УДК 519.6

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УТОЧНЕННЫХ МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.С. Колесников

ФГБОУ ВПО «Московский государственный технологический университет “Станкин”», г. Москва

Рецензент д-р техн. наук, профессор Б.М. Позднеев

Ключевые слова и фразы: динамические системы; ядра Винера–Вольтерра.

Аннотация: Рассмотрен алгоритм анализа и синтеза математических моделей нелинейных динамических систем на основе аппроксимации многомерных ядер Винера–Вольтерра во временной и частотной областях. Приведен метод использования уточненного преобразования Лапласа для анализа характеристик нелинейных динамических систем.

В настоящее время перед нашей страной стоят задачи модернизации, инноваций, повышения технико-экономического уровня и качества машин, оборудования и приборов. При этом огромную роль играет комплексная автоматизация производства. Решение этих и многих других вопросов в настоящее время не возможно без широкого использования средств вычислительной техники для исследования, идентификации и моделирования сложных машиностроительных систем. В современной теории систем одним из основных подходов является анализ экспериментальных данных, получаемых при опытном исследовании системы или в процессе ее эксплуатации. После ряда преобразований анализ этих экспериментальных данных позволяет обеспечить конструирование математической модели, которая в смысле выбранного критерия качества, характеризующего степень близости выходных сигналов модели и системы, соответствует исследуемой системе. Наиболее полно этот метод соответствует описанию систем с помощью вход-выходных соотношений.

В 1942 г. Винер дал метод определения реакции нелинейной системы на шум [6]. Позднее Джорджем и Ван-Трисом для исследования нелинейных систем были применены функционалы Вольтерра [4, 5]. Аналогичные исследования были проведены в Англии Барретом [2] и в США Флейком [3].

Колесников Александр Семенович – аспирант, ассистент кафедры «Информационные системы», e-mail: Sasha237@gmail.com, ФГБОУ ВПО «Московский государственный технологический университет “Станкин”», г. Москва.

Предположим, что нелинейная система описывается с помощью дифференциального уравнения

$$Z(D)x(t)+F(x,x',...)=g(t), \tag{1}$$

где $Z(D)$ – линейный дифференциальный оператор; F – нелинейная аналитическая функция аргумента x, производные которой удовлетворяют условиям экспоненциальной ограниченности Липшица [8]. В правой части уравнения стоит вынуждающая сила, ограниченная в детерминированном случае или имеющая ограниченные моменты произвольного порядка в стохастическом случае.

Выход или реакция системы $x(t)$ в общем случае может быть представлена в виде бесконечной суммы:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i(t), \tag{2}$$

где для $i = n$

$$x_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}h_n(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)g(t-\tau_1)g(t-\tau_2)\cdots g(t-\tau_m)d\tau_1\,d\tau_2\cdots d\tau_n. \tag{3}$$

В данном случае каждая система n-го порядка характеризуется своим ядром n-го порядка. Первая система является линейной; ее выходной сигнал представляет собой свертку входного сигнала $g(t)$ с импульсной функцией линейной части всей системы. Вторая система является уже нелинейной и носит квадратичный характер: ее выход есть свертка второго порядка входа с импульсной функцией $h_2(t_1, t_2)$. Аналогично третья система носит кубический характер: ее выход $x_3(t)$ представляет собой трехмерную свертку входа $g(t)$ с импульсной функцией $h_3(t_1, t_2, t_3)$, которая может быть названа ядром Вольтерра третьего порядка.

Таким образом, применение рядов Винера–Вольтерра является обобщением интеграла свертки, используемого для описания линейной системы.

При рассмотрении многомерных систем в частотной области вводятся прямые и обратные многомерные преобразование Лапласа [7], определяемые аналогично одномерным преобразованиям [8].

Многомерные преобразования обладают всеми теми же свойствами, что и одномерные. Наибольший интерес представляет теорема о переходе к одной переменной в области изображений. В случае преобразования Лапласа, для функций двух аргументов, она выглядит следующим образом: если

$$F(s_1,s_2)\risingdotseq f(t_1,t_2), \tag{4}$$

то

$$F(t,t)\risingdotseq\frac{1}{2\pi j}\int_{Br_2}F(s_1,s-s_1)ds_1=\frac{1}{2\pi j}\int_{Br_2}F(s-s_1,s_2)ds_2=\{F(s_1,s_2)\}^*. \tag{5}$$

где $f(t_1,t_2)$ – оригинал; $F(s_1,s_2)$ – его изображение; Br_2 – двумерный контур интегрирования Бромвича, то есть вдоль прямых $(c_i - j\infty,\ c_i + j\infty)$, $i=\overline{1,2}$, удовлетворяющих условиям $\operatorname{Re}s_i=c_i>\sigma_i^0$, $i=\overline{1,2}$; $\{\}^*$ – сокращенная запись операции перехода к одной переменной.

В случае, если входное воздействие или ядра функционалов заданы дискретно, например получены в ходе эксперимента, то применяются дискретные преобразования Лапласа. Согласно [9], коэффициенты дискретного преобразования Лапласа будут иметь вид

$$F(s)=\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\mathrm{e}^{-st_i}(t_{i+1}-t_i), \tag{6}$$

где $f(t)$ – дискретно заданная m-мерная функция.

Для устранения погрешностей при анализе быстроменяющихся функций, а также в ряде других случаев, например, когда нельзя повысить разрешающую способность прибора или провести повторные исследования, необходимо использовать уточненное преобразование Лапласа.

Одним из методов повышения точности является метод линеаризации оригинала, то есть замена дискретно-заданной функции $f(t_i)$ непрерывной функцией, линейной на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$. Такая замена не только приближает $f(t_i)$ к теоретическим значениям, но и позволяет в полном объеме учесть экспоненциальный множитель при расчете коэффициентов преобразования. В двумерном случае дискретная функция от двух переменных $f(t_1, t_2)$ заменяется плоскостью на каждом участке $\left[f(t_{1i}, t_{2j}),\right.$ $\left.(t_{1i+1}, t_{2j+1})\right]$.

Как показано в работе [9], данный метод способен значительно повысить качество результатов при достаточно ограниченных исходных данных. Согласно теореме Фреше [9] имеется возможность аппроксимации произвольного непрерывного функционала регулярными функциональными полиномами, а согласно [1] имеет место тесная взаимосвязь между многомерной линейной и полиномиальной фильтрацией.

Одномерный случай. Пусть дано множество точек $f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_n)$, заданных на множестве моментов времени $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Тогда интерполирующая функция будет иметь вид

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n} C_k t^k. \tag{7}$$

Найти коэффициенты полинома можно, решив систему линейных уравнений вида

$$f(t_i)=\sum_{k=0}^{n} C_k t_i^k,\ i=\overline{0,n}. \tag{8}$$

Эту систему часто записывают в матричном виде

$$T\times C=Y; \tag{9}$$

$$T=\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \ldots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^n \end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_n \end{bmatrix};\quad Y=\begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ f(t_2) \\ \ldots \\ f(t_n) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Получив коэффициенты полинома, можем получить образ функции $f(t)$ в области изображений

$$F(s)=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k k!}{s^{k+1}}. \tag{11}$$

Изображение функционала Вольтерра первого порядка, определенное формулой

$$H_1(s)=F(s)X(s), \tag{12}$$

где $H_1(s)$ – изображение ядра первого порядка; $X(s)$ – изображение входного воздействия, может быть рассчитано как

$$H_1(s)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{CF_k k!}{s^{k+1}}\right)\left(\sum_{r=0}^{n}\frac{CX_r r!}{s^{r+1}}\right). \tag{13}$$

Раскрыв скобки, приведя подобные, получим

$$H_1(s)=\sum_{p=0}^{2n}\frac{CH_p}{s^{p+2}}, \tag{14}$$

чему во временной области соответствует функция

$$H_1(t)=\sum_{p=0}^{2n}CH'_p t^{p+1}. \tag{15}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть *двумерный случай*.

Пусть известны значения функции $f(t_{1i},t_{2j})$, $i,j=\overline{0,n}$ на некотором множестве моментов времени (t_{10},t_{20}), $(t_{1n},t2_n)$. Тогда интерполирующая поверхность будет определена следующим образом:

$$f(t_1,t_2)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}C_{k_1k_2}t_1^{k_1}t_2^{k_2}. \tag{16}$$

Найти коэффициенты $C_{k_1k_2}$ можно, решив систему линейных уравнений вида

$$f(t_{1i},t_{2j})=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}C_{k_1k_2}(t_{1i})^{k_1}(t_{2j})^{k_2},\quad i,j=\overline{0,n}. \tag{17}$$

Рассуждая аналогично одномерному случаю, получаем изображение функции $f(t_1,t_2)$ по Лапласу

$$F(s_1,s_2)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{C_{k_1k_2}k_1!k_2!}{s_1^{k_1+1}s_2^{k_2+1}}. \tag{18}$$

Таким образом, изображение функционала Вольтерра второго порядка, определенное формулой

$$H_2(s_1,s_2)=F(s_1,s_2)X(s_1)X(s_2), \tag{19}$$

где $H_2(s_1,s_2)$ – изображение ядра второго порядка; $X(s_1)$ и $X(s_2)$ – изображение входного воздействия, может быть рассчитано как

$$H_2(s_1,s_2)=\left(\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{CF_{k_1k_2}k_1!k_2!}{s_1^{k_1+1}s_2^{k_2+1}}\right)\left(\sum_{r_1=0}^{n}\frac{CX_{r_1}r_1!}{s_1^{r_1+1}}\right)\left(\sum_{r_1=0}^{n}\frac{CX_{r_2}r_2!}{s_2^{r_2+1}}\right)=$$
$$=\left(\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{CF_{k_1k_2}k_1!k_2!}{s^{k_1+1}s^{k_2+1}}\right)\left(\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{n}\frac{CX_{r_1}r_1!x_{r_2}r_2!}{s_1^{r_1+1}s_2^{r_2+1}}\right). \quad (20)$$

Осуществляем переход обратно во временную область. Тогда

$$H_2(t_1,t_2)=\sum_{p_1=0}^{2n}\sum_{p_2=0}^{2n}CH'_{p_1p_2}t_1^{p_1+1}t_2^{p_2+1}. \quad (21)$$

Полагаем $t=t_1=t_2$. Подобный переход можно было сделать и в области изображений, в этом случае

$$H_2(t)=\sum_{p=0}^{4n}CH_pt^{p+2}. \quad (22)$$

Обобщим на *многомерный случай*.

Пусть известны значения функции $f\left(t_{1i_1},...,t_{mi_m}\right)$, $i_1,\ldots,i_m=\overline{0,n}$, на некотором множестве моментов времени $(t_{10},\ldots,t_{m0}),\ldots,(t_{1n},\ldots,t_{mn})$. Тогда интерполирующий полином будет определяться как

$$f(t_1,...,t_m)=\sum_{k_1=0}^{n}\cdots\sum_{k_m=0}^{n}C_{k_1\ldots k_m}t_1^{k_1}\cdots t_m^{k_m}. \quad (23)$$

Найти коэффициенты $C_{k_1\ldots k_m}$ можно, решив систему линейных уравнений вида

$$f\left(t_{1i_1},...,t_{mi_m}\right)=\sum_{k_1=0}^{n}\cdots\sum_{k_m=0}^{n}C_{k_1k_2\ldots k_m}\left(t_{1i_1}\right)^{k_1}\cdots\left(t_{mi_m}\right)^{k_m},\quad i_1,\ldots,i_m=\overline{0,n}. \quad (24)$$

Изображение по Лапласу функции $f(t_1,...,t_m)$ имеет вид

$$F(s_1,...,s_m)=\sum_{k_1=0}^{n}\cdots\sum_{k_m=0}^{n}\frac{C_{k_1\ldots k_m}k_1!\cdots k_m!}{s_1^{k_1+1}\cdots s_m^{k_m+1}}. \quad (25)$$

Таким образом, изображение функционала Вольтерра m-го порядка определенное формулой

$$H_m(s_1,...,s_m)=F(s_1,...,s_m)X(s_1)\cdots X(s_m), \quad (26)$$

где $H_m(s_1,...,s_m)$ – изображение ядра второго порядка; $X(s_1),...,X(s_m)$ – изображения входного воздействия, может быть рассчитано как

$$H_m(s_1,...,s_m)=\left(\sum_{k_1=0}^{n}\cdots\sum_{k_m=0}^{n}\frac{CF_{k_1\ldots k_m}k_1!\cdots k_m!}{s_1^{k_1+1}\cdots s_m^{k_m+1}}\right)\left(\sum_{r_1=0}^{n}\frac{CX_{r_1}r_1!}{s_1^{r_1+1}}\right)\cdots\left(\sum_{r_m=0}^{n}\frac{CX_{r_m}r_m!}{s_m^{r_m+1}}\right)=$$
$$=\left(\sum_{k_1=0}^{n}\cdots\sum_{k_m=0}^{n}\frac{CF_{k_1\ldots k_m}k_1!\cdots k_m!}{s_1^{k_1+1}\cdots s_m^{k_m+1}}\right)\left(\sum_{r_1=0}^{n}\cdots\sum_{r_m=0}^{n}\frac{CX_{r_1}\cdots CX_{r_m}r_1!\cdots r_m!}{s_1^{r_1+1}\cdots s_m^{r_m+1}}\right).$$
$$(27)$$

Осуществляем переход обратно во временную область. Тогда

$$H_m(t_1, ..., t_m) = \sum_{p_1=0}^{2n} \cdots \sum_{p_m=0}^{2n} CH'_{p_1 \dots p_m} t_1^{p_1+1} \cdots t_m^{p_m+1}. \tag{28}$$

Полагаем $t = t_1 = \ldots = t_m$.

$$H_m(t) = \sum_{p=0}^{2nm} CH_p t^{p+m}. \tag{29}$$

Теперь полиномиальной нелинейной системе может быть сопоставлено выражение в комплексной области. Изображения ядер $H_i(s_1, \ldots, s_i)$ полностью характеризуют систему точно так же, как передаточная функция является исчерпывающей характеристикой линейной стационарной системы в нулевом начальном состоянии.

Преобразование Лапласа определено для функций $f(t_1, ..., t_n)$, которые равны нулю, если хотя бы один из аргументов $t_i < 0$, $i = \overline{1, n}$. Однако во многих задачах встречаются функции, не удовлетворяющие этому условию. В этом случае используется многомерное преобразование Фурье. Многомерное преобразование Фурье может быть получено из преобразования Лапласа заменой s_i на $j\omega_i$ при условии, что $\sigma_i^0 < 0$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому все теоремы и свойства, доказанные ранее для преобразования Лапласа, могут быть распространены и на преобразование Фурье.

Список литературы

1. Щербаков, М.А. Цифровая полиномиальная фильтрация в реальном масштабе времени: алгоритмы и пути реализации на современной элементной базе / М.А. Щербаков, В.Б. Стешенко, Д.А. Губанов // Цифровая обработка сигналов. – 2000. – № 1. – С. 19–27.

2. Barret, J.F. The use of Functionals in the Analysis of Nonlinear Physical Systems / J.F. Barret // Statistical Advisory Unit., Ministry of Supply, Great Britain. – 1957. – Rep. No. 1/57.

3. Flake, J.R.H. Volterra Series Representation of Nonlinear Systems / J.R.H. Flake // AIEE Trans. – 1963. – Vol. 81, part II. – P. 330–335.

4. George, D.A. Continuons Nonlinear Systems / D.A. George // M.I.T. Research Laboratory of Electronics, Cambridge, Mass. – 1959. – July. – Tech. Rep. No. 355.

5. Van Trees. H. L. Functional Techniques for the Analysis of the Nonlinear Behavior of Phase-Locked Loops // Proc. IEEE. – 1964. – Vol. 52, No. 8. – P. 894–911.

6. Wiener. N. Response of a Nonlinear Device to Noise / N. Wiener // M.I.T. Radiation Laboratory, Cambridge, Mass. – 1942. – Apr. – Rep. No. V–16s.

7. Болнокин, В.Е. Анализ и синтез систем автоматического управления на ЭВМ / В.Е. Болнокин, П.И. Чинаев. – М. : Радио и связь, 1991. – 256 с.

8. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов : учеб. для вузов / В.М. Вержбицкий. – М. : Высшая школа, 2002. – 840 с.

9. Основы автоматического управления / под ред. В.С. Пугачева. – М. : Физматгиз, 1963. – 646 с.

The Application of Refined Multidimensional Discrete Transforms for the Analysis of Nonlinear Dynamic Systems

A.S. Kolesnikov

Moscow State Technological University "Stankin", Moscow

Key words and phrases: dynamic systems; Wiener–Volterra kernels.

Abstract: In this work the algorithm of analysis and synthesis of mathematical models of nonlinear dynamical systems is considered. It is based on the approximation of multidimensional Wiener–Volterra kernels in the frequency area. Also the method of using the refined Laplace transform for the analysis of the characteristics of nonlinear dynamic systems is provided.
