ , а если лежит, то  $x_k = \bar{x}$ . Отрезок  $[x_{k-1}, x_k]$  является очередным звеном ломаной  $L$ , а  $m$  – номер следующей системы (6.m) по которой будет продолжено движение.

Кроме того, вводится величина  $Q$ , которая равна нулю, если  $\bar{x}$  не лежит в области скользящих движений на поверхности  $Sfs[i][j_0]$  и равна 1 в противном случае.

**Шаг 6.** Когда указанный в шаге 5 минимум достигается одновременно для нескольких значений  $t_{p_1}^{j_1} = t_{p_2}^{j_2} = \dots = t_{p_q}^{j_q}$  (то есть точка  $\bar{x}_k$  лежит на пересечении нескольких поверхностей  $Sfs[i][j_1], Sfs[i][j_2], \dots, Sfs[i][j_q]$ ), номер  $j_0$  выбирается в зависимости от условий решаемой задачи. Мы полагаем  $j_0 = \min(j_1, j_2, \dots, j_q)$  и  $\varphi: (i, j_0) \rightarrow m$ .

Если точка  $\bar{x}$  не лежит в области скользящих движений, то  $x_k = x_k^*$ , а если лежит, то  $x_k = \bar{x}$ . Отрезок  $[x_{k-1}, x_k]$  – очередное звено ломаной  $L$ . Движение продолжается по траектории системы (6.м). Величину  $Q$  также полагаем равной нулю, если точка  $\bar{x}$  не лежит в области скользящих движений, и равной 1 в противном случае.

**Шаг 7.** При  $Q \neq 0$  точка  $x_k \in S_0 \subset Sfs[i][j_0]$ , где  $S_0$  – область скользящих движений. Тогда вычисляются односторонние пределы:  $f_{i,k}^- = \lim_{x \rightarrow x_k} f_i(x)$  и  $f_{m,k}^+ = \lim_{x \rightarrow x_k} f_m(x)$ .

Далее, выполняется цикл. Если вычислены  $f_{i,k+j}^-$  и  $f_{m,k+j}^+$ , то строится отрезок  $l_j: x = f_m^+(x_{k+j})t + (1-t)f_i^-(x_{k+j})$ ,  $0 \leq t \leq 1$  и находится точка пересечения его с поверхностью  $Sfs[i][j_0]$ . Если такая точка единственна, берем ее в качестве  $x_{k+j+1}$ . Если нет, то за  $x_{k+j+1}$  берем точку, отвечающую наименьшему значению параметра  $t$ .

Цикл завершается, если отрезок  $l_s$  не имеет точек пересечения с поверхностью  $Sfs[i][j_0]$  или точки пересечения не лежат в области скользящих движений.

**Шаг 8.** Когда цикл, описанный в шаге 7, закончился на отрезке  $l_s$ , точка  $x_{k+s}$  уже поострена, а в качестве следующей выбирается одна из двух точек  $f_i^+(x_{k+s})$  или  $f_i^-(x_{k+s})$  в зависимости от решаемой задачи. В нашей программе  $x_{k+s+1} = f_i^-(x_{k+s})$ .

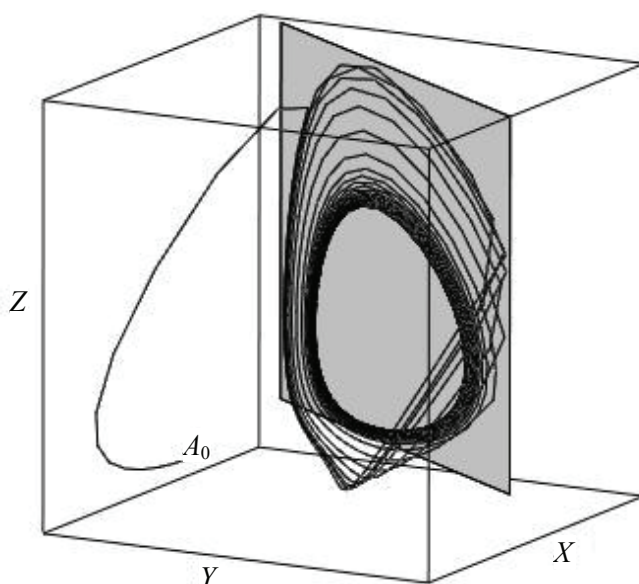
После завершения  $n$ -кратного цикла выполняется последний шаг.

**Шаг 9.** Выведение ломаной  $L$  и поверхностей  $S_{i,j}$  на экран.

Ниже приведем пример, иллюстрирующий работу программы SEFD.

Ранее авторами статьи было доказано, что система «один хищник – две жертвы» с перекрывающимися поколениями имеет предельные циклы [10]. Здесь рассмотрим СУВКР, описывающую динамику системы «один хищник – две жертвы» для случая неперекрывающихся поколений [4–5]. Разностные уравнения такой системы могут быть получены с помощью «гипотезы встреч» Вольтерра [3] или из дифференциальных уравнений [5]. Итак, при  $i = 1, 2; k = 0, 1, 2, \dots$  имеем СУВКР

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k(a - b_i z_k), \\ y_{k+1} = y_k(c - d_i z_k), \\ z_{k+1} = z_k(e + h_i x_k + g_i y_k), \end{cases} \quad (9.i)$$



Траектория СУвКР (9.1), (9.2), начинающаяся в точке  $A_0(4,5; 0,4; 0,1)$

где  $x_k$ ,  $y_k$  – численности жертв;  $z_k$  – численность хищника. Коэффициенты  $a, b_i, c, d_i, h_i, g_i$  ( $i=1,2$ ) – положительные параметры. Кроме того, из биологического смысла системы следует, что  $a > 1, c > 1$ , а  $e < 1$ .

Как и в [10], считаем, что движение происходит по траектории системы (9.1) в области

$$G^- = \{(x, y, z) | 0 < x < +\infty, 0 < y < x, 0 < z < +\infty\},$$

и по траектории системы (9.2) в области

$$G^+ = \{(x, y, z) | 0 < x < +\infty, x < y < +\infty, 0 < z < +\infty\}.$$

Изображенная на рисунке траектория построена с помощью программы SEFD для значений параметров:  $a=1,24$ ,  $c=1,124$ ,  $e=0,785$ ,  $b_1=1$ ,  $b_2=0,5$ ,  $d_1=0,1$ ,  $d_2=0,4898$ ,  $h_1=0,06$ ,  $h_2=0,5$ ,  $g_1=0,03$ ,  $g_2=0,05$ . Видно, как она навивается на предельный цикл, лежащий в плоскости разрыва, которая на рисунке затемнена.

#### Список литературы

1. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей : учеб. пособие для ун-тов / А.О. Гельфонд. – М. : Наука, 1967. – 375 с.
2. Березин, И.С. Методы вычислений. В 2 т. Т. 2 / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М. : Физматгиз, 1962. – 639 с.
3. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование : пер. с франц. / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1976. – 285 с.
4. Свирежев, Ю.М. Устойчивость биологических сообществ / Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет. – М. : Наука, 1978. – 352 с.

5. Пых, Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики / Ю.А. Пых. – М. : Наука, 1983. – 182 с.
  6. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М. : Наука, 1976. – 496 с.
  7. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов // Математический сборник. – 1960. – Т. 51(93), № 1. – С. 99–128.
  8. Уткин, В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой / В.И. Уткин. – М. : Наука, 1974. – 272 с.
  9. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.
  10. Амаатов, М.А. Исследование модели взаимодействия трех популяций, связанных трофическими отношениями / М.А. Амаатов, Г.М. Амадова, И.С. Кузнецова // Экологические системы и приборы. – 2009. – № 7. – С. 31–40.
- 

### **Computer Simulation of Processes Described by Discontinuous Finite Difference Equations**

**M.A. Amatov, G.M. Amatova**

*Belgorod State National Research University, Belgorod*

**Key words and phrases:** difference equations; discontinuous equations; interaction of populations; limit cycles; mathematical model; nonlinear dynamics.

**Abstract:** This paper describes the study of the systems of finite difference equations with discontinuous right member. The authors extended the definition of equations on the surfaces of discontinuity that allowed applying the mathematical apparatus of symbolic algebra package MAPLE. Drafted in the specified package the program allows generating trajectory of discontinuous systems. The biological system one predator – two victims with non-overlapping generations has been examined to illustrate the program.

---

© М.А. Амаатов, Г.М. Амадова, 2013