УДК 537.612

ИЗУЧЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В КУРСЕ ФИЗИКИ БАКАЛАВРИАТА

Н.Я. Молотков

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент д-р техн. наук, профессор О.И. Гайнутдинов

Ключевые слова и фразы: бегущие волны; волновое уравнение; скорость распространения; электромагнитное поле.

Аннотация: Рассмотрены уравнения Максвелла и волновые уравнения поля для одномерного случая распространения, что значительно упрощает теоретический подход к изучению электромагнитных волн в курсе физики по программе бакалавриата.

Электромагнитное поле описывается уравнениями Дж.К. Максвелла. Для свободного пространства, в котором отсутствуют электрические заряды $(\rho = 0)$ и токи проводимости $(\bar{j} = 0)$, эти уравнения в интегральной форме записи имеют вид:

$$\oint_L \overline{H} d\bar{l} = \varepsilon_0 \varepsilon \int_S \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \right) d\overline{S}; \tag{1}$$

$$\oint_L \overline{E} d\bar{l} = -\mu_0 \mu \int_S \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \right) d\overline{S}. \tag{2}$$

Из первого уравнения Максвелла (1) следует, что при изменении во времени напряженности $\overline{E}$ электрического поля возникает вихревое магнитное поле с напряженностью $\overline{H}$. При этом замкнутые силовые линии магнитного поля $\overline{H}$ охватывают силовые линии электрического поля $\overline{E}$, причем направления $\dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t}$ и $\overline{H}$ образуют «правовинтовую» систему. Из второго уравнения Максвелла (2) следует, что при изменении во времени магнитного поля $\overline{H}$ индуцируется вихревое электрическое поле $\overline{E}$.

Молотков Николай Яковлевич – доктор педагогических наук, профессор кафедры «Физика», e-mail: phys@nnn.tstu.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов.

При этом замкнутые силовые линии электрического поля $\overline{E}$ охватывают силовые линии магнитного поля $\overline{H}$, причем направления $\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial t}$ и $\overline{E}$ образуют «левовинтовую» систему. Следовательно, вихревые электрические и магнитные поля взаимосвязаны и образуют единое электромагнитное поле. При этом направления векторов электрического $\overline{E}$ и магнитного $\overline{H}$ полей в любой точке свободного пространства взаимно перпендикулярны. Электромагнитное поле может распространяться в свободном пространстве в виде волны, причем направление распространения волны происходит перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\overline{E}$ и $\overline{H}$. Другими словами электромагнитная волна поперечна.

Для получения уравнений Максвелла в дифференциальной форме записи и нахождения волновых уравнений многие авторы учебников по физике [1–2] используют векторный анализ и операции rot и div. Этого можно избежать, если рассматривать распространение волн в одном направлении, например, вдоль оси x, то есть считать, что электрические и магнитные поля являются функциями одной координаты x и времени t: $E = E(x;t)$ и $H = H(x;t)$. Найдем уравнения Максвелла в дифференциальной форме записи для одномерного случая.

Пусть вектор $\overline{E} = E_y \bar{j}$ совпадает с осью y, а вектор $\overline{H} = H_z \bar{k}$ – с осью z прямоугольной системы координат (рис. 1). Подсчитаем циркуляцию вектора $\overline{H}$ по замкнутому прямоугольному контуру $1-2-3-4-1$, расположенному перпендикулярно оси y. Стороны контура равны Δx и Δz; точка 1 имеет координаты $(x;y;z)$,

$$\oint\limits_{1-2-3-4-1} \overline{H} d\bar{l} = \Delta z H_z(x+\Delta x) - \Delta z H_z(x).$$

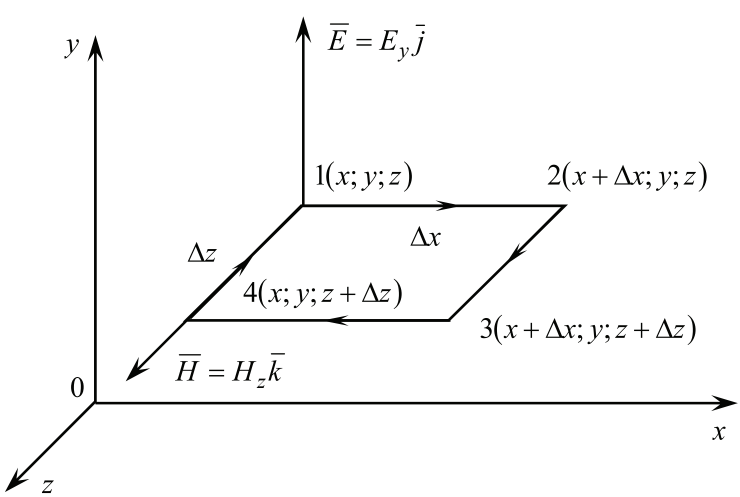

Рис. 1. Циркуляция вектора $\overline{H}$, расположенного перпендикулярно оси y

В случае достаточно малого отрезка Δx можно считать, что

$$H_z(x+\Delta x)=H_z(x)+\Delta x\frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Тогда для циркуляции вектора $\overline{H}$ по указанному контуру найдем выражение:

$$\oint\limits_{1-2-3-4-1}\overline{H}d\overline{l}=\Delta x\Delta z\frac{\partial H_z}{\partial x}. \qquad (3)$$

Вычислим поток вектора $\dfrac{\partial\overline{E}}{\partial t}$ через поверхность рассматриваемого (см. рис. 1) контура $1-2-3-4-1$ площадью равной $\Delta x\Delta z$:

$$\int\limits_{\Delta x\Delta z}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}d\overline{S}=\Delta x\Delta z\frac{\partial E_y}{\partial t}. \qquad (4)$$

Подставляя полученные выражения (3) и (4) в уравнение (1), найдем первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме записи для одномерного случая:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}, \qquad (5)$$

то есть изменение напряженности магнитного поля H_z на единичном отрезке вдоль оси x пропорционально скорости изменения напряженности электрического поля E_y.

Вычислим циркуляцию вектора $\overline{E}$ по замкнутому прямоугольному контуру $1-2-3-4-1$, расположенному перпендикулярно оси z (рис. 2).

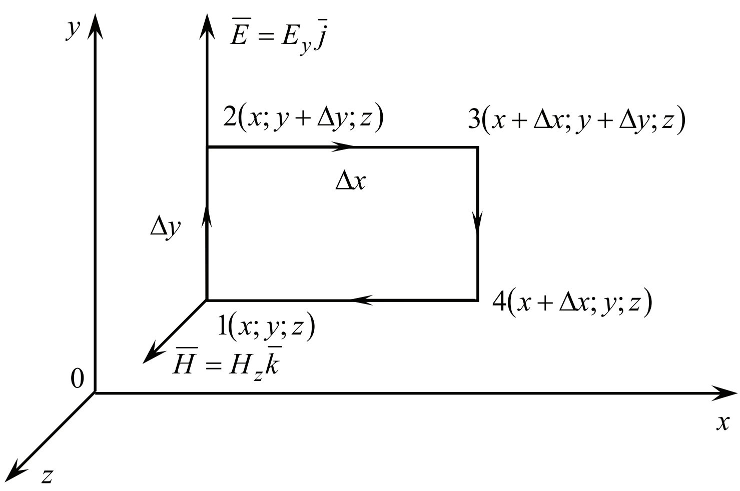

Рис. 2. Циркуляция вектора $\overline{E}$, расположенного перпендикулярно оси *z*

Стороны контура равны: Δx и Δy; точка 1 имеет координаты $(x; y; z)$. Вектор $\bar{E} = E_y \bar{j}$ расположен по оси *y*; вектор $\bar{H} = H_z \bar{k}$ – по оси *z*:

$$\oint\limits_{1-2-3-4-1} \bar{E} d\bar{l} = -\Delta y E_y (x + \Delta x) + \Delta y E_y (x).$$

Учитывая, что

$$E_y (x + \Delta x) = E_y (x) + \Delta x \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

найдем

$$\oint\limits_{1-2-3-4-1} \bar{E} d\bar{l} = -\Delta x \Delta y \frac{\partial E_y}{\partial x}. \qquad (6)$$

Вычислим поток вектора $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$ через поверхность рассматриваемого контура $1-2-3-4-1$ (см. рис. 2) площадью $\Delta x \Delta y$:

$$\int\limits_{\Delta x \Delta z} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} d\bar{S} = \Delta x \Delta y \frac{\partial H_z}{\partial t}. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (2) найдем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме записи для одномерного случая распространения волн:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \qquad (8)$$

то есть изменение напряженности электрического поля E_y на единичном отрезке вдоль оси *x* пропорционально скорости изменения напряженности магнитного поля H_z.

В учебнике [3] переход от интегральных к дифференциальным уравнениям Максвелла дается для трехмерного случая распространения волн, что значительно усложняет математическое обоснование, которое нецелесообразно использовать в курсе физики бакалавриата.

Найдем волновое уравнение для электрической составляющей электромагнитной волны. Для этого продифференцируем по времени первое уравнение Максвелла (5):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Изменяя порядок дифференцирования по *t* и *x*, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \qquad (9)$$

Из уравнения (8) имеем

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial E_y}{\partial x}. \qquad (10)$$

Подставляя это выражение в соотношение (9), найдем волновое уравнение для электрической составляющей волны для одномерного случая

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \tag{11}$$

Легко показать, что волновое уравнение для магнитной составляющей волны имеет такой же вид

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0. \tag{12}$$

Полученные волновые уравнения связывают процесс распространения электромагнитного поля со свойствами среды. Решением волновых уравнений (11) – (12) для одномерного случая могут служить уравнения плоской бегущей монохроматической волны:

$$E_y = E_m \sin(\omega t - kx); \tag{13}$$

$$H_z = H_m \sin(\omega t - kx), \tag{14}$$

где ω – круговая частота; k – волновое число; E_m и H_m – амплитуды вихревых электрических и магнитных полей. Из формул (13) – (14) следует, что в любой фиксированной точке $x = x_0 = \text{const}$ свободного пространства электрические и магнитные поля совершают колебания с одинаковой частотой ω, причем их фазы kx_0 совпадают, то есть поля $\overline{E}$ и $\overline{H}$ одновременно достигают максимального или минимального значения в данной точке пространства $x_0 = \text{const}$. С другой стороны, для фиксированного момента времени $t = t_0 = \text{const}$ вдоль оси x существует периодическое распределение напряженностей электрического и магнитного полей по одному и тому же закону, то есть поля $\overline{E}$ и $\overline{H}$ в одних и тех же точках достигают максимального значения и в одних и тех же точках поля обращаются в ноль.

Докажем, что уравнения (13) – (14) являются решением волновых уравнений (11) – (12). Продифференцируем выражение (13) дважды по t и по x:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_m \sin(\omega t - kx); \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k^2 E_m \sin(\omega t - kx). \tag{16}$$

Подставляя полученные выражения в волновое уравнение (11) найдем

$$-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \omega^2 = 0 .$$

Откуда получим

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}}.$$

Учитывая, что $\frac{\omega}{k} = V$ – фазовая скорость волны, найдем

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \tag{17}$$

Отсюда следует, что электромагнитные волны могут распространяться в вакууме $(\varepsilon = 1;\ \mu = 1)$. При этом скорость волн равна скорости света

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \tag{18}$$

Следовательно, скорость электромагнитных волн в любой среде может быть вычислена по формуле

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \tag{19}$$

Отсюда находим абсолютный показатель преломления для электромагнитных волн:

$$n = \frac{c}{V} = \sqrt{\varepsilon \mu}. \tag{20}$$

Дифференцируя уравнения бегущих волн (13) – (14) по t и по x, найдем:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \omega E_m \cos(\omega t - kx),$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = k^2 H_m \cos(\omega t - kx).$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение Максвелла (8) найдем волновое сопротивление среды

$$\rho = \frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}}. \tag{21}$$

Для вакуума $(\varepsilon = 1;\ \mu = 1)$ волновое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \text{ Ом}. \tag{22}$$

Экспериментальное обоснование теории электромагнитного поля в диапазоне СВЧ дано в нашей работе [4].

Выводы

1. Дано теоретическое обоснование перехода от интегральных к дифференциальным уравнениям Максвелла для одномерного случая распространения электромагнитного поля.

2. Для одномерного случая получены волновые уравнения электромагнитного поля и дано их решение в виде плоских бегущих монохроматических волн.

3. Выводы, получаемые из одномерных уравнений электромагнитного поля, согласуются с результатами, получаемыми из трехмерных уравнений.

Список литературы

1. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 3 т. Т. 2 / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1973. – 431 с.
2. Детлаф, А.А. Курс физики. В 3 т. Т. 3. Волновые процессы. Оптика. Атомная и ядерная физика / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М. : Высшая школа, 1979. – 511 с.
3. Калашников, С.Г. Электричество : учеб. пособие / С.Г. Калашников. – М. : Наука, 1970. – 666 с.
4. Молотков, Н.Я. Учебные эксперименты по волновой оптике. СВЧ-демонстрации / Н.Я. Молотков. – Долгопрудный : Интеллект, 2011. – 347 с.

Study of the Theory of Electromagnetic Field in Physics Bachelor's Course

N.Ya. Molotkov

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: running waves; wave equation; velocity of propagation; electromagnetic field.

Abstract: The paper studies Maxwell's equations and wave equations for one-dimensional case distribution, which greatly simplifies the theoretical approach to the study of electromagnetic waves in the course of physics for bachelors.
