УДК 530.12+539.12

МНОЖЕСТВО И ПРОЦЕСС: «НЕРАЗДЕЛЬНО И НЕСЛИЯННО»

А.С. Бешенков

Учреждение РАО «Институт содержания и методов обучения», г. Москва

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Б.У. Родионов

Ключевые слова и фразы: количественные числа; множества; порядковые числа; процессы; теоретико-множественный подход.

Аннотация: Предложена абстрактная конструкция, аналогичная конструкции множеств, с помощью которой можно описывать самые разнообразные физические процессы. Приведены физические следствия смещения порядковых натуральных чисел относительно количественных.

> Математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук.
>
> *В.И. Арнольд*

Введение

Как известно, основным объектом современной математики являются теоретико-множественные структуры: группы, кольца, топологические пространства и пр. Соответственно, эти же структуры становятся основным инструментом, которые математика предлагает естествознанию для осмысления реальности.

В свою очередь, естествознание интересуют, прежде всего, разнообразные процессы. Особенность же теоретико-множественного подхода заключается в том, что он изначально пытается «вложить» процесс в свои конструкции. Этот подход уже вполне доказал свою эффективность, но в то же время постоянно возникает вопрос об адекватности таких вложений и сделанных отсюда выводов о характере вкладываемых в эти структуры процессов.

Бешенков Алексей Сергеевич – аспирант лаборатории дидактики информатики, e-mail: srg57@mail.ru, Учреждение РАО «Институт содержания и методов обучения», г. Москва.

Мысль об этой неадекватности подтверждают, как нам представляется, многолетние исследования С.Э. Шноля по изучению феномена «макрофлуктуаций». Как известно, эти флуктуации были обнаружены, когда Шноль пренебрег традиционной методикой усреднения в построении гистограмм и стал рассматривать все полученные в ходе эксперимента величины (то есть по сути, отказался от правила, основанного на теоретико-множественном инструментарии). В результате он увидел, что существуют предпочтительные значения измеряемых величин, которые, в свою очередь, изменяются под действием космофизических факторов.

Схожее предпочтение наблюдали С. Ньюкомб и Ф. Бенфорд, изучая массивы разнообразных величин. Сформулированный или эмпирический закон утверждает, например, что «1» встречается, в среднем, на 30 % чаще, чем остальные цифры.

Эти факты позволяют предположить, что теоретико-множественное описание не вполне соответствует реальности и что целесообразно развить такой подход, при котором «множественная» и «процессуальная» стороны окружающего мира были бы *равноправно* представлены в формализованных конструкциях.

В данной статье предпринята попытка добиться такого «равноправия».

Основой разнообразия структур является понятие множества. Согласно Г. Кантору, множество – это многое, мыслимое как единое. Всякую структуру S можно представить как множество, наделенное системой предикатов:

$$S = \{M \mid A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}.$$

Применим аналогичную идею к описанию многообразия процессов.

Реализации этой программы препятствует теоретико-множественный подход, в котором всякий процесс представляется какой-либо конструкцией. Например, натуральный ряд – это конструкция, в которой процесс описывается неограниченным повторением простейшей операции $n \to n+1$. Равномерное движение – это тоже конструкция, которая описывается линейной функцией $s = vt + s_0$. При этом проблемные отношения этой конструкции (и схожих конструкций) к среде, в которой они осуществляются, – континууму, почти полностью вытеснены эффективностью самой конструкции.

Принципиально важным моментом всего дальнейшего построения является размежевание процесса как такового и предикатов, различающих этот процесс. В этом случае мы получаем конструкцию, в определенной мере симметричную приведенной выше общей схемы теоретико-множественной структуры, в основу которой также положено разделение множества и предикатов, придающих ему определенные свойства.

Введем понятие беспредикатного процесса W, в котором фиксируется только идея длительности, движения. При этом мы не в состоянии каким-либо образом различить шаги W, и наше утверждение, что мы имеем дело с процессом, а не объектом, целиком основано на интуиции. Понятию беспредикатного процесса близко понятие «эон» – неподвижное время, рассмотренное еще знаменитым богословом VI–VII веков Максимом Исповедником.

Будем называть *процессом* γ следующую конструкцию: $\gamma = \{W \mid B_1, B_2, ..., B_n, \ldots\}$, где $B_1, B_2, \ldots, B_n, ...$ – двухместные предикаты, различающие шаги γ или, более точно, благодаря которым мы можем различать такие шаги. Как видно, это конструкция полностью симметрична соответствующей множественной конструкции.

Среди предикатов B_i выделим два двухместных предиката T_R и T_Z. Смысл этих предикатов такой:

– $T_R(x, y)$ различает шаги процесса в количественном смысле, при этом понимание «количества» может быть различным: для теоретико-множественной математики «количество» – это наличие определенного числа элементов, соотнесенных с данном шагом; для физики – это в большей мере «длина» шага;

– $T_Z(x, y)$ различает шаги в порядковом смысле, например, как число шагов от начала процесса.

Пример. Рассмотрим последовательность натуральных чисел: 0, 1, 2, … n, ... С точки зрения классических аксиом Пеано – это конструкция, в основе которой лежит простейшая операция $n \to n+1$.

В нашем подходе присутствует некий беспредикатный процесс W, который в данном случае символизирует саму идею процесса, длительности и предикаты $T_R(x, y)$ и $T_Z(x, y)$, которые интерпретируются как традиционный количественный и порядковый аспекты натурального числа. Наглядно это различие показано ниже.

$$\begin{array}{l} T_Z : \to \to \to \ldots \\ T_R : \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \qquad\ \ \bullet\ \bullet \ldots \\ \qquad\quad\ \bullet \end{array}$$

Введем следующие аксиомы.

Аксиома 1. *W – неограниченный процесс, в том смысле, что за каждым шагом идет следующий.*

Для формулировки следующей аксиомы нужна некоторая подготовка.

В рассмотренном примере с натуральным рядом предикаты T_R и T_Z обладают следующими очевидными свойствами:

а) если предикат $T_R(x, y)$ определен, то и предикат $T_Z(x, y)$ также определен и наоборот;

б) если шаги x и y различимы предикатом T_R, то они различимы и предикатом T_Z (и, наоборот, если они различимы T_Z, то они различимы T_R).

Иными словами можно сказать, что для натурального ряда предикат $T_R(x, y)$ эквивалентен предикату $T_Z(x, y)$: $T_R \sim T_Z$.

Этой эквивалентности можно придать следующий вид.

«Расщепим» натуральный ряд на два ряда «количественных» и «порядковых» натуральных чисел:

$$1_Z, 2_Z, 3_Z, \ldots$$

$$1_R, 2_R, 3_R, \ldots$$

Свойства а) и б) означают, что между этими рядами можно установить взаимно однозначное соответствие. Попробуем понять, насколько это соответствие отражает наши интуитивные представления о мире.

Будем полагать, что числа 1_Z, 2_Z, 3_Z, … – это некоторые «засечки», фиксирующие течение процесса, а количество – это «расстояние» между этими засечками. В этом случае эквивалентность T_R и T_Z означают равномерность течения видимого процесса.

Таким образом, для описания разнообразия протекающих в мире процессов, большинство из которых, разумеется, не являются равномерно текущими, мы должны отказаться от предположения об эквивалентности T_R и T_Z. Этот факт мы зафиксируем в аксиоме 2.

Аксиома 2. *Количественный и порядковый аспекты числа не зависимы друг от друга.*

Продолжим изучение введенной выше конструкции и докажем две теоремы.

Теорема 1. Если шаги процесса W различимы только двумя предикатами B_1, B_2, то один из них есть T_R, а другой – T_Z.

Из этой теоремы следует, что среди предикатов, различающих шаги процесса $\gamma = \{W \mid B_1, B_2, ..., B_n, ...\}$, с необходимостью будут присутствовать предикаты T_R и T_Z.

Доказательство. Если существует предикат B, различающий шаги γ, то это уже предикат T_Z. С другой стороны, имея T_Z и обращая время, можно получить предикат T_R .

Теорема 2. Если, кроме того, предикаты T_R и T_Z эквивалентны, то процесс γ изоморфен последовательности натуральных чисел.

Доказательство. Из эквивалентности T_R и T_Z вытекает существование некоторого начального шага «0» и утверждения, что $S_0 \neq 0$, где S – символ перехода к следующему шагу. Справедливость аксиом Пеано устанавливается без труда.

Множественную структуру S и процесс γ можно рассматривать как две стороны единого *объекта.* При этом объект как некоторое статическое образование не приходит «со стороны», а возникает из самого процесса. Формализованная конструкция выглядит следующим образом.

Рассмотрим какой-нибудь *неограниченный* процесс γ, в котором шаги различимы некоторым двухместным предикатом B. Согласно [1] определим шаг α, на котором *стабилизируется* процесс γ в смысле предиката B, то есть всякий шаг после α совпадает с α в смысле предиката B.

Если, кроме того, шаги процесса γ различимы предикатом T_R (который согласно теореме 2 всегда присутствует). Если предположить, что все эти шаги имеют одинаковую длину, то шаг α определяет *бесконечность относительно предиката B*.

Определение. Объектом U назовем следующую конструкцию:
$U = \langle$«Множество», то есть стабилизация процесса γ по предикатам B_{i1}, B_{i2}, …, $B_{in} \mid$ «Процесс» по остальным предикатам$\rangle$.

Таким образом, объект обусловлен как множеством, так и процессом.

В этой конструкции множество возникает как «след» процесса γ, что согласуется с изначальной идеей Г. Кантора, понимающего множество как «многое, мыслимое как единое».

Рассмотрим кратко некоторые следствия приведенных конструкций.

Расщепление натурального ряда на два – «количественный» и «порядковый» ряды: 1_Z, 2_Z, 3_Z, … и 1_R , 2_R, 3_R, …, а также введение аксиомы «свободы» в выборе зависимостей этих рядов позволяет вводить различные соотношения между этими рядами и получать в итоге различные «натуральные ряды». Среди этих рядов могут быть выбраны те, которые в наибольшей степени соответствуют физической реальности, о чем в свое время говорил П.К. Рашевский [2].

Более того, как подчеркивалось выше, эти соотношения позволяют абстрактным образом ввести ускорение, аналогично тому, как искривленное пространство-время является в общей теории относительности источником тяготения. С этих позиций принцип эквивалентности можно рассматривать как эквивалентность искривления пространства-времени – с одной стороны, и смещения количественных чисел, относительно порядковых – с другой стороны. Далее, можно предположить, что в мы живем не в искривленном, а плоском мире, натуральный ряд которого имеет вышеназванное смещение. Еще В.Л. Рвачев показал, что подобным путем можно объяснить эффект «красного смещения» [3]. Разумеется, эти идеи требуют детальной проверки и дальнейшего развития.

Список литературы

1. Векшенов, С.А. Математика и физика пространственно-временного континуума / С.А. Векшенов // Основания физики и геометрии : сб. статей / под ред. Ю.С. Владимирова, А.П. Ефремова. – М., 2008. – С. 89–118.

2. Рашевский, П.К. О догмате натурального ряда / П.К. Рашевский // Успехи мат. наук. – 1973. – Т. 28, вып. 4 (172). – С. 243–246.

3. Рвачев, В.Л. Неподвижные объекты дальнего космоса имеют красное смещение своих спектров (вывод из неархимедова исчисления) / В.Л. Рвачев. – Харьков, 1994. – 20 с. – (Препринт НАН Украины / Ин-т пробл. машиностроения. – № 377).

Set and Process: Indivisible and Unmerged

A.S. Beshenkov

The Establishment of RAS “Institute of Content and Methods of Teaching”, Moscow

Key words and phrases: ordinal numbers; processes; quantitative numbers; sets.

Abstract: An original abstract structure (concept) analogical to the structure of sets is proposed in the article. Different physical processes can be described with this structure. The physical consequences of some shift between ordinal numbers and quantitative numbers are examined in the article.

© А.С. Бешенков, 2011