УДК 536.2.083

ФАЗОВЫЙ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИЙ МЕТОД ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН ДЛЯ КОНТРОЛЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент д-р техн. наук, профессор С.В. Пономарев

Ключевые слова и фразы: коэффициент температуропроводности; краевые задачи теплопроводности; температурные волны; фазовый полигармонический метод.

Аннотация: Определен коэффициент температуропроводности на основании решения краевой задачи теплопереноса в полуограниченном образце при контроле тепловых свойств материалов полигармоническим методом температурных волн в случае задания на поверхности образца температуры, изменение которой во времени представляет собой меандр.

Обозначения: a – коэффициент температуропроводности, м²/с; $T(x,\tau)$ – температура тела в точке с координатой x в момент времени τ; T_0 – начальная температура тела, К; T_A – амплитуда колебания температуры, К; τ_0 – период колебаний, с; φ – фаза температурной волны.

Введение

В практике измерений тепловых свойств широкое применение находят методы температурных волн, что объясняется рядом их неоспоримых преимуществ [1]. Однако используемые в настоящее время разновидности этих методов основываются на соотношениях моногармонической теории. Существенным недостатком данных методов является получение расчетных соотношений в предположении о затухании всех гармоник кроме пер-

Артюхина Екатерина Леонидовна – аспирант кафедры «Управление качеством и сертификация», e-mail: artyukhina@yahoo.com; Мищенко Сергей Владимирович – доктор технических наук, профессор, научный руководитель кафедры «Управление качеством и сертификация», советник ректората, ТамбГТУ, г. Тамбов.

вой, что ведет к уменьшению амплитуды измеряемого сигнала и необходимости регистрации изменения температур в долях градусов на фоне помех, то есть к увеличению погрешности методов.

В источнике [2] проводят гармонический анализ измеряемых температур образца. Отношения амплитуд одинаковых частот и разности фаз позволяют однозначно определить коэффициент температуропроводности. Недостатками этого подхода являются сложность реализации, отсутствие оценок влияния на точность измерений, отклонение условий эксперимента от условий, при которых выведены расчетные формулы [3].

Альтернативой вышеизложенным методам является применение полигармонических методов [4], использующих закономерности распространения пакета волн, что позволяет увеличить амплитуду измеряемого сигнала на порядок, то есть увеличить точность метода; существенно сократить длительность эксперимента за счет выбора контрольных точек вблизи границы; существенно увеличить объем информации.

Постановка и решение прямой задачи

При описании процесса теплопереноса в исследуемом образце будем предполагать однородность и изотропность материала, отсутствие в нем физико-химических превращений, приводящих к зависимости свойств от времени. Будем считать периодические процессы установившимися. Тогда температура в каждой точке тела может быть представлена в виде суммы постоянной составляющей $\overline{T}$, зависящей только от координат, и периодической составляющей $\widetilde{T}$, являющейся функцией координат и времени, причем $\frac{\widetilde{T}}{\overline{\overline{T}}} << 1$. Кроме того, $\int_0^{\tau_0} \widetilde{T} d\tau = 0$, где τ_0 – период изменения температуры.

Математическая модель температурного поля в исследуемом полуограниченном образце при изменении температуры на его поверхности в виде меандра имеет вид:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}; \tag{1}$$

$$\tau > 0, \quad 0 < x < \infty; \tag{2}$$

$$T(x, 0) = T_0 = 0; \tag{3}$$

$$T(\infty, 0) = 0; \tag{4}$$

$$T(0, \tau) = T_{\text{A}} f(\tau), \tag{5}$$

где

$$f(\tau) = \begin{cases} 1, \ k\tau_0 < \tau < \left(k + \frac{1}{2}\right)\tau_0, \\ -1, \ \left(k + \frac{1}{2}\right)\tau_0 < \tau < (k+1)\tau_0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{6}$$

Решение поставленной задачи в установившемся состоянии имеет вид [5]

$$T(x,\tau) = \frac{4T_A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left(-x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right) \sin\left(\frac{(4k+2)\pi\tau}{\tau_0} - x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right). \tag{7}$$

Перейдя в решении задачи (7) к безразмерным переменным $\mathrm{Fo}=\dfrac{a\tau_0}{x^2}$, $\tilde{\tau}=\dfrac{\tau}{\tau_0}$, $\vartheta(\mathrm{Fo},\tilde{\tau})=\dfrac{T(x,\tau)}{T_A}$, получим

$$\vartheta(\mathrm{Fo},\tilde{\tau})=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\exp\left(-\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{\mathrm{Fo}}}\right)\sin\left((4k+2)\pi\tilde{\tau}-\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{\mathrm{Fo}}}\right). \quad (8)$$

Решение коэффициентной задачи теплопроводности

Дополним краевую задачу (1)–(6) условием $T(x_и,\tau)$ = $T_{экс}(\tau)$, где $T(x_и,\tau)$ – измеряемая в эксперименте температура. Тогда, определяя время между одинаковыми значениями фаз температур на поверхности образца и в точке контроля, на основании решения (8) можно получить соотношение для определения искомого коэффициента температуропроводности.

Поскольку уравнение температурной волны в безразмерном виде (8) является функцией двух переменных – числа Фурье и относительного времени $\tilde{\tau}$, то при фиксации одной из них мы приходим к уравнению с одной переменной, для которого легко построить обратную функцию. Для различных значений чисел Fo_i, находим $\tau_{з i}$, такие что $\vartheta(\mathrm{Fo}_i,\tau_{з i})=0$. Таким образом, получаем двумерный массив данных $\{\mathrm{Fo}_i,\tau_{з i}\}$, аппроксимируя который, получим функцию Fo = Fo($\tau_з$), где $\tau_з=\varphi_1-\varphi_2$, φ_1 и φ_2 – фазы теплового возмущения и реакции температурного поля на это возмущение соответственно.

Поскольку τ_0 и x в эксперименте заданы, искомый коэффициент температуропроводности a определится соотношением $a=\dfrac{\mathrm{Fo}(\tau_з)x^2}{\tau_0}$, где $\mathrm{Fo}(\tau_з)$ – аппроксимация таблично заданной функции.

Ниже рассмотрен пример реализации описанного метода. Основываясь на решении (8), рассчитываем $\vartheta(\mathrm{Fo}_i,\tau_{з i})$ для фиксированных значений Fo в диапазоне Fo [3…70] и $\tilde{\tau}$ [0…1].

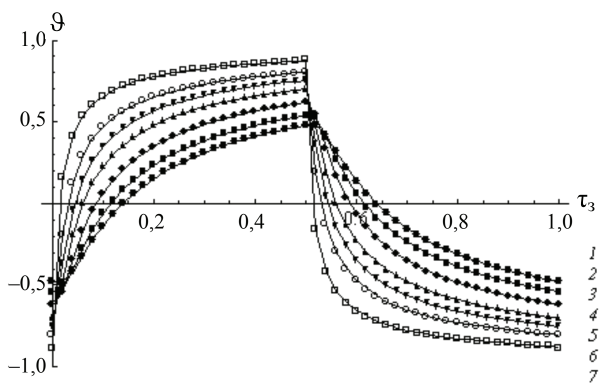

Рис. 1. Температурные кривые $\vartheta(\mathrm{Fo}_i=\mathrm{const},\tilde{\tau})$

Расчетные значения $\tau_з$ в зависимости от чисел Fo

Fo	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
$\tau_з$	0,139	0,126	0,115	0,106	0,099	0,092	0,087	0,082	0,078
Fo	8	10	15	20	24	30	36	60	65
$\tau_з$	0,071	0,06	0,044	0,035	0,03	0,025	0,022	0,014	0,013

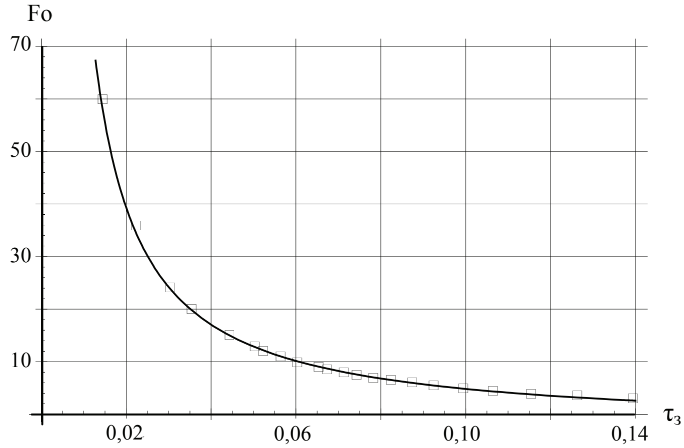

Рис. 2. Аппроксимация таблично заданной зависимости Fo($\tau_з$) полиномом третьей степени

Строим графики зависимостей $\vartheta(\mathrm{Fo}_i = \mathrm{const}, \tilde{\tau})$ (рис. 1). С использованием пакета Mathematica определяем значения времен запаздывания $\tau_з$, при которых $\vartheta(\mathrm{Fo}_i = \mathrm{const}, \tilde{\tau}) = 0$ (табл. 1).

Аппроксимируем таблично-заданную функцию полиномом

$$\mathrm{Fo} = -3{,}51331 + 0{,}000903994/\tau_з^2 + 0{,}812051/\tau_з. \quad (9)$$

Так для стандартных образцов из полиметилметакрилата при $x = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ м, $\tau_0 = 200$ с, значение $\tau_з$ составило 0,139, соответствующее ему значение Фурье – 3,0, а найденное значение коэффициента температуропроводности $a = 1{,}18 \cdot 10^{-7}$ м^2/с.

Отметим, что модификация изложенной методики дает простой надежный способ контроля коэффициента температуропроводности.

Выводы

Разработанный фазовый полигармонический метод температурных волн, обладая всеми преимуществами методов температурных волн, отличается от моногармонических методов на порядок более высокими значениями регистрируемых температур и существенно бóльшим объемом информации, что позволяет повысить точность контроля температуропроводности и в то же время существенно сократить время измерений.

Список литературы

1. Кравчун, С.Н. Метод периодического нагрева в экспериментальной теплофизике / С.Н. Кравчун, А.А. Липаев. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 208 с.
2. Angstrom, A.J. Neue Methode das Warmeleiltungs-vermogen der Korper zu bestimmen / A.J. Angstrom // Ann. d. Physik. – 1881. – Bd. 14. – P. 513.
3. Кондратьев, Г.М. Регулярный тепловой режим / Г.М. Кондратьев. – М. : Гостехиздат, 1954. – 408 с.
4. Артюхина, Е.Л. Полигармонический метод температурных волн для контроля температуропроводности / Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко // Современные методы и средства исследований теплофизических свойств веществ : сб. тр. II Междунар. науч.-техн. конф., г. Санкт-Петербург, 28–30 нояб. 2012 г. / НИУ ИТМО ; ИХиБТ, 2012. − С. 114.
5. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел : пер. с англ. / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.

Polyharmonic Phase Method of Temperature Waves to Control Thermal Diffusivity of Solid Isotropic Materials

E.L. Artyukhina, S.V. Mishchenko

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: boundary problems of thermal conductivity; coefficient of thermal diffusivity; phase polyharmonic method; temperature waves.

Abstract: The coefficient of thermal diffusivity on the basis of solution of the boundary problem of heat transfer in semi-bounded sample under control of the thermal properties of materials is calculated by polyharmonic method of temperature waves in the case of setting the temperature on the sample surface, which changes over time as a square wave.
