УДК 532.5

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ПЛЕНОК ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ В ПОЛЕ КРАЕВЫХ ВОЛН НАД НЕОДНОРОДНЫМ ШЕЛЬФОМ

Е.Л. Авербух, А.А. Куркин

ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Е.М. Громов

Ключевые слова и фразы: динамика примеси; топографические захваченные волны; усиление; частота отсечки; энергия.

Аннотация: Динамика примеси в поле топографических захваченных волн над шельфом с цилиндрическим рельефом дна, параметры которого медленно изменяются во вдольбереговом направлении, исследована в рамках линейной теории мелкой воды. Изучено влияние медленной вдольбереговой изменчивости подводного рельефа на параметры поля скоростей и концентрации загрязнения. Отмечен эффект минимальной частоты, который может приводить к непропусканию волн старших мод и, следовательно, увеличению концентрации примесей в этой области.

В большинстве теоретических исследований, базирующихся на классической линейной теории краевых волн [2, 9], рассматривается бассейн с цилиндрической геометрией, когда глубина океана зависит лишь от поперечной к берегу координаты. Реальные ситуации, как правило, сложнее, и приходится принимать во внимание двумерную изменчивость глубины бассейна. Так, например, в работах [5, 6] анализировалось влияние медленной вдольбереговой изменчивости подводного рельефа на усиление краевых волн; в работе [10] анализировались захват и рассеяние топографических волн на эстуариях и мысах; в статье [8] рассматривалось рассеяние краевых волн береговыми структурами, перпендикулярными к линии берега. В настоящей работе мы исследуем нестационарную динамику пленок поверхностно-активных веществ (**ПАВ**) в поле краевых волн над неоднородным шельфом в случае, когда глубина есть функция двух горизон-

Авербух Елена Леонидовна – аспирант кафедры «Прикладная математика», e-mail: Averbukh.lena@gmail.com; Куркин Андрей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика», e-mail: aakurkin@gmail.com, ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород.

тальных координат с сильной зависимостью от поперечной к берегу координаты *x* и слабой зависимостью от вдольбереговой координаты.

В линейной теории мелкой воды динамика загрязнений описывается уравнением баланса поверхностной концентрации ПАВ $\Gamma(x, y, t)$ для «двухмерной» пленки [7]:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \frac{\partial(u\Gamma)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Gamma)}{\partial y} = D\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial y^2}\right) + \frac{\Gamma_0 - \Gamma}{\tau},$$
(1)

где u(x, y, t), v(x, y, t) – компоненты двухмерной (поверхностной) заданной скорости гидродинамического потока; D – коэффициент горизонтальной (поверхностной) диффузии; τ – характерное время релаксации пленки, описывающее процессы обмена с более глубокими слоями воды; Γ_0 – равновесная концентрация пленки на поверхности раздела (в отсутствии течения).

Согласно линейной теории краевых волн поле горизонтальных приповерхностных скоростей задается в виде [9]:

$$u(x, y, t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{gk}{\omega}F(y)\exp i(\omega t - kx)\right\}; \quad v(x, y, t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{ig}{\omega}\frac{dF}{dy}\exp i(\omega t - kx)\right\}, \quad (2)$$

где Re – знак вещественной части получаемых выражений; ω – частота волны; k – вдольбереговое волновое число; F(y) – структура моды краевой волны, которая находится как решение линейной краевой задачи вида

$$\frac{d^2F}{dy^2} + \frac{1}{h}\frac{dh}{dy}\frac{dF}{dy} + \left(\frac{\omega^2}{gh} - k^2\right)F = 0$$
(3)

с соответствующими граничными условиями на берегу и бесконечности. Структура собственных функций определяется формой донного рельефа h(y) и частотой волны.

Теперь мы рассмотрим обобщение этой задачи, когда глубина моря представима в виде $h = h(y, \varepsilon x)$, где $\varepsilon << 1$ – малый параметр. Поскольку вдольбереговые изменения формы дна предполагаются гладкими, форма волны в нулевом порядке по ε должна иметь вид, аналогичный случаю отсутствия вдольбереговой изменчивости формы дна, со слабой зависимостью от вдольбереговой координаты. В данном случае, согласно [5, 6], уравнения для амплитуды A(X) краевой волны и ее волнового числа k(X) имеют вид:

$$A^{2}(X)k(X)\int_{y_{0}(X)}^{\infty}h(y,X)F^{2}(y,X)dy = \text{const};$$
(4)

$$k^{2}(X)\int_{y_{0}(X)}^{\infty}h(y,X)F^{2}(y,X)dy = \frac{\omega^{2}}{g}\int_{y_{0}(X)}^{\infty}F^{2}(y,X)dy - \int_{y_{0}(X)}^{\infty}h(y,X)\left(\frac{\partial F(y,X)}{\partial y}\right)^{2}dy,$$
(5)

где $X = \varepsilon x$; $k(X) = \frac{d\theta}{dx}$, $\theta(x) - \phi$ аза, связанная с волновым вдольбереговым числом; F(y, X) -модальная функция; g -ускорение свободного падения; $y_0(x) -$ береговая линия.

Таким образом, амплитуда A(X) краевой волны, ее волновое число k(X) и поперечная структура F(y, X) полностью определены и могут быть ис-

УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО. №2(40). 2012.

пользованы для исследования эволюции примеси на шельфе, параметры которого медленно изменяются вдоль берега.

Далее мы рассмотрим эволюцию примеси в поле краевых волн над вогнутым экспоненциальным шельфом

$$h(y) = H_0(1 - \exp(-ay)),$$

где H_0 – постоянная глубина на бесконечности; a^{-1} – характерная ширина шельфа. Дисперсионное соотношение и собственные функции в этом случае имеют аналитические выражения:

$$\begin{split} \omega^2 &= \frac{gH_0a^2}{2} \Biggl((2n+1)\sqrt{1 + \frac{4k_n^2}{a^2}} - (2n^2 + 2n + 1) \Biggr); \\ G_n(k, y) &= \exp(-apy) \frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(2p+n+1)} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{\Gamma(2p+n+j+1)}{\Gamma(2p+j+1)} (-1)^j \exp(-ajy); \\ p &= \frac{1}{2} \Biggl(\sqrt{1 + \frac{4k^2}{a^2}} - (2n+1) \Biggr) > 0, \end{split}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Важной характеристикой дисперсионных кривых для краевых волн над экспоненциальным шельфом является минимальная частота существования отдельных мод, которая определяется выражением

$$\omega_n^{\min} = a [g H_0 n(n+1)]^{1/2}, \tag{6}$$

а также длинноволновая асимптотика для скорости волн, определяемая скоростью на максимальной глубине H_0 .

Закон изменения амплитуды краевой волны при медленном изменении параметров экспоненциального шельфа H_0 и *а* для низшей моды (n = 0) определяется выражением

$$A^{2} \sim \frac{1}{H_{0}\sqrt{\left(2\omega^{2} + gH_{0}a^{2}\right)^{2} - g^{2}H_{0}^{2}a^{4}}\left(1 - \frac{2\omega^{2}}{2\omega^{2} + gH_{0}a^{2}}\right)}$$

Для первой (*n* = 1) моды изменения амплитуды волны описываются выражением вида

$$A^{2} \sim \frac{q(1+q)(1+2q)(3+2q)}{H_{0}\Theta \sqrt{\left(\frac{2\omega^{2}}{gH_{0}a^{2}}+5\right)^{2}-9}},$$

где

$$\Theta = 4q^{3} + 12q^{2} + 11q + 3 - 2c^{2}q(2q^{2} + 3q + 1) + cq(c+2)(4q^{2} + 8q + 3) - 2q(2c+1)(2q^{2} + 5q + 3);$$
$$c = \frac{\Gamma(2q+3)\Gamma(2q+1)}{\Gamma^{2}(2q+2)}; \qquad q = \frac{1}{3} \left(\frac{\omega^{2}}{gH_{0}a^{2}} - 2\right).$$

Здесь необходимо отметить, что уже для первой моды (в отличие от нулевой) действует ограничение на частоту волны: $\omega > \omega_1^{\min}$, которое определяется выражением (6). Однако минимальная частота (6) также зависит от параметров шельфа H_0 и *a*, поэтому она также изменяется при изменении этих величин, а, значит, может достигнуть частоты волны, при этом волна такой частоты больше не может существовать, и ее амплитуда должна уменьшаться до нуля при приближении ω_1^{\min} к частоте волны (рис. 1).



Рис. 1. Изменение амплитуды (*a*) и критической частоты (б) волны первой моды краевых волн над экспоненциальным шельфом при изменении глубины шельфа на бесконечности: $1 - a = 0.05 \text{ m}^{-1}$; $2 - a = 0.04 \text{ m}^{-1}$; $3 - a = 0.03 \text{ m}^{-1}$

Рассмотрим далее эволюцию ПАВ в поле краевых волн над медленно изменяющимся вогнутым экспоненциальным шельфом, описываемую уравнением (1), которое исследовалось численно с помощью неявной разностной схемы и метода переменных направлений. В качестве граничных

условий на берегу использовалось условие непротекания $\frac{\partial \Gamma}{\partial n} = 0$, а мори-

стая граница области предполагалась достаточно далекой, так чтобы волновые возмущения не успевали доходить в эту область за время расчетов, то есть концентрация там не изменялась и всегда оставалась равной начальной, или равновесной, концентрации Γ_0 . На боковых границах было задано периодическое граничное условие.

На рисунке 2 представлена эволюция поля концентраций для низшей моды краевых волн.



Рис. 2. Распределение концентрации в поле низшей моды краевых волн в различные моменты времени для модели адвекции–диффузии–релаксации ($D = 10 \text{ m}^2/\text{c}, \tau = 3 \text{ мин}$) при изменении глубины шельфа на бесконечности: $a - t = 3 \text{ с; } \delta - t = 2 \text{ мин; } 6 - t = 4 \text{ мин; } 2 - t = 8 \text{ мин}$

На рисунке 2 наблюдается монотонное изменение концентрации, связанное с монотонным изменением амплитуды волны во вдольбереговом направлении. Изменение концентрации ПАВ при распространении старших мод на границе области их непропускания показано на рис. 3. Скорость изменения на границе велика, поэтому асимптотические формулы строго не работают, однако ясно, что «оставшееся» волновое поле уже не будет представлять собой распространяющуюся волну.

Помимо случая с равномерным первоначальным распределением концентрации пленки Γ_0 , интересным является случай разлива нефтяного пятна в поле топографических захваченных волн с вдольбереговым медленным изменением параметра шельфа. Рассмотрим начальное поле модельной формы в виде круглого пятна высокой концентрации. В общем



Рис. 3. Распределение концентрации в поле первой моды краевых волн в различные моменты времени для модели адвекции–диффузии–релаксации ($D = 10 \text{ m}^2/\text{c}, \tau = 3 \text{ мин}$) при изменении глубины шельфа на бесконечности: $a - t = 3 \text{ с}; \ 6 - t = 2 \text{ мин}; \ 6 - t = 4 \text{ мин}; \ 2 - t = 8 \text{ мин}$

УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО. №2(40). 2012.

случае форма пятна произвольная. Распределение пленки поверхностноактивных веществ в поле топографических захваченных волн (1 мода) с учетом медленного изменения параметра шельфа во вдольбереговом направлении приведено на рис. 4.

Для более подробного анализа на рис. 5 представлены распределения концентрации вдоль линии берега X на срезе Y = 30 (центр пятна). Воздей-



ствие диффузии на пленку проявляется с первых секунд расчета (штрихпунктирная линия). Под действием поля краевых волн пятно делится на две части: левая часть становится областью с уменьшающейся концентрацией, а в правой части концентрация увеличивается, превышая первоначальное распределение пятна, и образуется зона конвергенции (сплошная черная линия). В последующие моменты времени конвергентная зона образуется с левой стороны (пунктирная линия), но в целом уровень концентрации становится все меньше, с одновременным увеличением размеров пятна, так как эффекты релаксации и диффузии вносят свой вклад в распределение ПАВ (серая линия).

Необходимо отметить, что отклонение концентрации от равновесного значения не превышает 6 % над вогнутым экспоненциальным шельфом при усилении поля краевых волн в связи с малой изменчивостью топографии прибрежной зоны. Однако отклонение от равновесного значения будет зависеть не только от модели шельфа, но и от номера моды. Максимальные и минимальные значения концентрации ПАВ для различных аппроксимаций рельефа дна и различных ветвей дисперсионного соотношения для линейной бегущей краевой волны представлены на рис. 6 и в таблице [1]. Видно, что с увеличением номера моды увеличиваются экстремумы отклонения концентрации от равновесного значения. При численных расчетах использовались следующие входные параметры: начальный уровень концентрации Г₀ единичный (обезразмеренный), временная сетка имела шаг в 2 с, а пространственная – в 3 м, обычно область расчета представляла собой квадрат со стороной в 200 точек. Время расчета 5 мин. Для исследования влияния только структуры моды параметры были подобраны таким образом, чтобы волновое число и частота были одинаковые для всех профилей дна: $k \approx 0.02$ рад/м; $\omega \approx 0.08$ рад/с.



УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО. №2(40). 2012.

Максимальные и минимальные значения концентраций

| Модель | 0 мода | | 1 мода | | 2 мода | |
|--------------------------------------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|
| | max | min | max | min | max | min |
| Бесконечный откос | 1,0002 | 0,9998 | 1,301 | 0,785 | 2,347 | 0,502 |
| Шельф-ступенька | 1,0060 | 0,9940 | 1,007 | 0,993 | 1,009 | 0,991 |
| Вогнутый экспоненци- альный шельф | 1,0020 | 0,9980 | 1,011 | 0,989 | 1,022 | 0,979 |

Для анализа зависимости концентрации от номера моды линейной бегущей краевой волны оценим уровень энергии волнового поля на площади *XY*, которая согласно [3] может быть вычислена в виде:

$$W_{\rm KHH} = \frac{1}{2} \rho \int_{0}^{XY} \int_{0}^{y} \upsilon^2 dx dy, \quad W_{\rm HOT} = \frac{1}{2} \rho g \int_{0}^{XY} \int_{0}^{y} \eta^2 dx dy.$$
(7)

Для поля краевых волн кинетическая и потенциальная энергии представимы в виде:

$$\begin{split} W_{\text{KHH}} &= \frac{g^2 \rho}{2\omega^2} \Biggl[k^2 \Biggl(\frac{X}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2\omega t - 2kX) + \frac{\sin(2\omega t)}{4k} \Biggr) \int_0^Y F^2(y) dy + \\ &+ \Biggl(\frac{X}{2} + \frac{1}{4k} \sin(2\omega t - 2kX) - \frac{\sin(2\omega t)}{4k} \Biggr) \int_0^Y \Biggl(\frac{dF(y)}{dy} \Biggr)^2 dy \Biggr]; \\ W_{\text{HOT}} &= \frac{\rho g}{2} \Biggl(\frac{X}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2\omega t - 2kX) + \frac{\sin(2\omega t)}{4k} \Biggr) \int_0^Y F^2(y) dy. \end{split}$$

Тогда их общая энергия

$$W_{0\bar{0}} = \left(\frac{X}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2\omega t - 2kX) + \frac{\sin(2\omega t)}{4k}\right) \left(\frac{\rho g}{2} + \frac{g^2\rho k^2}{2\omega^2}\right)_0^Y F^2(y)dy + \frac{g^2\rho}{2\omega^2} \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4k}\sin(2\omega t - 2kX) - \frac{\sin(2\omega t)}{4k}\right)_0^Y \left(\frac{dF(y)}{dy}\right)^2 dy.$$
(8)

Рассмотрим подробнее энергетические характеристики для модели «бесконечного откоса»:

$$h(y) = \operatorname{tg}(\beta)y,$$

где β – угол наклона дна. Решение ограничено на берегу и на бесконечности, выражается в полиномах Лагерра L_n .

Модальная структура для этого случая будет иметь вид [4]

$$F(y) = A_n L_n(2ky) e^{-ky}$$

где A_n – амплитуда при y = 0; n – номер моды.

Для данного случая были аналитически вычислены значения общей энергии трех низших мод:

$$\begin{split} W_{06}(n=0) &= \frac{1-e^{-2kY}}{2k} \left(\frac{X}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2\omega t - 2kX) + \frac{\sin(2\omega t)}{4k} \right) \times \\ &\times \left(\frac{\rho g}{2} + \frac{g^2 \rho k^2}{2\omega^2} \right) + \frac{g^2 \rho k}{2\omega^2} \frac{1-e^{-2kY}}{2} \times \\ &\times \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4k} \sin(2\omega t - 2kX) - \frac{\sin(2\omega t)}{4k} \right); \end{split}$$

$$\begin{split} W_{06}(n=1) &= \frac{1}{-2k} \left(4k^2 Y^2 e^{-2kY} + e^{-2kY} - 1 \right) \left(\frac{\rho g}{2} + \frac{g^2 \rho k^2}{2\omega^2} \right) \times \\ &\times \left(\frac{X}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2\omega t - 2kX) + \frac{\sin(2\omega t)}{4k} \right) + \\ &+ \frac{g^2 \rho}{2\omega^2} \left(\frac{5}{2} k + e^{-2kY} \left(-\frac{5}{2} k + 4k^2 Y - 2k^3 Y^2 \right) \times \\ &\times \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4k} \sin(2\omega t - 2kX) - \frac{\sin(2\omega t)}{4k} \right) \right); \end{split}$$

$$\begin{split} W_{06}(n=2) &= \frac{e^{-2kY} \left(4k^4 Y^4 - 8k^3 Y^3 + 8k^2 Y^2 + 1 \right) - 1}{-2k} \times \\ &\times \left(\frac{X}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2\omega t - 2kX) + \frac{\sin(2\omega t)}{4k} \right) \left(\frac{\rho g}{2} + \frac{g^2 \rho k^2}{2\omega^2} \right) + \\ &+ \frac{g^2 \rho}{2\omega^2} \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4k} \sin(2\omega t - 2kX) - \frac{\sin(2\omega t)}{4k} \right) \times \\ &\times \left(\frac{9}{2}k + e^{-2kY} \left(-\frac{9}{2}k + 16k^2 Y - 24k^3 Y^2 + 12k^4 Y^3 - 2k^5 Y^4 \right) \right). \end{split}$$

Для параметров расчета, которые были использованы при получении результатов, изображенных на рис. 6 и в таблице, показатель энергии для различных мод над линейно-наклонным шельфом составил: 0 мода – 188 Дж, 1 мода – 501 Дж, 2 мода – 1006 Дж.

На рисунке 8 представлены зависимости уровня концентрации ПАВ на линии уреза от общей энергии волнового поля на линиях, выделенных согласно рис. 7.

Таким образом, чем выше номер моды, тем выше уровень общей энергии краевых волн над бесконечным откосом, то есть более высокий уровень отклонения концентрации от равновесного значения для более высоких мод связан с показателями энергии краевых волн. Несимметричность отклонений концентрации от равновесного значения связана с формированием зон конвергенции и дивергенции для положительных и отрицательных отклонений от единичного значения соответственно.



Рис. 7. Уровень концентрации пленки ПАВ вдоль линии уреза для бесконечного откоса первой моды



ВОПРОСЫ СОВРЕМЕННОЙ НАУКИ И ПРАКТИКИ.

В заключение следует отметить, что медленное изменение батиметрии может усиливать краевые волны и приводить к появлению аномально высоких краевых волн в прибрежной зоне и высоких отклонений уровня концентрации для более высоких мод в связи с образованием более высоких значений энергии. Полученные результаты исследований могут быть использованы для интерпретации радиолокационных снимков поверхности морей.

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, а также при поддержке гранта РФФИ 10–05–00199а.

Список литературы

1. Авербух, Е.Л. Моделирование динамики пленок поверхностноактивных веществ в поле линейных бегущих краевых волн на шельфе моря / Е.Л. Авербух, О.Е. Куркина, А.А. Куркин // Вестн. Моск. гос. открытого ун-та. Москва. Сер.: Естеств. науки. – 2011. – № 2. – С. 109–122.

2. Герман, В.Х. Вероятностный анализ и моделирование колебаний уровня моря / В.Х. Герман, С.П. Левиков. – Л. : Гидрометиздат, 1988. – 232 с.

3. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М. : Физматгиз, 1963. – Ч. 1. – 584 с.

4. Куркин, А.А. Нелинейная и нестационарная динамика длинных волн в прибрежной зоне / А.А. Куркин. – Н. Новгород : Изд-во Новгород. гос. техн. ун-та, 2005. – 330 с.

5. Куркин, А.А. Вариации амплитуды краевых волн при медленном вдольбереговом изменении параметров шельфа / А.А. Куркин, Е.Н. Пелиновский, О.Е. Полухина // Изв. Рос. акад. наук. Физика атмосферы и океана. – 2006. – Т. 42, № 3. – С. 353–361.

6. Полухина, О.Е. Динамика краевых волн в океане / О.Е. Полухина, А.А. Куркин, В.А. Дубинина. – Н. Новгород : Изд-во Новгород. гос. техн. ун-та. – 2006. – 136 с.

7. Полухина, О.Е. Численное моделирование динамики пленок поверхностно-активных веществ в поле нестационарных неоднородных течений и волн / О.Е. Полухина, Т.Г. Талипова // Изв. Акад. инженер. наук им. А.М. Прохорова. Приклад. математика и механика. – 2002. – Т. 3. – С. 3–11.

8. Baquerizo, A. Edge Wave Scattering by a Coastal Structure / A. Baquerizo, M.A. Losada, I.J. Lozada // Fluid Dynamics Research. – 2002. – Vol. 31. – P. 275 – 287.

9. Rabinovich, A.B. Long Ocean Gravity Waves: Trapping, Resonance, Leaking / A.B. Rabinovich. – St. Petersburg : Hydrometeoizdat, 1993. – 326 p.

10. Stoker, T.F. The Trapping and Scattering of Topographic Waves by Estuaries and Headlands / T.F. Stoker, E.R. Johnson // J. Fluid Mech. - 222(1991). - P. 501–524.

Nonstationary Surfactant Dynamics in the Field of Edge Waves above a Nonuniform Beach

E.L. Averbukh, A.A. Kurkin

Nizhny Novgorod State Technical University, Nizhny Novgorod

Key words and phrases: amplification; cutoff frequency; energy; impurity dynamics; topographic trapped waves.

Abstract: The dynamics of impurities in the field of topographic trapped waves over a cylindrical shelf, whose parameters vary slowly in the long shore direction, was investigated within linear shallow water theory. There was studied the slow long shore variability influence of the underwater topography on the parameters of the velocity field and concentration of pollution. The effect of the minimal frequency was noted, which can lead to non-transmission of higher waves modes, and hence, can increase the concentration of impurities in this area.

© Е.Л. Авербух, А.А. Куркин, 2012