УДК 530.12+539.12

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧЕ ИЗМЕРЕНИЯ

А.С. Бешенков

ФГНУ «Институт содержания и методов обучения» Российской академии образования, г. Москва

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Б.У. Родионов

Ключевые слова и фразы: алгоритм; измерение; интерференция; множество; случайный процесс.

Аннотация: Рассмотрен новый подход к понятию множества как «интерференции» эффективного и случайного процессов и применение этого подхода к задаче измерения величин.

Введение

Как известно, фундаментальным понятием современной математики, а с ней и всего точного естествознания, является понятие множества. В оригинальном определении Г. Кантора множество есть «многое мыслимое как единое». Это определение предполагает наличие трансцендентных способностей субъекта мгновенно собрать все необходимые элементы в одно множество. Именно эти трансцендентные способности и подвергались основной критике, поскольку, с одной стороны, приводили к парадоксам, с другой – мало соответствовали реальному человеческому интеллекту.

На протяжении XX века канторовское понятие множества подвергалось самым разнообразным модификациям. Наиболее значимые из них формулировались в рамках интуиционизма, позднее – конструктивизма, теории нечетких множеств и др. Внутренние мотивы большинства из этих модификаций состояли в преодолении трансцендентного характера множества, придании ему более конкретного смысла, согласованного с познавательными возможностями homo sapiens.

Бешенков Алексей Сергеевич – аспирант лаборатории дидактики информатики, e-mail: srg57@mail.ru, ФГНУ «Институт содержания и методов обучения» Российской академии образования, г. Москва.

На основе анализа фундаментальной для теории множеств диагональной конструкции предпримем попытку сформулировать более «осязаемое» определение множества, оставаясь при этом в рамках классического канторовского универсума. Рассмотрим так же применение этого подхода к задаче измерения величин.

Диагональная конструкция

Рассмотрим классическую диагональную конструкцию.

Пусть у нас есть множество действительных чисел D. Предположим, что оно счетно. Сопоставим каждому элементу D некоторый номер x_i так, что

$$
\begin{aligned}
&x_1 : a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots \\
&x_2 : a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots \\
&x_3 : a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3n}, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_k : a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Поскольку D предполагается счетным, все его элементы оказываются занумерованными.

Построим новый элемент $y_1 = b_{11}, b_{12} \ldots$, такой что $b_{11} \neq a_{11}$, $b_{12} \neq a_{22}, \ldots, b_{1n} \neq a_{nn}, \ldots$. Очевидным образом, новый элемент не принадлежит множеству D, однако, является действительным числом. Традиционно это интерпретируется как несчетность D. Однако еще А.А. Зенкин [3] заметил, что добавление элемента y_1 не меняет предполагаемой счетности D и противоречия не возникает. Не вдаваясь в тонкости той и другой интерпретации диагональной конструкции, посмотрим на нее несколько иначе, с процессуальной точки зрения.

Рассмотрим вначале более простую модель.

Возьмем неограниченную последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Фиксируем некоторый шаг N и образуем конечное множество $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N\}$. С точки зрения классической теории множеств это означает, что из последовательности просто «вырезан» начальный фрагмент, полностью определяемый своими элементами.

Наша трактовка этой ситуации, подсказанная диагональной конструкцией, принципиально иная. Опираясь на работы [1, 2], мы можем предположить, что образование множеств M не может прервать течение процесса, заключенного в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. В этом случае M перестает быть множеством в канторовском смысле (то есть образованием, полностью определяемым своими элементами), а становится подобием «ящика» (который можно было назвать предмножеством), в который нужно «вместить» всю последовательность: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Это происходит следующим образом.

Изобразим для наглядности названную последовательность следующим образом

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_n \ldots$$

Фиксация первых N шагов приводит к тому, что процесс → «отражается» от a_N внутрь «ящика» M. При этом образуется новый элемент b_1, не совпадающий ни с одним a_i внутри «ящика» M. Если заменить конечное N на счетное ω, то получится результат, в точности совпадающий с результатом, полученным на основе диагональной конструкции.

В качестве отдаленной аналогии приведенной схемы можно представить себе волну, помещенную внутрь ящика конечных размеров и отражающуюся от его стенок. Множество в этом случае можно отождествить со стоячей волной. Различие в том, что «ящик» (предмножество), связанный с последовательностью, меняет свои «размеры».

«Поворот» последовательности $a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_n \ldots$ внутрь предмножества M, разумеется, не ограничивается только появлением числа b_1. Рассмотрим всю конструкцию подробнее.

Возьмем последовательность S_n целых неотрицательных чисел: 0, 1, 2, ... , n, ... Будем считать b_0 результатом «отражения» последовательности S_n от числа ω. При этом b_0 не совпадает ни с одним из чисел 0, 1, 2, ... , n, ...

Будем предполагать, что число b_0, а также все числа, полученные аналогичным образом, образуют линейно упорядоченное множество, что отражает факт течения времени, где числа являются метками, обозначающими это течение.

Заметим, что если не считать ω ограничителем последовательности S_n, то следующим шагом за ω было бы число ω +1:

$$0 \to 1 \to 2 \to \ldots \to \omega \to \omega+1, \ldots, \text{но}$$

$$0 \to 1 \to \ldots \to n \to b_0 \to n+1 \to \ldots \to \omega.$$

Далее рассмотрим последовательность S_n^{b0}: 0, 1, ..., n b_0 n+1, ..., для которой ω также является ограничителем. «Отражение» последовательности S_n^{b0} от ω обозначим через b_1. Далее можно получить отражение ω последовательности $S_n^{b0,b1}$ и т.д.

Возникает вопрос, – когда этот процесс может завершиться и что получится в результате этого завершения. В работе [2] содержится следующий ответ на этот вопрос: процесс завершатся на бесконечном числе Ω, после которого уже невозможно никакое продолжение процесса с различимыми элементами. Соответственно, конечным результатом отражений будет заполнение «без просветов» предмножества («ящика»), образованного последовательностью S_n, то есть континуума.

Весь процесс образования множества M может быть представлен как последовательное заполнение конечных «ящиков» – предмножеств

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_n \subseteq K_\omega \subseteq \ldots \subseteq K_\Omega = M,$$

где K_i – частично заполненное предмножество.

Заметим, что в математическом плане последовательности с отражениями можно рассматривать как «процессуальную» версию аксиомы Г. Кантора о вложенных отрезках (которая, как известно, «ответственна» за топологию действительной прямой).

Рассмотрим «начало»

$$0, 1, 2, \ldots , n, \ldots$$

и «конец»

$$\ldots \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\Omega$$

приведенной выше конструкции процесса.

Или в «обратную сторону»

$$\lambda_\Omega, \ldots\lambda_\varepsilon, \ldots\lambda_\tau, \ldots\lambda_\rho, \ldots,$$

где ε, τ, ρ – некоторые индексы (в общем случае, бесконечные).

Принципиально важно свойство этих последовательностей. «Начало» – это *натуральный ряд* или, в общем случае, *эффективная последовательность* (частично – рекурсивная функция). «Конец» – эта последовательность с подавляющим числом «отраженных» чисел и, следовательно, – *случайная последовательность* (в том или и ном смысле). Важной особенностью является то, что эти две последовательности осуществляются *одновременно.* Само же множество действительных чисел возникает как своеобразная *«интерференция»* двух этих последовательностей (если вспомнить аналогию с конечным ящиком).

Множество как «интерференция»

Рассмотренная конструкция позволяет сформулировать следующий подход к понятию множества действительных чисел M и, учитывая универсальный характер диагонального метода, множества вообще.

Множество M определяется парой (f, λ), где f – эффективная последовательность, которую в принципе можно свести к последовательности натуральных чисел, и λ – случайная последовательность, которая «достраивает» множество M. При этом само множество M возникает как «интерференция» (взаимопроникновение в рассмотренном выше смысле) этих двух процессов. Этот факт мы будем обозначать как $M = \mathrm{In}(f, \lambda)$.

Данной подход к понятию множества видится более «физичным», чем канторовская концепция. В нем просматривается своеобразная синергия («интерференция») между человеческими возможностями (последовательность f) и «природой» (последовательность λ). Можно даже говорить об «отклике Вселенной» (который является фундаментальным понятием в теории поглотителя Д.А. Уилера и Р. Фейнмана) [5].

В дальнейшем будем ассоциировать последовательность f с *локальным* процессом, а последовательность λ – с *глобальным.*

Подход, при котором $M = \mathrm{In}(f, \lambda)$, может быть охарактеризован следующим образом. Последовательность f – это последовательность порядковых чисел, понимаемых таким образом, как это представлено в работе [2]. С другой стороны, последовательность λ, направленная вспять и заполняющая предмножества, порождает количественные числа. Это значит, что множество M определяется как «количеством», так и «порядком», или, более конкретно, является *интерференцией* «количества» и «порядка». Это принципиально важный факт, как и само понятие «интерференции» последовательностей требует дальнейшего осмысления и детализации.

Эффективность и случайность

Приведенная выше конструкция требует тщательного изучения.

Наметим основные направления этой деятельности.

а) Алгоритмическую последовательность f и случайную последовательность λ можно рассматривать как «начало» и «конец» некой единой последовательности, которая трансформируется из эффективной в случайную. К осмыслению этой ситуации можно привлечь два факта.

Согласно теории алгоритмической вероятности, эффективное и случайное – это две стороны одного феномена. Во всяком случае, случайность может быть описана через эффективность (А.Н. Колмогоров, В.А. Успенский, А. Шень и др.).

С другой стороны, в своей знаменитой лекции «Автоматы и жизнь» А.Н. Колмогоров высказал следующую идею качественного деления натурального ряда. «Число A назовем малым, если возможно практически перебрать все схемы из A элементов с двумя входами и выходами…Число B назовем средним, если мы оказываемся не в состоянии перебрать все схемы из B элементов, а можем перебрать сами эти элементы…Число C – большое, если мы не в состоянии практически перебрать такое число элементов, а можем лишь ввести систему обозначений. Наконец, числа сверхбольшие, если и этого практически нельзя сделать» [4, с. 69].

Фактически, числа B – это числа, до которых можно «дотянуться» алгоритмом, а числа C можно рассматривать как случайные.

б) Предложенная концепция множества дает иную модель и стратегию измерения величин.

Пусть, например, мы имеем последовательность действительных чисел: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, полученных в результате некоторого измерения. С точки зрения нашего подхода этот набор чисел можно рассматривать как «интерференцию» эффективной и случайной последовательности (интерференцию «количества» и «порядка»). Общая стратегия состоит в том, чтобы найти механизм извлечения этих последовательностей из последовательности x_1, x_2, x_3, ..., x_n (с определенной долей приближения). На основе этих выделенных последовательностей можно, в принципе, понять закономерность, которой подчиняется последовательность x_1, x_2, x_3, ..., x_n.

Список литературы

1. Векшенов, С.А. Метафизика двойственности / С.А. Векшенов // Метафизика. Век XXI : альманах / под ред. Ю.С. Владимирова. – М., 2011. – Вып. 4. – С. 90–114.

2. Векшенов, С.А. Является ли «множество действительных чисел» множеством? / С.А. Векшенов // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2000. – Т. 5, вып.5. – С. 519–535.
3. Зенкин, А.А. Ошибка Георга Кантора / А.А. Зенкин // Вопр. философии. – 2000. – № 2. – С. 165–168.
4. Колмогоров, А.Н. Автоматы и жизнь / А.Н. Колмогоров // Метафизика. Век XXI : альманах / под ред. Ю.С. Владимирова. – М., 2011. – Вып. 4. – С. 57–75.
5. Wheeler, J.A. Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation / J.A. Wheeler, R.P. Feyman // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17. – P. 157–181.

**A New Approach to the Defining Real Number Set
and its Application to the Problem of Measuring**

A.S. Beshenkov

*Institute of Content and Methods of Teaching
of the Russian Academy of Education, Moscow*

Key words and phrases: algorithm; interference; measurement; set; stochastic process.

Abstract: A new approach to the concept of the set as the “interference” of effective and random processes is studied. The question of the application of this approach to the problem of measurement values is discussed.
