

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

---

УДК 681.322

## СТАЦИОНАРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

**В.К. Битюков, А.Е. Емельянов**

*ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий», г. Воронеж*

*Рецензент д-р техн. наук, профессор В.С. Кудряшов*

**Ключевые слова и фразы:** закон распределения; конкурирующий доступ; стохастическая передача.

**Аннотация:** Разработана математическая модель стохастической передачи информации по каналам с конкурирующим методом доступа для стационарного режима. Показано, что количество уравнений в модели не зависит от числа сетевых устройств, участвующих в обмене информацией.

В работах [1, 2] разработана математическая модель стохастической передачи информации по каналам с конкурирующим методом доступа, которая позволяет получить закон распределения вероятности времени доставки пакета и определить основные вероятностно-временные характеристики процесса передачи данных. Однако данная модель обладает высокой вычислительной сложностью, которая выражается в том, что с увеличением числа сетевых устройств, участвующих в обмене информацией, значительно увеличивается количество уравнений, которые необходимо решить для получения результата. Так, если в информационном обмене участвуют 30 сетевых устройств, то для определения закона распределения необходимо решить в общей сложности около 750 уравнений. Однако для стационарного режима стохастической передачи информации по каналам с конкурирующим методом доступа удастся существенно уменьшить количество уравнений математической модели. Для этого необходимо перейти от состояний модели к обобщенным состояниям. Далее рассмотрен переход к обобщенным состояниям и получение стационарной модели,

---

Битюков Виталий Ксенофонович – доктор технических наук, профессор, президент ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий», заведующий кафедрой «Информационные и управляющие системы»; Емельянов Александр Егорович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные и управляющие системы», e-mail: emalexeg@yandex.ru, ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий», г. Воронеж.

при этом все допущения, ограничения и обозначения сохраняются для ранее разработанных моделей.

Рассмотрим состояния системы передачи данных по каналу с конкурирующим методом доступа, указанные на полном графе [1]. В качестве примера рассмотрим все состояния  $S_i = S_{i,k}$ . Такие состояния представлены на рис. 1. Здесь схематично указаны возможные переходы из состояний  $S_{i,k}$  в другие состояния и обратно. С целью уменьшения размерности математической модели сформируем обобщенные состояния рассматриваемой системы (см. рис. 1).

В этом случае обобщенными состояниями рассматриваемой системы будут:

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{0,k}; & \bar{S}_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{4,k}; & \bar{S}_2 &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{8,k}; & \bar{S}_3 &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{9,k}; & \bar{S}_4 &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{1,k}; \\ \bar{S}_5 &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{5,k}; & \bar{S}_6 &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{2,k}; & \bar{S}_7 &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{6,k}; & \bar{S}_8 &= \sum_{k=0}^{n-1} (S_{7,k} + S_{10,k}); & \bar{S}_9 &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{3,k}. \end{aligned}$$

Тогда вероятности этих состояний будут равны:

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{0,k}(t); & \bar{P}_1(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{4,k}(t); & \bar{P}_2(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{8,k}(t); & \bar{P}_3(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{9,k}(t); \\ \bar{P}_4(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{1,k}(t); & \bar{P}_5(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{5,k}(t); & \bar{P}_6(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{2,k}(t); & \bar{P}_7(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{6,k}(t); \\ \bar{P}_8(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} (P_{7,k}(t) + P_{10,k}(t)); & \bar{P}_9(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{3,k}(t). \end{aligned}$$

В этом случае рассматриваемую систему можно описать следующим вектором состояний:  $(i, j, k)$ , где  $i$  – состояние канала передачи (0, 1, 2, 3);  $j$  – наличие или отсутствие заявки в выделенном устройстве, независимо от того находится ли данная заявка в самом устройстве или на обслуживании в канале передачи (0 – заявки нет, 1 – заявка есть);  $k$  – наличие или отсутствие в канале передачи заявки от сетевых устройств, отличных от выделенного устройства (0 – заявки нет, 1 – заявка есть).

Тогда для обобщенных состояний данной системы можно записать:

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &- (0, 0, 0); & \bar{S}_1 &- (0, 1, 0); & \bar{S}_2 &- (1, 1, 0); & \bar{S}_3 &- (2, 1, 0); & \bar{S}_4 &- (1, 0, 1); \\ \bar{S}_5 &- (1, 1, 1); & \bar{S}_6 &- (2, 0, 1); & \bar{S}_7 &- (2, 1, 1); & \bar{S}_8 &- (3, 1, 0); & \bar{S}_9 &- (3, 0, 0). \end{aligned}$$

Для получения дифференциальных уравнений, описывающих изменение вероятностей нахождения рассматриваемой системы в данных состояниях, просуммируем дифференциальные уравнения системы (1) в [1] по  $k$ .

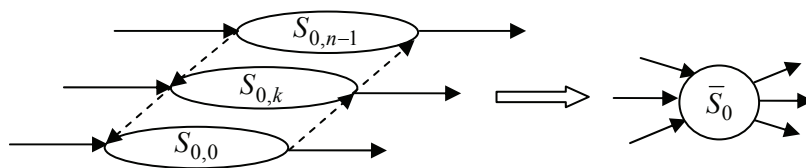


Рис. 1. Формирование обобщенных состояний

Так для первого уравнения данной системы имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{dP_{0,k}(t)}{dt} = -\lambda_1 \sum_{k=0}^{n-1} kP_{0,k}(t) - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} [(n-k)(P_{0,k}(t) - P_{0,k-1}(t))] + \\ + \mu \sum_{k=0}^{n-1} P_{2,k+1}(t) + \mu \sum_{k=0}^{n-1} P_{9,k}(t) + \mu_2 \sum_{k=0}^{n-1} P_{3,k}(t).$$

С учетом введенных выше обозначений, данное уравнение примет вид

$$\frac{d\bar{P}_0(t)}{dt} = - \left[ \lambda + \lambda_1 \left( \frac{\sum_{k=0}^{n-1} kP_{0,k}(t)}{\bar{P}_0(t)} \right) \right] \bar{P}_0(t) + \mu \bar{P}_6(t) + \mu \bar{P}_3(t) + \mu_2 \bar{P}_9(t).$$

Вводя обозначения:

$$k_1(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} kP_{0,k}(t)}{\bar{P}_0(t)}; \quad k_2(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} kP_{1,k+1}(t)}{\bar{P}_4(t)}; \quad k_3(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} kP_{4,k}(t)}{\bar{P}_1(t)}; \\ k_4(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} kP_{5,k+1}(t)}{\bar{P}_5(t)}; \quad k_5(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} kP_{8,k}(t)}{\bar{P}_2(t)},$$

и проводя суммирование для всех уравнений системы [1] так, как это было проведено выше, получим систему дифференциальных уравнений для обобщенных состояний  $\bar{S}_i$ , где  $i = 0, 9$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{P}_0(t)}{dt} = -[\lambda + \lambda_1 k_1(t)] \bar{P}_0(t) + \mu \bar{P}_3(t) + \mu \bar{P}_6(t) + \mu_2 \bar{P}_9(t); \\ \frac{d\bar{P}_1(t)}{dt} = -[\lambda_1 + \lambda_1 k_3(t)] \bar{P}_1(t) + \lambda \bar{P}_0(t) + \mu \bar{P}_7(t) + \mu_2 \bar{P}_8(t); \\ \frac{d\bar{P}_2(t)}{dt} = -[\mu_1 + \lambda_1 k_5(t)] \bar{P}_2(t) + \lambda_1 \bar{P}_1(t); \\ \frac{d\bar{P}_3(t)}{dt} = -\mu \bar{P}_3(t) + \mu_1 \bar{P}_2(t); \\ \frac{d\bar{P}_4(t)}{dt} = -[\mu_1 + \lambda + \lambda_1 k_2(t)] \bar{P}_4(t) + \lambda_1 k_1(t) \bar{P}_0(t); \\ \frac{d\bar{P}_5(t)}{dt} = -[\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_1 k_4(t)] \bar{P}_5(t) + \lambda_1 k_3(t) \bar{P}_1(t) + \lambda \bar{P}_4(t); \\ \frac{d\bar{P}_6(t)}{dt} = -(\mu + \lambda) \bar{P}_6(t) + \mu_1 \bar{P}_4(t); \\ \frac{d\bar{P}_7(t)}{dt} = -\mu \bar{P}_7(t) + \mu_1 \bar{P}_5(t) + \lambda \bar{P}_6(t); \\ \frac{d\bar{P}_8(t)}{dt} = -\mu_2 \bar{P}_8(t) + \lambda_1 k_5(t) \bar{P}_2(t) + \lambda_1 (k_4(t) + 1) \bar{P}_5(t) + \lambda \bar{P}_9(t); \\ \frac{d\bar{P}_9(t)}{dt} = -(\mu_2 + \lambda) \bar{P}_9(t) + \lambda_1 k_2(t) \bar{P}_4(t). \end{array} \right.$$

Условие нормировки:  $\sum_{i=0}^9 \bar{P}_i(t) = 1$ .

Граф обобщенных состояний, соответствующий полученной системе дифференциальных уравнений, представлен на рис. 2.

Таким образом, произошла свертка полного графа системы [1]. От графа, количество состояний которого определялось количеством сетевых устройств рассматриваемой системы, удалось перейти к графу с постоянным числом обобщенных состояний. При этом, естественно, количество уравнений, описывающих данный граф, тоже постоянно, и, в данном случае, равно десяти. Однако полученная система дифференциальных уравнений не является независимой. Для ее решения требуется знание вероятностей  $P_{i,j}(t)$ , входящих в коэффициенты  $k_i(t)$ .

Для практики существенный интерес представляет стационарный режим передачи данных по каналу с конкурирующим доступом. Проанализируем коэффициенты  $k_i(t)$  для этого режима.

Рассмотрим коэффициент

$$k_1(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} kP_{0,k}(t)}{\bar{P}_0(t)}.$$

Введем обозначения для стационарных значений:

$$k_1 = k_1(\infty); \quad P_{0,k} = P_{0,k}(\infty); \quad \bar{P}_0 = \bar{P}_0(\infty).$$

Тогда для стационарного режима имеем

$$k_1 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} kP_{0,k}}{\bar{P}_0}.$$

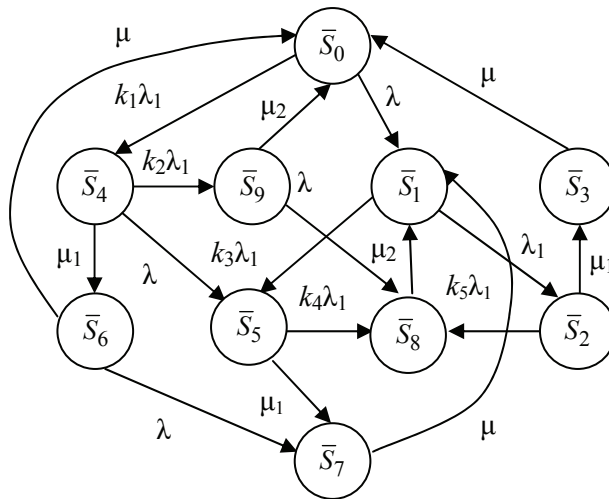


Рис. 2. Граф обобщенных состояний

Рассмотрим следующие события:

- $A$  – в выделенном устройстве имеется заявка;
- $B_k$  – в  $k$  устройствах, отличных от выделенного, имеются заявки;
- $C$  – канал передачи свободен.

Тогда для вероятности  $P_{0,k}$  можно записать

$$P_{0,k} = P(\overline{C}AB_k) = P(\overline{C}A)P(B_k / \overline{C}A),$$

а для  $\overline{P}_0$  имеем

$$\overline{P}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} P_{0,k} = P(\overline{C}A),$$

в этом случае

$$k_1 = \sum_{k=0}^{n-1} kP(B_k / \overline{C}A).$$

Таким образом, коэффициент  $k_1(t)$  представляет собой условное математическое ожидание числа заявок в устройствах при свободном канале передачи и отсутствии заявки в выделенном устройстве.

Заметим, что в стационарном режиме наличие или отсутствие заявки в данном устройстве не зависит от наличия или отсутствия заявок в других устройствах.

Так, если  $B$  – событие, означающее, что в сетевом устройстве, отличном от выделенного, имеется заявка, то в стационарном режиме для рассматриваемого состояния имеем:

$$P(B / C) = P(A / C);$$

$$P(B / \overline{C}A) = P[(B / C) / (\overline{A} / C)] = P(B / C).$$

Тогда для коэффициента  $k_1$  можно записать

$$k_1 = (n-1)P(B / C) = (n-1)P(A / C).$$

Учитывая, что

$$P(A / C) = \frac{P(AC)}{P(C)}; \quad P(C) = \overline{P}_0 + \overline{P}_1; \quad P(AC) = \overline{P}_1,$$

имеем

$$P(A / C) = \frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_0 + \overline{P}_1}.$$

Тогда окончательно для коэффициента  $k_1$  запишем

$$k_1 = \frac{(n-1)\overline{P}_1}{\overline{P}_0 + \overline{P}_1}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, получим для остальных коэффициентов следующие выражения:

$$k_2 = \frac{(n-2)\overline{P}_5}{\overline{P}_4 + \overline{P}_5}; \quad k_3 = \frac{(n-1)\overline{P}_1}{\overline{P}_0 + \overline{P}_4}; \quad k_4 = \frac{(n-2)\overline{P}_5}{\overline{P}_4 + \overline{P}_5}; \quad k_5 = \frac{(n-1)\overline{P}_5}{\overline{P}_4 + \overline{P}_5}.$$

С учетом выражений для коэффициентов  $k_i(t)$  и условия нормировки, полученная выше система уравнений при  $t \rightarrow \infty$  представляет собой стационарную математическую модель стохастической передачи информации по каналам с конкурирующим методом доступа.

Разработанная математическая модель позволяет определять закон распределения вероятностей времени передачи данных и основные вероятностно-временные характеристики этого процесса [2]. При этом, из-за малой размерности полученной модели, определение указанных характеристик не встречает вычислительных трудностей.

*Работа выполнена в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы».*

#### *Список литературы*

1. Абрамов, Г.В. Математическая модель информационной системы с множественным доступом к каналу передачи данных / Г.В. Абрамов, А.Е. Емельянов, К.Ч. Колбая // Системы упр. и информ. технологии. – 2006. – № 4(26). – С. 5–8.
2. Абрамов, Г.В. Определение закона распределения времени обслуживания заявки информационной системы с множественным доступом к каналу передачи / Г.В. Абрамов, А.Е. Емельянов, К.Ч. Колбая // Системы упр. и информ. технологии. – 2008. – № 3(33). – С. 40–42.

---

### **Stationary Mathematical Model of Stochastic Information Transfer**

**V.K. Bityukov, A.E. Emelyanov**

*Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh*

**Key words and phrases:** competing access; the distribution law; the stochastic transfer.

**Abstract:** On channels with a competing method of access the mathematical model of stochastic information transfer is developed for a stationary mode. It is shown that the quantity of the equations in model doesn't depend on the number of the network devices participating in information interchange.

---

© В.К. Битюков, А.Е. Емельянов, 2012