

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ЧАСТОТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗА С ПОРИСТЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

А.В. Медведева, Д.М. Мордасов

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент д-р техн. наук, профессор В.Ф. Першин

Ключевые слова и фразы: амплитуда колебаний при резонансе; математическая модель; резонансная частота; пневмодинамическая измерительная система; пористый материал; преобразование Лапласа; эффективная пористость.

Аннотация: Получено математическое описание физических процессов, происходящих при гармоническом возмущающем воздействии газа на пористый материал, размещенный в изолированной пневматической камере. Создана математическая модель, связывающая параметры пористой структуры с давлением в измерительной системе, положенная в основу метода измерения пористости материалов.

Тонкодисперсные порошки находят применение как наполнители для новых материалов и композитов, пигменты, компоненты покрытий, абразивы для химико-механической планаризации, катализаторы, керамические материалы, материалы для электроники, материалы для производства стекла и т.п. Разработка новых способов получения многофункциональных кристаллических материалов для оптоэлектроники, новой элементной базы приборов микро- и нанoeлектроники, сплавов нового поколения невозможна без детального изучения состава и свойств используемых при этом различных порошковых материалов.

Определение параметров пористости порошковых материалов является сложной прикладной задачей. Одним из важнейших параметров, характеризующих пористые материалы, является пористость, определяемая как отношение объема пустот в материале к его полному объему.

В настоящее время известно большое число методов исследования пористой структуры дисперсных материалов. Методам присущи свои дос-

Медведева Анна Валерьевна – аспирант кафедры «Материалы и технология»; Мордасов Денис Михайлович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Материалы и технология», e-mail: mit@mail.nnn.tstu.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов.

тоинства и недостатки. Основные недостатки связаны со сложностью аппаратной реализации и длительностью эксперимента. Методы, основанные на использовании газа, обладают высокой точностью за счет того, что газы лучше проникают в поровое пространство.

Наиболее перспективными из пневматических методов [3–5] являются пневмодинамические [1], согласно которым в измерительной емкости создают гармонические изменения давления и о свойствах материала судят по изменению параметров колебаний на выходе системы.

Повышение точности существующих методов контроля пористости, а также создание новых требует выявления и тщательного изучения физических основ процессов, происходящих при пневмочастотном взаимодействии.

Для получения математического описания процессов, происходящих при частотном взаимодействии газа с пористым материалом, предложено рассматривать пористый материал, помещенный в измерительную емкость, как пневматическую камеру второго порядка.

На рисунке 1 представлена физическая модель пневмодинамической измерительной системы, которая включает в себя камеру 1 переменного объема, пневматическое сопротивление 2, являющееся аналогом сопротивления пор вещества, и камеру 3, характеризующую объем открытых пор.

Состояние газа в камере 1 согласно закону Клапейрона–Менделеева описывается уравнением

$$P_{\text{ВЫХ}} V_{\Gamma} = \theta_{\Gamma} R T, \quad (1)$$

где V_{Γ} , θ_{Γ} , $P_{\text{ВЫХ}}$ – объем, масса и давление газа в камере 1 соответственно, м^3 , кг, Па; R – газовая постоянная, Дж/(кг · К); T – температура газа, К.

Объем камеры 1 подвергают гармоническим изменениям по закону

$$V_{\Gamma}(t) = V_0 + \Delta V \sin \omega t, \quad (2)$$

где V_0 – начальный объем камеры 1, м^3 ; ΔV – амплитуда изменений объема камеры 1, м^3 ; $\omega = 2\pi f$ – угловая частота, рад/с, f – частота, Гц; t – время, с.

При изменении объема V_{Γ} начинается процесс заполнения открытых пор вещества. Через дроссель 2 инициируется расход газа G , величина которого определяется в виде

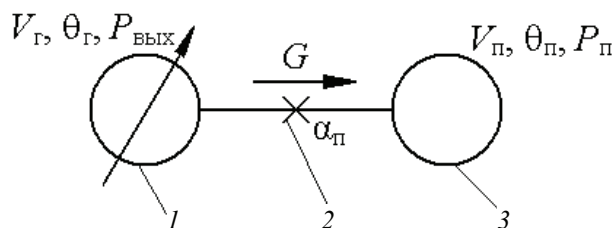


Рис. 1. Физическая модель пневмодинамической измерительной системы

$$G = \alpha_{\Pi} (P_{\text{ВЫХ}}(t) - P_{\Pi}(t)), \quad (3)$$

где α_{Π} – суммарная проводимость пор вещества, м·с; P_{Π} – давление газа в камере 3, Па.

С другой стороны, расход газа G представляет собой скорость изменения массы газа в камерах 1 и 3, то есть

$$G = \frac{d\theta_{\Gamma}(t)}{dt} = \frac{d\theta_{\Pi}(t)}{dt}. \quad (4)$$

При заполнении камеры 3 состояние газа в ней изменяется по закону Клапейрона–Менделеева

$$P_{\Pi} V_{\Pi} = \theta_{\Pi} RT, \quad (5)$$

где V_{Π} , θ_{Π} – объем и масса газа в камере 3 соответственно, м³ и кг.

Уравнения (1) – (5) образуют систему уравнений и представляют собой математическое описание процессов, происходящих в пневмопульсационной измерительной системе.

Продифференцировав уравнения (1) и (5), получим

$$\begin{cases} V_{\Gamma}(t) \frac{dP_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + P_{\text{ВЫХ}}(t) \frac{dV_{\Gamma}(t)}{dt} = RT \frac{d\theta_{\Gamma}(t)}{dt}; \\ V_{\Pi} \frac{dP_{\Pi}(t)}{dt} = RT \frac{d\theta_{\Pi}(t)}{dt}; \\ V_{\Gamma}(t) = V_0 + \Delta V \sin \omega t; \\ G = \alpha_{\Pi} (P_{\text{ВЫХ}}(t) - P_{\Pi}(t)); \\ G = \frac{d\theta_{\Gamma}(t)}{dt} = \frac{d\theta_{\Pi}(t)}{dt}. \end{cases} \quad (6)$$

Решением системы (6) относительно $P_{\text{ВЫХ}}(t)$ является дифференциальное уравнение, описывающее динамику изменения давления в камере 1 при гармоническом изменении ее объема в виде

$$\frac{d^2 P_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^2} + K_1 \frac{dP_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + K_2 P_{\text{ВЫХ}}(t) = 0, \quad (7)$$

где K_1 , K_2 – коэффициенты, определяемые параметрами пористой среды и величиной возмущающего воздействия соответственно, с⁻¹ и с⁻².

Уравнение (7) в области изображений (с учетом теоремы дифференцирования для оригинала [2]) имеет вид

$$\begin{aligned} s^2 P_{\text{ВЫХ}}(s) - s P_{\text{ВЫХ}}(+0) - P'_{\text{ВЫХ}}(+0) + K_1 s P_{\text{ВЫХ}}(s) - \\ - K_1 P_{\text{ВЫХ}}(+0) + K_2 P_{\text{ВЫХ}}(s) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где s – оператор Лапласа; $P_{\text{ВЫХ}}(s)$ – изображение функции $P_{\text{ВЫХ}}(t)$; $P_{\text{ВЫХ}}(+0)$, $P'_{\text{ВЫХ}}(+0)$ – предельные значения, к которым стремятся функции $P_{\text{ВЫХ}}(t)$, $P'_{\text{ВЫХ}}(t)$, когда t стремится к нулю справа.

Положив в уравнении (8) $P_{\text{ВЫХ}}(+0)=0$, а $P'_{\text{ВЫХ}}(+0)=1$, получим изображение функции $P_{\text{ВЫХ}}(t)$

$$P_{\text{ВЫХ}}(s) = \frac{1}{s^2 + K_1s + K_2}. \quad (9)$$

Решение дифференциального уравнения (7) находим при помощи обратного преобразования Лапласа в виде

$$\begin{cases} P_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{e^{-At}}{\sqrt{A^2 - B}} \operatorname{sh}(\sqrt{A^2 - B}t); \\ A = \frac{\delta V \cos \omega t (\omega T_n + \operatorname{tg} \omega t) + (1 - \Pi_3)}{2T_n(1 + \delta V \sin \omega t)}; \\ B = \frac{\delta V \cos \omega t}{T_n(1 + \delta V \sin \omega t)}, \end{cases} \quad (10)$$

где A – коэффициент, определяемый эффективной пористостью материала, с^{-1} ; B – коэффициент, зависящий от объема камеры l (см. рис. 1) и скорости его изменения, с^{-1} ; $\delta V = \frac{\Delta V}{V_0}$ – относительное изменение объема камеры l ;

$T_n = \frac{V_n}{\alpha_n RT}$ – время дросселирования при заполнении пор, с ; $\Pi_3 = \frac{V_n}{V_0}$ – эффективная пористость.

Для упрощения математической модели (10) с целью ее дальнейшего использования при исследовании пористых материалов были проанализированы значения коэффициентов A и B при различных значениях величин $\Pi_3, T_n, \delta V$. Доказано, что величина коэффициента B пренебрежимо мала по сравнению с A^2 и таким образом коэффициент B можно опустить при проведении расчетов. Таким образом, система уравнений (10) примет следующий вид

$$\begin{cases} A = -2P_{\text{ВЫХ}} + \frac{1}{2t} W \left(\frac{t e^{\frac{t}{P_{\text{ВЫХ}}}}}{-P_{\text{ВЫХ}}} \right), \\ \Pi_3 = 1 - 2T_n A, \end{cases} \quad (11)$$

при

$$W \left(\frac{te^{\frac{t}{P_{\text{ВЫХ}}}}}{-P_{\text{ВЫХ}}} \right) \approx \begin{cases} 0,665 \left(1 + 0,0195 \ln \left(\frac{te^{\frac{t}{P_{\text{ВЫХ}}}}}{-P_{\text{ВЫХ}}} \right) \right) \ln \left(1 + \frac{te^{\frac{t}{P_{\text{ВЫХ}}}}}{-P_{\text{ВЫХ}}} \right) + 0,04, & \text{при } 0 < \frac{te^{\frac{t}{P_{\text{ВЫХ}}}}}{-P_{\text{ВЫХ}}} \leq 500, \\ \ln \left(\frac{te^{\frac{t}{P_{\text{ВЫХ}}}}}{-P_{\text{ВЫХ}}} \right) - \left(1 - \frac{1}{\ln \left(\frac{te^{\frac{t}{P_{\text{ВЫХ}}}}}{-P_{\text{ВЫХ}}} \right)} \right) \ln \ln \left(\frac{te^{\frac{t}{P_{\text{ВЫХ}}}}}{-P_{\text{ВЫХ}}} \right), & \text{при } \frac{te^{\frac{t}{P_{\text{ВЫХ}}}}}{-P_{\text{ВЫХ}}} > 500. \end{cases}$$

Система уравнений (11) связывает значение эффективной пористости с параметрами пневматического воздействия.

Для экспериментальной проверки полученной математической модели была проведена серия экспериментов с пористыми материалами на установке, схема которой представлена на рис. 2.

Установка включает в себя управляющее устройство (УУ) 1; усилитель низкой частоты (УНЧ) 2; электродинамический генератор (ЭДГ) пневматических колебаний (динамик с подвижной мембраной) 3; измерительную емкость 4 с пористым материалом 5; поршень 6; микрофон 7; усилитель низкой частоты 8; осциллограф 9; частотомер 10; вычислительное устройство (ВУ) 11 и устройство для отображения информации (УОИ) 12.

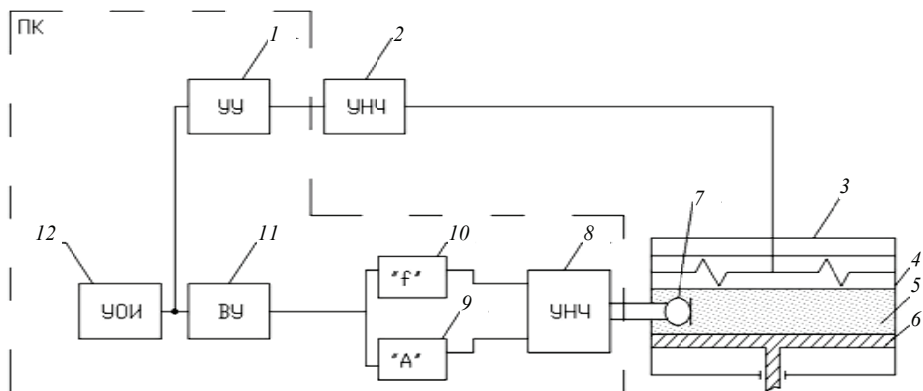


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

Функции УУ, ВУ, УОИ, УНЧ 8, осциллографа 9 и частотомера 10 реализованы с использованием персонального компьютера ПК.

В качестве исследуемых использовались углеродные материалы: каменный, древесный и активный уголь (БАУ-А и АГ-3). Выбор материалов для проведения экспериментов обусловлен использованием стандартных методик определения их пористости, а также наличием в литературе результатов, полученных другими исследователями.

Методика исследования включает в себя следующие основные этапы:

- измерительную емкость 4 заполняют контролируемым материалом 5;
- формируют в емкости 4 гармонически изменяющееся давление с линейно нарастающей частотой;
- при достижении резонанса в емкости 4, определяемого по пику давления на АЧХ измерительной системы, отключают ЭДГ 3;
- по найденному значению резонансных характеристик и известному значению объема емкости 4 определяют эффективную пористость материала.

В ходе проведения серии опытов с описанными выше материалами были получены АЧХ, представленные на рис. 3.

В таблице приведены значения частоты и амплитуды пневматического сигнала, соответствующие резонансу в пневмопульсационной измерительной системе.

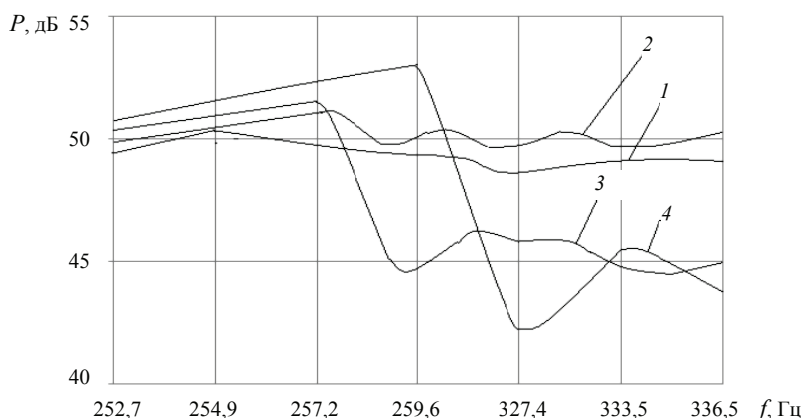


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики измерительного элемента с различными сыпучими материалами:

1 – каменный уголь; 2 – древесный уголь; 3 – активный уголь АГ-3;
4 – активный уголь БАУ-А

Результаты экспериментальной проверки пневмодинамического частотного метода измерения эффективной пористости сыпучих материалов

Наименование материала	P_3 , %	P , дБ (Па)	f , Гц
Каменный уголь	55,6	50,5 (156)	254,9
Древесный уголь	66,7	51,6 (174)	257,4
Активный уголь АГ-3	74,5	51,9 (179)	257,2
Активный уголь БАУ-А	75,5	52,4 (189)	259,6

Анализ полученных результатов показал, что при увеличении пористости резонансная частота уменьшается, а амплитуда давления при этом достигает максимального значения.

На основании полученной математической зависимости нами создан частотный метод измерения эффективной пористости материалов, заключающийся в следующем: в герметичную емкость помещают образец сыпучего материала и создают гармонические колебания давления; о пористости судят по изменению параметров, соответствующих резонансу давления в образованной колебательной системе; информативным параметром является амплитуда выходного сигнала в момент достижения резонанса.

К основным преимуществам метода можно отнести: простоту его реализации; малое время проведения измерительных и вычислительных операций, что в целом означает снижение трудоемкости процесса определения пористости; обеспечение неразрушающего контроля за счет использования эффектов, возникающих при взаимодействии газовой фазы с сыпучим материалом, а также возможность проведения экспресс-анализа, что актуально при необходимости получения результатов в кратчайшие сроки.

К перспективам использования полученной математической модели можно отнести возможность реализации предложенного метода измерения эффективной пористости и разработки новых методов, а также использование математического описания при изучении процессов, протекающих при взаимодействии газовой фазы с пористыми материалами.

Работа выполнена в рамках государственного контракта № 14.741.12.0150 федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Список литературы

1. Брюханов, Б.К. Измерение количества вещества, уровня, объема, давления, состава : учеб. пособие / Б.К. Брюханов, Б.К. Григоровский, В.Н. Ерицев. – Куйбышев : Изд-во Куйбышев. политехн. ин-та, 1986. – 90 с.
2. Дёч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Дёч. – М. : Наука, 1965. – 288 с.
3. Мордасов, Д.М. Пневмодинамический частотный метод измерения плотности сыпучих материалов / Д.М. Мордасов, А.В. Рогудеева // Теплофизические исследования и измерения при контроле, управлении и улучшении качества продукции, процессов и услуг : мат. VII Междунар. теплофиз. шк. / Тамб. гос. техн. ун-т. – Тамбов, 2010. – С. 143–145.
4. Мордасов, Д.М. Физические основы пневмодинамического измерения пористости веществ / Д.М. Мордасов, Н.А. Булгаков, М.М. Мордасов // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 661–666.
5. Мордасов, Д.М. Струйно-акустический контроль плотности сыпучих материалов / Д.М. Мордасов, М.М. Мордасов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2006. – Т. 72, № 1. – С. 35–40.

Mathematical Model of the Frequency Interaction of Gas with Porous Material

A.V. Medvedeva, D.M. Mordasov

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: bulk material; frequency method; frequency response function; measurement; pneumodynamic measuring system; porosity; resonance.

Abstract: The paper presents the mathematical description of physical processes that occur under harmonic disturbing effect of gas on a porous material placed in an isolated air chamber. We've developed the mathematical model that relates the parameters of the porous structure with the pressure in the measuring system; the given model is the major method of measuring the porosity of materials.

© А.В. Медведева, Д.М. Мордасов, 2011