

**АЛГОРИТМ С ПЕРЕМЕННЫМ ВРЕМЕННЫМ  
ИНТЕРВАЛОМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ  
В ИССЛЕДОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ  
ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА РАЗМЕЩЕНИЯ КАПИТАЛА**

**А.П. Гладких**

*ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический  
университет», г. Тамбов*

*Рецензент канд. техн. наук, доцент С.В. Мукин*

**Ключевые слова и фразы:** переменный интервал дискретизации; стратегия управления; управление капиталом; экономическая динамика.

**Аннотация:** Предложена модификация алгоритма дискретизации динамики экономических процессов. При этом достигнуто уменьшение количества анализируемых точек, для оптимизационного анализа использованы лишь информативные точки на анализируемых траекториях. Это способствует повышению скорости и эффективности оптимизационного исследования.

Проблематика оптимизации развития экономических систем и управления размещением капитала, который является одним из, безусловно, важнейших, влияющих на экономическое развитие, была рассмотрена в работах [3, 5–8]. Метод, описанный в работе [3], опирается на анализ динамики вариативных траекторий процесса развития. В основе метода лежит алгоритм дискретизации по времени, в результате исполнения которого выполняется построение графа возможных состояний развития системы по траекториям движения. Однако вследствие использования в дискретизирующем алгоритме постоянного интервала разбиения по времени в множество точек, формируемое для построения вариативного графа, включается большое количество лишних малоотличающихся незначительных для анализа точек. Это обстоятельство делает оптимизационное исследование избыточным, что говорит об актуальности решения данной проблемы. Предлагаемый далее метод предназначен для уменьшения количества анализируемых точек до числа значимых вариативных состояний развития процесса по траекториям движения.

---

Гладких Александр Петрович – аспирант кафедры «Распределенные вычислительные системы», e-mail: gap84@rambler.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов.

Рассмотрим запись объекта исследования с управлением в общем виде в форме векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = g(x) + u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  – векторы состояния и управления соответственно.

Управление  $u$  позволяет оказывать регулирующее воздействие на развитие экономического процесса. Оно может осуществляться при помощи инвестиций, которые влияют на формирование капитала и, таким образом, определяют стратегию экономического развития.

Рассматриваемая задача заключается в минимизации времени перевода объекта, описываемого (1), из исходного состояния в заданное при соответствующих управлениях  $u$  из множества допустимых управлений  $\{u_l\}$ ,  $l = 1, \dots, M$ . Математическая формулировка поставленной задачи может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad \int_0^T dt \rightarrow \min \text{ при } u \in \{u_l\}, \quad l = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Рассмотрим процесс развития системы с точки зрения предельного перехода между непрерывным и дискретным многошаговым процессом развития.

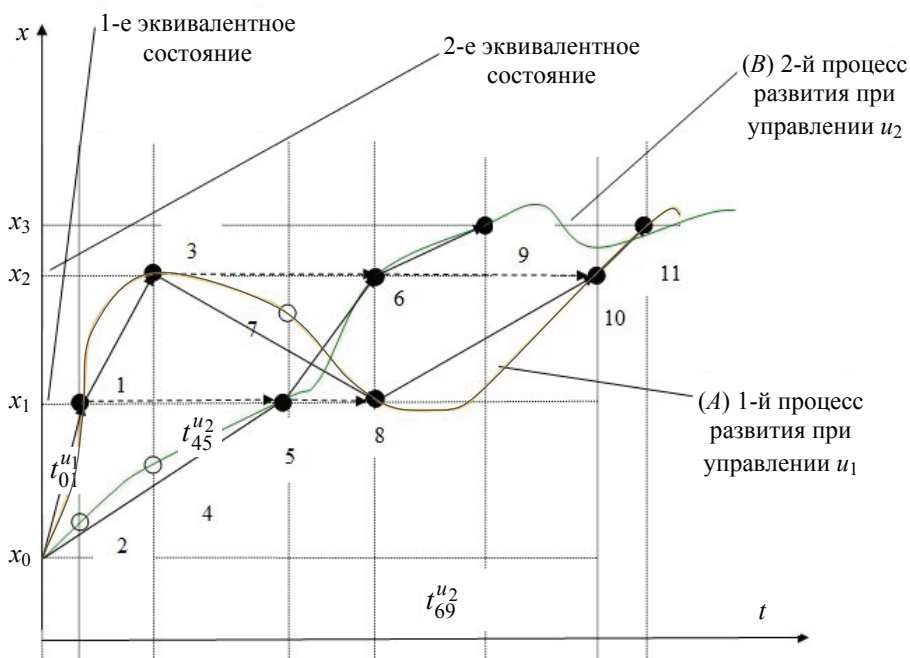
Время перехода между  $i$ -м и  $j$ -м состояниями системы может быть определено как некоторое  $t_{ij}$  в зависимости от самих состояний  $i, j$  системы и выбранного управляющего воздействия, сами значения состояний определены.

В соответствии с выражением (1) процесс перехода системы из  $i$ -го состояния в  $j$ -е в дискретном виде может быть представлен следующим образом

$$\Delta_{j-i} = j - i = t_{ij} g(x, u), \quad g(x, u) = (ai + u_l), \quad (3)$$

где  $\Delta_{j-i} = j - i$  есть разность значений состояний  $j$  и  $i$  системы;  $u_l$  –  $l$ -е управление,  $l = 1, \dots, M$ ;  $a$  – коэффициент.

На рис. 1 изображена дискретизация процесса развития системы на примере двух возможных реализаций развития. При движении по траектории  $A$  система перейдет в узел 1 за время  $t_{01}^{u_1}$ . За это же время при управлении  $u_2$  и соответственно движении по траектории  $B$  система окажется в узле 2 и не достигнет такого же состояния, как в узле 1. Чтобы достичь состояния, эквивалентного состоянию в узле 1 при движении по траектории  $B$ , необходимо попасть в узел 5. При этом необходимое время перехода из состояния  $X_0$  в  $X_1$  при движении по траектории  $B$ , как видно из рис. 1, будет  $t_{02}^{u_2} + t_{24}^{u_2} + t_{45}^{u_2}$ . Из состояния 1 возможен непосредственный переход по траектории  $A$  в узел 3 за время  $t_{03}^{u_1}$  или через эквивалентное 1-му 5-е состояние по траектории  $B$  в состояние 6 за время  $t_{56}^{u_2}$ .



**Рис. 1. Дискретизация вариантов развития системы:**

● – вариативные точки; --> – эквивалентное состояние на другой траектории;  
 → – переход по одной траектории

Таким образом, может быть определена схема возможных состояний развития объекта и их взаимосвязей в виде графа. При использовании данного алгоритма дискретизации граф строится из вариативных точек, то есть точек, в которых возможен выбор управления для определения соответствующего развития. На рис. 1 такие точки изображены закрашенными, прямые переходы между состояниями – сплошными стрелками, а переходы через эквивалентное состояние по другой траектории – пунктирными.

Алгоритм оптимизации заключается в определении пути перехода в сформированном графе, который соединяет два состояния (исходное и заданное) и полное время прохождения по которому не больше, чем для любого другого пути, соединяющего заданные узлы. Найденная траектория определяет оптимальную стратегию управления развитием экономического процесса.

Предположим, что  $N$  – желаемое состояние, в которое необходимо перевести систему,  $f_i$  – время перехода системы из некоторого состояния  $i$  в желаемое состояние  $N$  наискорейшим образом. Очевидно, что  $f_N = 0$ .

Применяя принцип оптимальности [1–2], получим следующую оптимизирующую стратегию

$$f_i = \min_{i \neq j} [t_{ij} + f_j], \quad (4)$$

где из (3) следует

$$j = i + (a_i + u_i)t_{ij}. \quad (5)$$

Таким образом, в силу (3) и (5) вычисления осуществляются при помощи последовательных приближений

$$f_i^{k+1} = \min_{i \neq j} \left[ \frac{\Delta_{j-i}}{ai + u_l} + f_{i+(ai+u_l)}^k \frac{\Delta_{j-i}}{ai+u_l} \right], \quad (6)$$

$$f_N = 0,$$

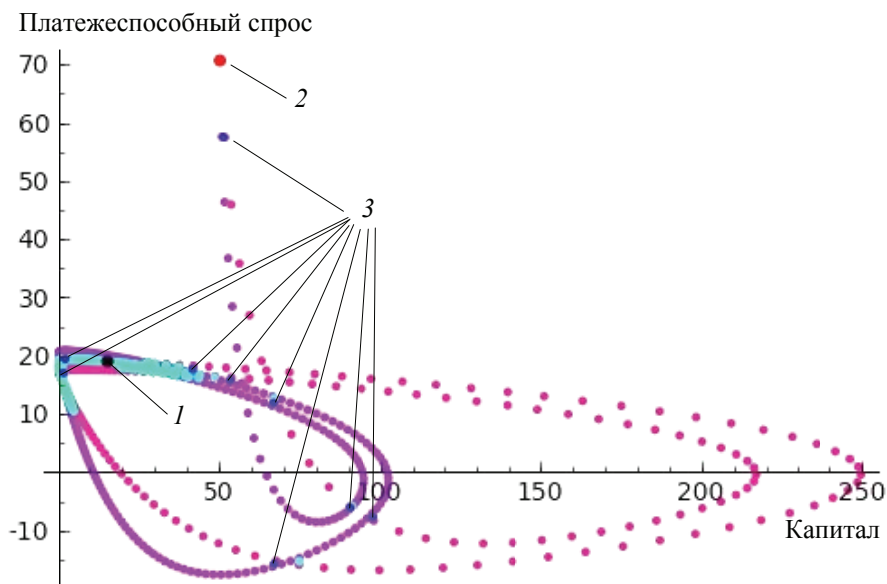
где  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ;  $l = 1, \dots, M$ ;  $k = 1, 2, \dots, N - 2$ .

Начальное приближение в данном случае

$$f_i^0 = t_{iN} = \frac{\Delta_{N-i}}{ai + u_s}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

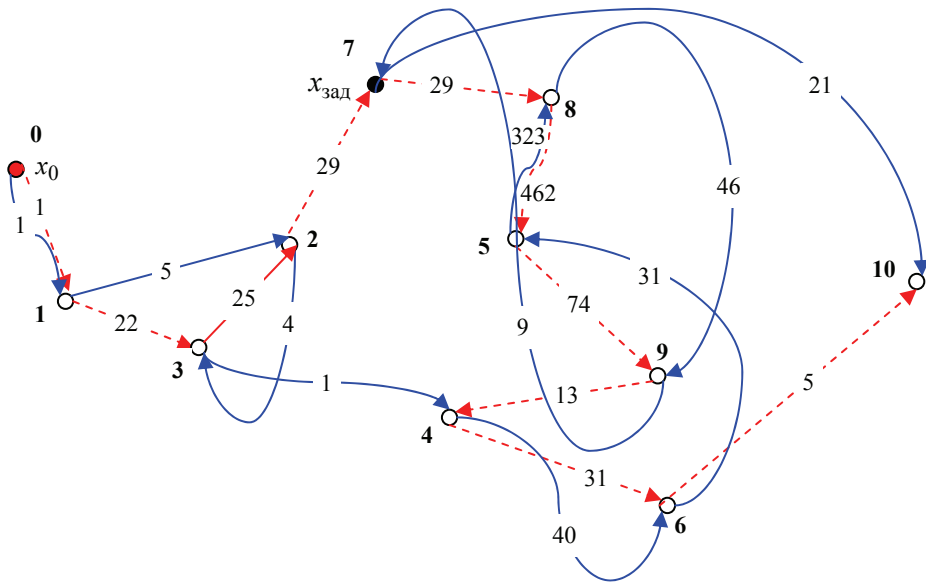
где  $u_s$  – управление, соответствующее желаемому состоянию  $N$ . В случае отсутствия управления  $u_s$ , соответствующего переходу в  $N$ -е состояние,  $f_i^0 = t_{iN}$  принимается равным  $\infty$ .

Оптимизационный метод с переменным временным интервалом дискретизации между состояниями опробован на модели саморазвивающейся рыночной экономики [4] при исследовании оптимального развития с двумя возможными управлениями. На рис. 2 и 3 показаны соответственно множество необходимых вариационных точек по траекториям развития и граф вариационных состояний развития, полученные в ходе оптимизационного моделирования.



**Рис. 2. Определение необходимых (значимых) вариационных точек по траекториям развития:**

- – вариационные точки; 1 – заданное состояние  $x_{зад}$ ; 2 – начальное состояние  $x_0$ ;
- 3 – необходимые (значимые) вариационные точки



**Рис. 3. Граф вариационных состояний развития объекта и их взаимозависимостей**

Применение для графа вариационных состояний развития, изображенного на рис. 3, оптимизационного алгоритма позволяет получить управленческую стратегию развития из исходного состояния в заданное

$$0(u_1) - 1(u_1) - 2(u_2) - 7 \quad \text{или} \quad 0(u_2) - 1(u_1) - 2(u_2) - 7$$

с оптимальным временем перевода системы

$$t_{07} = t_{01}^{u_1} + t_{12}^{u_1} + t_{27}^{u_2} = 35 \quad \text{или} \quad t_{07} = t_{01}^{u_2} + t_{12}^{u_1} + t_{27}^{u_2} = 35$$

Таким образом, метод с переменным временным шагом позволяет уменьшить количество анализируемых точек, и, вследствие этого, повысить скорость и эффективность оптимизационного исследования. Переменный временной интервал дискретизации по сравнению с постоянным шагом разбиения позволяет задействовать для вариативного анализа лишь информативные точки на анализируемых траекториях, исключив лишние малоотличающиеся. Вследствие этого граф вариативного развития становится более компактным и «легким», а последующий анализ оптимальной стратегии управления более быстрым и прозрачным.

#### *Список литературы*

1. Беллман, Р. Процессы регулирования с адаптацией / Р. Беллман. – М. : Иностранная литература, 1964. – 360 с.
2. Беллман, Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Калаба. – М. : Наука, 1969. – 120 с.
3. Гладких, А.П. Нахождение оптимальной стратегии управления процессом экономического развития и размещения капитала / А.П. Гладких // Экон. науки. – 2010. – № 11(13). – С. 105–110.

4. Магницкий, Н.А. Математическая модель саморазвивающейся рыночной экономики / Н.А. Магницкий // Тр. ВНИИСИ АН СССР. – 1991. – С. 16–22.

5. Мараховский, А.С. Построение оптимальных траекторий развития макросистем с использованием преобразования подобия / А.С. Мараховский, Т.В. Таточенко // Современные финансово-экономические проблемы в условиях глобализации : сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. / Ставропол. гос. аграр. ун-т. – Ставрополь, 2008. – С. 220–227.

6. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М. : Айрис-Пресс, 2002г. – 553 с.

7. Ицкович, И.А. Анализ линейных экономико-математических моделей / И.А. Ицкович. – Новосибирск : Наука, 1976 – 185с

8. Сакович, В.А. Оптимальные решения экономических задач / В.А. Сакович. – Минск : Высшая школа, 1982. – 272 с.

9. Шимко, П.Д. Оптимальное управление экономическими системами : учеб. пособие / П.Д. Шимко. – СПб. : СПбГИЭА, 2000. – 176 с.

---

### **Algorithm with the Variable Time Discretization Interval in the Study of Economic Dynamics of Capital Allocation**

**A.P. Gladkikh**

*Tambov State Technical University*

**Key words and phrases:** capital management; economic dynamics; management strategy; variable sampling interval.

**Abstract:** The article proposes a modification of the discretization algorithm of the economic processes dynamics. Thus, the number of analyzed points is reduced; informative points on the analyzed trajectories are used. It contributes to the increase in the speed and efficiency of the optimization study.

---

© А.П. Гладких, 2011