УДК 303.732:[338+658.01](075.8)

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ АППАРАТ ВЕКТОРНОГО ПРЕДПОЧТЕНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ ПОКАЗАТЕЛЯМИ КАЧЕСТВА, ЗАДАННЫМИ В ОГРАНИЧЕННО-НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ВИДЕ

Ю.В. Ведерников, В.В. Могиленко

ГОУ ВПО «Михайловская военная артиллерийская академия», г. Санкт-Петербург

Рецензент д-р техн. наук, профессор В.П. Демиденко

Ключевые слова и фразы: векторная оптимизация; интервальный анализ; отношение предпочтения; техническая система.

Аннотация: Рассмотрена задача определения отношений предпочтения на множестве сложных технических систем для случая, когда показатели качества разнородны и могут быть заданы в ограниченно-неопределенном (интервальном) виде. Задача сведена к построению упорядоченного множества эффективных вариантов (кортежа предпочтений Парето) сложных систем. Предложен метод решения, основанный на комплексном применении аксиоматических методов теории принятия решений, нечетких множеств и интервального анализа. Приведен численный пример.

Введение

В настоящий момент осложненные условия эксплуатации сложных технических систем (**СТС**) различного назначения приводят к необходимости учета в процессе оценки качества их функционирования, различных видов неопределенности. В ходе решения этой задачи достаточно часто оказывается, что большинство показателей рассматриваемых СТС заданы в виде диапазона их изменения. Для нахождения решений в задачах подобного класса используют интервальные [1–3, 8, 14–16] и нечеткие [2, 6, 7, 10] методы.

Приоритет в исследованиях, посвященных интервальному анализу, принадлежит академику Л.В. Канторовичу [9], идеи которого примени-

Ведерников Юрий Вадимович – доктор технических наук, доцент кафедры № 10; Могиленко Вячеслав Викторович – адъюнкт кафедры № 10, e-mail: mslawwwa@mail.ru, ГОУ ВПО «Михайловская военная артиллерийская академия», г. Санкт-Петербург.

тельно к задачам оптимизации развил А.А. Ватолин. Он сформулировал для них определение множества решений. Математическим и вычислительным аспектам анализа статических систем в условиях интервальной неопределенности посвящена работа С.П. Шарыя [14]. Разработка методов оптимизации СТС для случая, когда критерии оптимальности заданы в интервальном виде, оказалась возможной благодаря результатам, полученным в теории интервального анализа такими учеными как Ю. Херцберг, Ю.И. Шокин, Е. Каухер и многими другими [1, 8, 15, 17]. Вместе с тем, эта проблема полностью еще не решена. Известные методы [8, 15] предполагают, что для двух интервалов A и B, определенных в соответствующих границах $A = [\underline{a}; a]$ и $B = [\underline{b}; b]$, считается, что $A > B$ или $A < B$, если ($\underline{a} > \underline{b}$, $a > b$) или ($\underline{a} < \underline{b}$, $a < b$). При условии, если ($\underline{a} < \underline{b}$, $a > b$) или ($\underline{a} > \underline{b}$, $a < b$), два интервала A и B будут считаться несравнимыми. В частности, это относится и к важному для практики случаю, когда СТС характеризуется векторным разнородным критерием оптимальности. Кроме того, для нестандартных операций вычитания (–) и деления (:), определенных для элементов A, B, существует правило [8], что из равенства $A – C = B – C$ не следует, что $A = B$; например, $[\underline{9}; 13] – [\underline{1}; 4] = [\underline{10}; 12] – [\underline{1}; 4]$ или из равенства $A : C = B : C$ не следует, что $A = B$; например, $[\underline{2}; 6] : [\underline{1}; 2] = [\underline{3}; 4] : [\underline{1}; 2]$. Однако именно вышеперечисленные случаи достаточно часто встречаются при решении практических задач.

В статье предлагается метод, позволяющий определять предпочтения между вариантами систем, характеризующихся множеством интервальных характеристик. Он основан на сочетании отличительных свойств аксиоматических методов теории принятия решений, нечетких множеств и интервального анализа.

1. Постановка задачи

В основу предлагаемого метода положена идея сравнения неоднородных интервальных значений показателей качества СТС на основе построения интервального отношения предпочтения (**ИОП**). Рассмотрим его сущность. Для этого введем необходимые в дальнейшем обозначения [11–13]: $S = \left\{S_\alpha, \alpha = \overline{1,n}\right\}$ – множество возможных альтернативных вариантов структурного построения СТС; $K_i(S_\alpha) = \left[\underline{K_i(S_\alpha)}; \overline{K_i(S_\alpha)}\right]$– показатели качества, заданные в интервальном виде, характеризующие каждый отдельный вариант системы S_α, где $\underline{K_i(S_\alpha)}$ – нижняя граница интервала оценки показателя, а $\overline{K_i(S_\alpha)}$ – верхняя граница интервала, при $i = \overline{1,r}$; $\alpha = \overline{1,n}$; $K(S_\alpha) = \{K_1(S_\alpha), K_2(S_\alpha), ..., K_r(S_\alpha)\} = \left\{\left[\underline{K_1(S_\alpha)}; \overline{K_1(S_\alpha)}\right], \left[\underline{K_2(S_\alpha)}; \overline{K_2(S_\alpha)}\right], ..., \left[\underline{K_r(S_\alpha)}; \overline{K_r(S_\alpha)}\right]\right\}$ – векторный показатель, характеризующий каждый вариант системы; $S^P \subset S$ – множество эффективных (Парето-оптимальных) вариантов системы S_α с числом элементов n^P; $P = \left(S^0_{k_1}, S^0_{k_2}, ..., S^0_{k_{n^P}}\right)$ – упорядоченное множество эффективных вариантов (кортеж Парето), для элементов которого $S^0_{k_j} \in S^P$ справедливо

$$S^0_{k_1} \succ S^0_{k_2} \succ ... \succ S^0_{k_{n^P}}, \qquad (1)$$

где «$\succ$» – знак отношения доминирования, $k_j \in \left\{\overline{1, n^P}\right\}$. Длина кортежа равна n^P.

С учетом введенных обозначений сформулируем задачу.

Требуется найти упорядоченное множество эффективных вариантов структурного построения сложной системы (кортеж Парето) (1), для элементов которого $S^0_{k_j}$ в зависимости от смысла задачи выполняются условия:

$$K_i(S^0_{k_j}) = \min_{\substack{i=\overline{1,r};\\ \alpha=\overline{1,n}}} [K_i(S_\alpha)],\ S^0_{k_j} \in S^P \qquad (2)$$

или

$$K_i(S^0_{k_j}) = \max_{\substack{i=\overline{1,r};\\ \alpha=\overline{1,n}}} [K_i(S_\alpha)],\ S^0_{k_j} \in S^P, \qquad (3)$$

для случая, когда скалярные показатели качества $K_i(S_\alpha) = \left[\underline{K_i(S_\alpha)}; \overline{K_i(S_\alpha)}\right]$ представлены в интервальном виде. Обычный (не интервальный) скалярный показатель $K_i(S_\alpha)$ целесообразно рассматривать как частный случай интервального показателя, который представлен в виде *вырожденного интервала* [2], то есть интервала с совпадающими концами $K_i(S_\alpha) = \underline{K_i(S_\alpha)} = \overline{K_i(S_\alpha)}$.

2. Метод построения интервальных отношений предпочтения на множестве сложных систем, характеризующихся скалярными разнородными показателями качества

При построении реальных сложных технических систем различного назначения встречаются ситуации (являющиеся, скорее, правилом, чем исключением), когда у лица, принимающего решение (**ЛПР**), нет четкого представления о предпочтениях между всеми или некоторыми из альтернативных вариантов [10]. Кроме того, только при наличии условия, *обеспечивающего сравнимость частных показателей*, возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения многокритериальных задач. Несравнимость частных показателей является основной особенностью и главным препятствием к решению задач многокритериальной оптимизации [6]. Представленные обстоятельства существенно усиливаются в условиях, когда частные показатели не только неаддитивные, но еще и представлены в интервальном виде, с различными диапазонами отклонения качества от лучшего до худшего значения.

Исходя из вышеперечисленного, предлагается на основе анализа множества упорядоченных пар S_k и S_l ($S_k \in S$ и $S_l \in S$, где $k = \overline{1,n}; l = \overline{1,n}; k \neq l$)

вариантов сложной системы $S=\left\{S_\alpha, \alpha=\overline{1,n}\right\}$ по аналогии с нечетким отношением предпочтения [10, п. 1.2.1], ввести ИОП $R^{\text{и}}K_i\,(S_k,S_l)$ по i-му частному интервальному критерию оптимальности $K_i(S_\alpha)=\left[\underline{K_i(S_\alpha)};\ \overline{K_i(S_\alpha)}\right]$, $i=\overline{1,r}$, $\alpha=\overline{1,n}$, и для пары систем (S_k,S_l) определить интервальной функцией принадлежности $\mu^{\text{и}}K_i\,(S_k,S_l)$. Результаты анализа предлагается заносить в специальную оценочную матрицу $\|\mu^{\text{и}}K_i\,(S_k,S_l)\|$. При сравнении систем S_k и S_l, k-системы располагать в строках, а l-системы – в столбцах.

Элементы $\mu^{\text{и}}K_i\,(S_k,S_l)$ оценочной матрицы, исходя из подходов изложенных в [6, 8, 10,12], определяются по выражению

$$\mu^{\text{и}}K_i(S_k,S_l)=\frac{K_i(S_k)-K_i(S_l)}{m_i}=\frac{\left[\underline{K_i(S_k)};\overline{K_i(S_k)}\right]-\left[\underline{K_i(S_l)};\overline{K_i(S_l)}\right]}{m_i}=$$

$$=\frac{\left[\underline{\min\left\{\underline{K_i(S_k)}-\underline{K_i(S_l)};\overline{K_i(S_k)}-\overline{K_i(S_l)}\right\}};\overline{\max\left\{\underline{K_i(S_k)}-\underline{K_i(S_l)};\overline{K_i(S_k)}-\overline{K_i(S_l)}\right\}}\right]}{m_i},\tag{4}$$

где m_i – ширина интервала оценок по i-му частному показателю качества [2], а $K_i\,(S_k)$ и $K_i\,(S_l)$ – значения i-го скалярного критерия для систем S_k и S_l. Средством числового представления показателей выступают интервальные значения, которые показывают допустимое отклонение качества варианта системы от худшего до лучшего (то есть от минимального до максимального) в определенном диапазоне.

Важным моментом в данном случае является назначение величины m_i. При необходимости можно использовать в качестве m_i: предельно допустимые значения показателей оптимальности эталонной системы; предельно допустимые значения критериев оптимальности, которые хотелось бы достигнуть в ходе решения задачи оптимизации; в задачах контроля в качестве m_i могут выступать предельно допустимые значения контролируемых параметров и т.д.

В результате функция принадлежности $\mu^{\text{и}}K_i\,(S_k,S_l)$ для пары систем (S_k,S_l), характеризующая степень согласия с тем, что система S_k доминирует над системой S_l по i-му частному интервальному критерию, будет также представлена в интервальном виде

$$\mu^{\text{и}}K_i(S_k,S_l)=\left[\underline{\mu^{\text{и}}K_i(S_k,S_l)};\ \overline{\mu^{\text{и}}K_i(S_k,S_l)}\right].$$

Отличительной особенностью рассматриваемого подхода от методов теории нечетких множеств [6, 7, 10] является определение интервальной функции принадлежности в интервале [–1; 1].

Определение 1. *Интервальным отношением предпочтения* $R^{\text{и}}$ на множестве S_α называется множество декартова произведения ($S_k\times S_l$, где $k=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,n}$; $k\neq l$), характеризующееся интервальной функцией принадлежности $\mu^{\text{и}}K_i\,(S_k,S_l)$: $S_k\times S_l\to[-1;\,1]$. Значение этой функции

$\mu^{и}K_i(S_k,S_l)=\left[\underline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)};\overline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}\right]$ понимается как объективная мера степени выполнения отношения $S_k R^{и} S_l$ по скалярному критерию оптимальности $K_i(S_\alpha)=\left[\underline{K_i(S_\alpha)};\overline{K_i(S_\alpha)}\right]$, $i=\overline{1,r}$; $\alpha=\overline{1,n}$, заданному в интервальном виде, характеризующему каждый отдельный вариант системы S_α, где:

– $\underline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}\in[-1;0]$ – значение, характеризующее максимальную степень потерь при признании системы S_k доминирующей систему S_l по скалярному интервальному критерию оптимальности K_i;

– $\overline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}\in[0;1]$ – значение, характеризующее максимальную степень выигрыша при признании системы S_k доминирующей систему S_l по рассматриваемому K_i;

– $\overline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}\in[-1;0]$ – означает абсолютное отсутствие доминирования системы S_k над системой S_l по скалярному интервальному критерию K_i;

– $\underline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}\in[0;1]$ – означает абсолютное доминирование системы S_k над системой S_l по скалярному интервальному критерию K_i;

– $\left[\underline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)};\overline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}\right]\in[-1;1]$ – интервальное значение (комплексная характеристика), характеризующее степень выигрыша и степень потерь при признании системы S_k доминирующей систему S_l по рассматриваемому K_i.

Введем отношение *строгого интервального предпочтения* системы S_k над системой S_l и определим его функцией принадлежности $\mu^{и}_D K_i(S_k,S_l)$, характеризующей интенсивность доминирования системы S_k над системой S_l по i-му частному интервальному показателю качества, в виде

$$\begin{aligned}
&\mu^{и}_D K_i(S_k,S_l)=\mu^{и}K_i(S_k,S_l)-\mu^{и}K_i(S_l,S_k)=\\
&=\left[\underline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)};\overline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}\right]-\left[\underline{\mu^{и}K_i(S_l,S_k)};\overline{\mu^{и}K_i(S_l,S_k)}\right]=\\
&=\left[\underline{\min\left\{\underline{\underline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}-\underline{\mu^{и}K_i(S_l,S_k)}};\overline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}-\overline{\mu^{и}K_i(S_l,S_k)}\right\}};\right. \qquad (5)\\
&\left.\overline{\max\left\{\underline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}-\underline{\mu^{и}K_i(S_l,S_k)};\overline{\overline{\mu^{и}K_i(S_k,S_l)}-\overline{\mu^{и}K_i(S_l,S_k)}}\right\}}\right].
\end{aligned}$$

Результаты сравнения $\mu^{и}K_i(S_k,S_l)$ и $\mu^{и}K_i(S_l,S_k)$ ($\forall S_k$ и S_l) будем заносить в специальную оценочную матрицу $\left\|\mu^{и}_D K_i(S_k,S_l)\right\|$.

Введем отношение интервального недоминирования системы S_k над системой S_l и определим его функцией принадлежности $\mu_{ND}K_i(S_k,S_l)$ как дополнение к $\mu^{и}_D K_i(S_k,S_l)$ в виде

$$\mu_{ND}K_i(S_k, S_l) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_D^{\text{и}} K_i(S_k, S_l) < 0; \\ 1 - \mu_D^{\text{и}} K_i(S_k, S_l), \text{ если } \mu_D^{\text{и}} K_i(S_k, S_l) \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Результаты выполнения условия (6) будем заносить в оценочную матрицу $||\mu_{ND}K_i(S_k, S_l)||$.

Степень «недоминируемости» системы S_k ни одной другой системой по i-му скалярному интервальному показателю качества характеризуется [10] функцией принадлежности множеству недоминируемых систем $\mu_D^* K_i(S_k)$ в виде

$$\mu_D^* K_i(S_k) = \min \mu_{ND} K_i(S_k, S_l). \quad (7)$$

Значение функции принадлежности $\mu_D^* K_i(S_k)$ показывает степень близости варианта системы S_k к эффективному (Парето-оптимальному) варианту по рассматриваемому скалярному интервальному i-му показателю качества.

Если в процессе решения, в зависимости от смысла задачи, необходимо выполнить условие (2), то выбор значения $\mu_D^* K_i(S_k)$ необходимо осуществлять из k-й строки оценочной матрицы $||\mu_{ND}K_i(S_k, S_l)||$. Если в процессе решения необходимо выполнить условие (3), то выбор значения $\mu_D^* K_i(S_k)$ необходимо осуществлять из l-го столбца оценочной матрицы $||\mu_{ND}K_i(S_k, S_l)||$.

Величину $\mu_D^* K_i(S_k)$ будем рассматривать как *меру предпочтения*, обеспечивающую объективный и адекватный реальности способ сравнения сложных систем, характеризующихся разнородными интервальными значениями, и устанавливающую значение приоритета системы при выборе.

Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример. Необходимо отдать предпочтение одной из трех систем $\{S_1, S_2, S_3\}$, характеризующихся тремя показателями $K_1(S_\alpha)$, $K_2(S_\alpha)$ и $K_3(S_\alpha)$, значения которых заданы в интервальном виде, остальные системы расположить в порядке убывания предпочтения.

Таблица 1

Таблица исходных данных

Системы S_α / Показатели $K_i(S_\alpha)$	S_1	S_2	S_3	m_i
$K_1(S_\alpha)$ – ориентировочная стоимость образца (тыс. у.е.)	[40; 90]	[50; 70]	[60; 65]	100
$K_2(S_\alpha)$ – ожидаемый эффект от эксплуатации образца (баллы)	[5; 6]	[3; 9]	[4; 7]	10
$K_3(S_\alpha)$ – ожидаемая скорость выполнения контрольных операций (операций/с)	[80; 100]	[100; 120]	[110; 115]	150

Варианты систем, значения показателей качества и ширина интервала оценок по i-му частному критерию представлены в табл. 1. При этом должны выполняться условия:

$$K_1(S_\alpha) = \min_{\alpha=1,3}[K_1(S_\alpha)]; \quad (8)$$

$$K_2(S_\alpha) = \max_{\alpha=1,3}[K_2(S_\alpha)]; \quad (9)$$

$$K_3(S_\alpha) = \max_{\alpha=1,3}[K_3(S_\alpha)]. \quad (10)$$

Как видно из табл. 1, показатели $K_1(S_\alpha)$, $K_2(S_\alpha)$ и $K_3(S_\alpha)$ являются разнородными, измеряемыми в различных шкалах, с различными диапазонами отклонения качества. Кроме того, условия (8) – (10) являются диаметрально противоположными.

Решение задачи.

1. С использованием выражения (4) определяем $\mu^{и}K_1(S_1,S_2)$:

$$\mu^{и}K_1(S_1,S_2) = \frac{[40;90]-[50;70]}{100} =$$

$$\frac{\left[\min\underline{\{40-50;90-70\}};\max\overline{\{40-50;90-70\}}\right]}{100} =$$

$$= \frac{[-10;20]}{100} = [-0{,}1;0{,}2].$$

Аналогично представленным вычислениям рассчитываем $\mu^{и}K_1(S_k,S_l)$, $\mu^{и}K_2(S_k,S_l)$ и $\mu^{и}K_3(S_k,S_l)$ ($\forall S_k$ и S_l). Полученные данные сводим в табл. 2.

Таблица 2

Оценочная матрица $||\mu^{и}K_i(S_k,S_l)||$

Системы S_l / Системы S_k	S_1	S_2	S_3
	$\|\|\mu^{и}K_1(S_k,S_l)\|\|$		
S_1	–	[−0,1; 0,2]	[−0,2; 0,25]
S_2	[−0,2; 0,1]	–	[−0,1; 0,05]
S_3	[−0,25; 0,2]	[−0,05; 0,1]	–
	$\|\|\mu^{и}K_2(S_k,S_l)\|\|$		
S_1	–	[−0,3; 0,2]	[−0,1; 0,1]
S_2	[−0,2; 0,3]	–	[−0,1; 0,2]
S_3	[−0,1; 0,1]	[−0,2; 0,1]	–
	$\|\|\mu^{и}K_3(S_k,S_l)\|\|$		
S_1	–	[−0,13; −0,13]	[−0,2; −0,1]
S_2	[0,13; 0,13]	–	[−0,06; 0,03]
S_3	[0,1; 0,2]	[−0,03; 0,06]	–

2. С использованием выражения (5) определяем $\mu_D^{и} K_1(S_1, S_2)$.

$$\mu_D^{и} K_1(S_1, S_2) = [-0{,}1;\ 0{,}2] - [-0{,}2;\ 0{,}1] =$$
$$= \left[\min\underline{\{-0{,}1-(-0{,}2);\ 0{,}2-0{,}1\}};\max\overline{\{-0{,}1-(-0{,}2);\ 0{,}2-0{,}1\}}\right] = 0{,}1.$$

Аналогично представленным вычислениям рассчитываем $\mu_D^{и} K_1(S_k, S_l)$, $\mu_D^{и} K_2(S_k, S_l)$ и $\mu_D^{и} K_3(S_k, S_l)$ ($\forall S_k$ и S_l). Полученные данные сводим в табл. 3.

3. С использованием выражения (6) находим значения $\mu_{ND} K_1(S_k, S_l)$, $\mu_{ND} K_2(S_k, S_l)$ и $\mu_{ND} K_3(S_k, S_l)$. Полученные данные представим в табл. 4–5.

Таблица 3

Оценочная матрица $\mu_D^{и} K_i(S_k, S_l)$

Системы S_l / Системы S_k	S_1	S_2	S_3
	$\mu_D^{и} K_1(S_k, S_l)$		
S_1	–	0,1	0,05
S_2	–0,1	–	–0,05
S_3	–0,05	0,05	–
	$\mu_D^{и} K_2(S_k, S_l)$		
S_1	–	0,1	0
S_2	–0,1	–	0,1
S_3	0	-0,1	–
	$\mu_D^{и} K_3(S_k, S_l)$		
S_1	–	–0,26	–0,3
S_2	0,26	–	–0,03
S_3	0,3	0,03	–

Таблица 4

Оценочная матрица $\mu_{ND} K_1(S_k, S_l)$

Системы S_l / Системы S_k	S_1	S_2	S_3	$\mu_D^{*} K_1(S_k)$
S_1	–	0,9	0,95	0,9
S_2	1	–	1	1
S_3	1	0,95	–	0,95

Таблица 5

Значения $\mu_{ND} K_i(S_k, S_l)$

Системы S_l / Системы S_k	S_1	S_2	S_3
	$\mu_{ND} K_2(S_k, S_l)$		
S_1	–	0,9	1
S_2	1	–1	0,9
S_3	1	1	–
$\mu^*_D K_2(S_k)$	1	0,9	0,9
	$\mu_{ND} K_3(S_k, S_l)$		
S_1	–	1	1
S_2	0,74	–	1
S_3	0,7	0,97	–
$\mu^*_D K_3(S_k)$	0,7	0,97	1

4. Значения $\mu^*_D K_i(S_k)$ для всех показателей сведем в табл. 6.

Таблица 6

Значения $\mu^*_D K_i(S_k)$

$\mu^*_D K_i(S_k)$ / Системы S_k	$\mu^*_D K_1(S_k)$	$\mu^*_D K_2(S_k)$	$\mu^*_D K_3(S_k)$
S_1	0,9	1	0,7
S_2	1	0,9	0,97
S_3	0,95	0,9	1

Согласно [4] значения $\mu^*_D K_i(S_k)$ определяются в диапазоне → [0; 1], где $\mu^*_D K_i(S_k) = 1$ означает, что система S_k является лучшей по i-му скалярному показателю в рассматриваемом множестве систем, 0 – худшей, а значение из диапазона [0; 1] показывает величину приоритета системы при выборе. Чем она выше, тем предпочтительней является рассматриваемая система S_k по i-му показателю качества.

В результате решения задачи все интервальные оценки приведены к общему виду, удобному для сравнения при решении задач векторной оптимизации.

Рассмотренный метод позволил сформулировать задачу построения отношения предпочтения на множестве СТС, характеризующихся векторным неоднородным показателем качества в следующем виде.

Требуется найти множество эффективных упорядоченных систем (кортеж предпочтений Парето) P^{μ}

$$S_{k_1}^{\mu} \succ S_{k_2}^{\mu} \succ \ldots \succ S_{k_{n^P}}^{\mu}, \tag{11}$$

для элементов которого $S_{k_j}^{\mu}$ справедливо

$$\mu_D^* K\left(S_{k_j}^{\mu}\right) = \max_{\substack{i=\overline{1,r};\\ \alpha=\overline{1,n}}} \left\{\mu_D^* K_i(S_\alpha)\right\}, \quad S_{k_j}^{\mu} \in S^P, \tag{12}$$

Рассмотрим метод решения задачи (11) при условии (12).

3. Метод построения отношения предпочтения на множестве сложных систем, характеризующихся векторным неоднородным показателем качества

При несомненных достоинствах методов решения задач многокритериальной (векторной) оптимизации [3, 5, 13] их общим недостатком, как, впрочем, и всех аксиоматических методов теории принятия решений, является то, что идет определение предпочтительности одного скалярного критерия над другим (то есть определение того, что одна система лучше (хуже) другой по рассматриваемому критерию), далее каким бы то ни было *субъективным*, как правило, эвристическим или экспертным методом вводятся коэффициенты важности скалярных критериев оптимальности и уже с ними в дальнейшем производятся различные вычисления. Однако в реальных ситуациях достаточно часто оказывается, что относительную важность критериев (или признаков, по которым оцениваются альтернативы) невозможно достоверно описать соответствующими коэффициентами, кроме того, субъективизм назначения коэффициентов важности понижает достоверность принимаемого решения.

Предлагаемый метод построения отношения предпочтения на множестве СТС, характеризующихся векторным неоднородным показателем качества (*метод векторного предпочтения*), в отличие от известных (семейства методов ЭЛЕКТРА Б. Руа, метода «жесткого» ранжирования [13], методов, представленных в работах [3, 5], и т.д.), позволяет вместо коэффициентов важности критериев использовать функции принадлежности $\mu_D^* K_i(S_\alpha)$, определяемые по изложенной выше процедуре и показывающие степень близости систем S_α к эффективной (Парето-оптимальной) системе по $K_i(S_\alpha)$ – частному критерию оптимальности. Сущность рассматриваемого *метода векторного предпочтения* [4] при решении задачи (11) и выполнении условия (12) заключается в следующем.

1. На основе анализа $\mu_D^* K_i(S_k)$ и $\mu_D^* K_i(S_l)$, $i=\overline{1,r}$, проведем попарное сравнение систем S_k и S_l и определим элементы C_{kl}^{μ} оценочной матрицы $\left\|C_{kl}^{\mu}\right\|$, $k=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,n}$; $k \neq l$, в следующей последовательности.

Обозначим $I_{kl}^{+}, I_{kl}^{-}, I_{kl}^{=}$, соответственно, подмножества лучших, худших и равных значений $\mu_D^* K_i(S_k)$ и $\mu_D^* K_i(S_l)$ для каждой пары систем S_k и S_l, $k=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,n}$; $k \neq l$. Осуществим попарное сравнение систем S_k и S_l на основе анализа $\mu_D^* K_i(S_k)$ и $\mu_D^* K_i(S_l)$, $i=\overline{1,r}$. Для возможных значений подмножеств $I_{kl}^{+}, I_{kl}^{-}, I_{kl}^{=}$ введем следующие значения элементов оценочной матрицы $\|C^{\mu}{}_{kl}\|$:

$$\text{если } I_{kl}^{+}=\varnothing,\ I_{kl}^{-}=\varnothing,\ I_{kl}^{=}=\left\{\overline{1,r}\right\}, \text{ то } C_{kl}^{\mu}=1,\ C_{lk}^{\mu}=1; \tag{13}$$

$$\text{если } I_{kl}^{+}=\left\{\overline{1,r}\right\},\ I_{kl}^{-}=\varnothing,\ I_{kl}^{=}=\varnothing, \text{ то } C_{kl}^{\mu}=N_2,\ C_{lk}^{\mu}=0,\ N_2 \gg 1; \tag{14}$$

$$\text{если } I_{kl}^{+}=\varnothing,\ I_{kl}^{-}=\left\{\overline{1,r}\right\},\ I_{kl}^{=}=\varnothing, \text{ то } C_{kl}^{\mu}=0,\ C_{lk}^{\mu}=N_2; \tag{15}$$

$$\text{если } I_{kl}^{+}\neq\varnothing,\ I_{kl}^{-}=\varnothing,\ I_{kl}^{=}\neq 0, \text{ то } C_{kl}^{\mu}=N_3,\ C_{lk}^{\mu}=0;\ 1 \ll N_3 < N_2; \tag{16}$$

$$\text{если } I_{kl}^{+}=\varnothing,\ I_{kl}^{-}\neq\varnothing,\ I_{kl}^{=}\neq 0, \text{ то } C_{kl}^{\mu}=0,\ C_{lk}^{\mu}=N_3; \tag{17}$$

$$\text{если } I_{kl}^{+}\neq\varnothing, I_{kl}^{-}\neq\varnothing, \left|I_{kl}^{=}\right| \geq 0, \tag{18}$$

то C_{kl}^{μ}, в отличие от [13], определим в виде

$$C_{kl}^{\mu}=\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_D^* K_i(S_k)\right)\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_D^* K_i(S_l)\right)^{-1},\ C_{kl}^{\mu}=C_{lk}^{\mu\,-1}. \tag{19}$$

Для случая, когда при формировании исходных данных для решения задачи заданы коэффициенты важности рассматриваемых скалярных показателей качества, то C_{kl}^{μ} для условия (18) определим в виде

$$C_{kl}^{\mu}=\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_D^* K_i(S_k)a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_D^* K_i(S_l)a_i\right)^{-1},\ C_{kl}^{\mu}=C_{lk}^{\mu\,-1}, \tag{20}$$

где a_i – коэффициент важности i-го показателя, причем $\sum_{i=1}^{r} a_i = 1$.

Согласно теореме 1 [4], если в l-м $(l \in \{\overline{1,n}\})$ столбце оценочной матрицы одно из чисел C_{kl}^{μ} равно значению N_2 или N_3, то l-й вариант системы не принадлежит множеству эффективных вариантов.

2. Для формулировки решающих правил, по аналогии с методом «жесткого» ранжирования [13], введем систему показателей: H_l^{μ} – количество элементов в l-м столбце оценочной матрицы $\left\|C_{kl}^{\mu}\right\|$, значение которых больше единицы; M_l^{μ} – количество элементов в l-м столбце той же матрицы, значение которых меньше единицы, но больше нуля; $C_{kl\max}^{\mu}$ – максимальное значение элемента в l-м столбце матрицы. *Физический смысл*

показателей: H_l^{μ} показывает, сколько вариантов из рассматриваемого множества доминирует l-й; M_l^{μ} – сколько вариантов доминирует l-я система; $C_{kl\max}^{\mu}$ определяет максимальную степень доминирования k-й системы над l-й $(k=\overline{1,n};\ l=\overline{1,n};\ k\neq l)$.

3. Для определения порядка предпочтений на множестве систем перейдем от одношагового процесса поиска приоритетного расположения альтернатив к многошаговому процессу [3, 13]. На каждом шаге t ($t=\{1, 2, ..., n^P-1\}$), где n^P – число эффективных вариантов, выбираем j-ю альтернативу, лучшую с точки зрения предлагаемых ниже решающих правил (**РП**). Затем ее номер включаем в кортеж Парето P и в последующем рассмотрении j-я альтернатива больше не участвует (в матрице $\left\|C_{kl}^{\mu}\right\|$ вычеркиваем j-ю строку и j-й столбец). Это позволяет исключить влияние варианта S_j на выбор лучшей альтернативы, проводимой на следующем шаге. Далее вновь используем, но теперь на каждом шаге $t+1$, показатели $H_l^{\mu(t)}$, $M_l^{\mu(t)}$, $C_{kl\max}^{\mu(t)}$, которые имеют оговоренный выше физический смысл.

Решающие правила векторного предпочтения (**РПВП**).

1. Поиск приоритетного расположения СТС необходимо проводить только среди эффективных вариантов по шагам t ($t=\{1, 2, ..., n^P-1\}$).
2. Положить $t=1$.
3. Найти показатели $H_l^{\mu(t)}$, $M_l^{\mu(t)}$, $C_{kl\max}^{\mu(t)}$ и определить лучшую альтернативу S_j с минимальным значением $H_l^{\mu(t)}$.
4. Номер j занести в множество P.
5. Исключить из оценочной матрицы j-ю строку и j-й столбец.
6. Если альтернатива с номерами $l_j\in L_{k(t)}=\{l_1, l_2, ..., l_j, ..., l_{k(t)}\}$ имеет одинаковые минимальные значения $H_{l_j}^{\mu(t)}$, то лучшей является альтернатива S_{l_j} с максимальным значением $M_{l_j}^{\mu(t)}=\max\limits_{l_j\in L_{k(t)}} M_{l_j}^{\mu(t)}$.
7. Если варианты с номерами $l_j\in L_{k(t)}=\{l_1, l_2, ..., l_j, ..., l_{k(t)}\}$ имеют соответственно одинаковые значения $H_{l_j}^{\mu(t)}$, $M_{l_j}^{\mu(t)}$, то лучшей является альтернатива S_{l_j} с минимальным значением $C_{kl\max_j}^{\mu(t)}$.
8. Если лучшие системы имеют соответственно равные значения $H_{l_j}^{\mu(t)}$, $M_{l_j}^{\mu(t)}$, $C_{kl\max_j}^{\mu(t)}$, то такие системы считают эквивалентными.
9. Положить $t=t+1$.
10. Если $t<(n^P-1)$, перейти к шагу 3, иначе – к шагу 11.
11. Конец решения.

Пример (продолжение). Для определения отношения предпочтения на рассматриваемом множестве СТС $\{S_1, S_2, S_3\}$, характеризующихся векторным неоднородным показателем качества $K(S_\alpha)=\{K_1(S_\alpha),\ K_2(S_\alpha),$

$K_3(S_\alpha)\}$, $\alpha = \{1, 2, 3\}$, будем использовать $\mu^*_D K_i(S_k)$, определенные на предыдущем этапе решения (см. табл. 8), и РПВП.

1. Построим матрицу предпочтений $\left\| C^{\mu}_{kl} \right\|$ (табл. 7).

Порядок расчета чисел C^{μ}_{kl}:

$$C^{\mu}_{12} = \frac{\mu_D K_1(S_1) + \mu_D K_2(S_1) + \mu_D K_3(S_1)}{\mu_D K_1(S_2) + \mu_D K_2(S_2) + \mu_D K_3(S_2)} =$$

$$= \frac{0{,}9 + 1 + 0{,}7}{1 + 0{,}9 + 0{,}97} = \frac{2{,}6}{2{,}87} = 0{,}9.$$

2. Анализ оценочной матрицы $\left\| C^{\mu}_{kl} \right\|$ позволяет получить на 1 шаге ($t = 1$) решения показатели $H^{\mu(1)}_{l_j}$, $M^{\mu(1)}_{l_j}$, $C^{\mu(1)}_{kl\max_j}$, которые приведены в табл. 8.

3. Анализ табл. 8 показывает, что в соответствии с принятыми РПВП, предпочтение на 1 шаге решения ($t = 1$), необходимо отдать системе S_2. Включаем ее в кортеж Парето P. В табл. 7 удаляем вторую (S_2) строку и второй (S_2) столбец.

Таблица 7

Матрица предпочтений $\left\| C^{\mu}_{kl} \right\|$

Системы S_l / Системы S_k	S_1	S_2	S_3
S_1	–	0,9	0,91
S_2	1,1	–	1,01
S_3	1,09	0,99	–

Таблица 8

Матрица показателей

Системы S_l / Показатели	S_1	S_2	S_3
$H^{\mu(1)}_{l_j}$	2	0	1
$M^{\mu(1)}_{l_j}$	0	2	1
$C^{\mu(1)}_{kl\max_j}$	1,1	0,99	1,01

Таблица 9

Матрица предпочтений

Системы S_l / Системы S_k	S_1	S_3
S_1	–	0,91
S_3	1,09	–

Таблица 10

Матрица показателей

Системы S_l / Показатели	S_1	S_3
$H_{l_j}^{\mu(2)}$	1	0
$M_{l_j}^{\mu(2)}$	0	1
$C_{kl\max_j}^{\mu(2)}$	1,09	0,91

4. На втором шаге ($t = t + 1 = 2$) получаем вторую матрицу предпочтений (табл. 9) и матрицу показателей (табл. 10). Предпочтение на втором шаге, в соответствии с РПВП, отдаем системе S_3. Так как $t = 2 = n^P - 1$, где $n^P = 3$, решение заканчиваем и строим кортеж предпочтений Парето: $P = \{S_2, S_3, S_1\}$.

В результате решения задачи получили, что предпочтение по векторному неоднородному показателю качества $K(S_\alpha) = \{K_1(S_\alpha), K_2(S_\alpha), K_3(S_\alpha)\}$ следует отдать *второй* системе S_2, *третья* S_3 и *первая* S_1 системы занимают соответственно второе и третье места в кортеже.

Заключение

Таким образом, поставлена и решена важная в прикладном плане задача определения отношений предпочтения на множестве СТС для случая, когда технико-экономические показатели качества этих систем разнородны и могут быть заданы в частично формализованном, интервальном виде. Задача сводится к построению упорядоченного множества эффективных вариантов (кортежа предпочтений Парето) сложных технических систем, по векторному разнородному показателю качества.

На наш взгляд, предложенный научно-методический аппарат может найти широкое применение при решении прикладных задач принятия решений в экономике, социальной сфере, оценке вариантов сложных технических систем различного назначения и т.д.

Список литературы

1. Аленфельд, Г. Введение в интервальные вычисления : пер. с англ. / Г. Аленфельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987. – 360 с.
2. Алтунин, А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях : монография / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень : Изд-во Тюмен. гос. ун-та, 2000. – 352 с.
3. Белкин, А.Р. Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации / А.Р. Белкин, М.Ш. Левин. – М. : Наука, 1990. – 160 с.
4. Ведерников, Ю.В. Теоретико-множественное обоснование выбора сложных систем при разнородной исходной информации : монография / Ю.В. Ведерников. – СПб. : Изд-во М-ва обороны РФ, 2008. – 166 с.
5. Дубов, Ю.А. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем / Ю.А. Дубов, С.И. Травкин, В.Н. Якимец. – М. : Наука, 1986. – 296 с.
6. Жуковин, В.Е. Нечеткие многокритериальные модели принятия решений / В.Е. Жуковин. – Тбилиси : Мецниереба, 1988. – 71 с.
7. Заде, Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. – М. : Мир, 1976. – 165 с.
8. Калмыков, С.А. Методы интервального анализа / С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев. – Новосибирск : Наука, 1986. – 222 с.
9. Канторович, Л.В. Математические методы организации и планирования производства / Л.В. Канторович. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1939. – 68 с.
10. Орловский, С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации : монография / С.А. Орловский. – М : Наука, 1981. – 203 с.
11. Методика оптимизации структуры сложных технических систем в условиях риска / В.В. Сафронов [и др.] // Информац.-упр. системы. – 2007. – № 1 (26). – С. 40–46.
12. Сафронов, В.В. Метод многокритериального ранжирования сложных систем при различных видах неопределенности исходных данных / В.В. Сафронов, Ю.В. Ведерников // Информац.-упр. системы. – 2008. – № 3 (34). – С. 32–39.
13. Сафронов, В.В. Научно-методический аппарат векторной оптимизации систем контроля и управления сложными динамическими объектами при разнородных исходных данных / В.В. Сафронов, Ю.В. Ведерников. – М. : Новые технологии, 2007. – 32 с. – (Приложение к журналу «Информационные технологии» ; 2007, № 11).
14. Шарый, С.П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределенностью в данных / С.П. Шарый // Вычисл. технологии. – 1997. – № 1. – С. 84–101.
15. Шокин, И.Ю. Интервальный анализ / И.Ю. Шокин. – Новосибирск : Наука, 1981. – 112 с.
16. Левин, В.И. Задачи непрерывной оптимизации в условиях интервальной неопределенности / В.И. Левин // Информац. технологии. – 1999. – № 7. – С. 31–37.
17. Kaucher, E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs und Verbandsstrukturen / E. Kaucher // Computing Suppl. – 1977. – № 1. – S. 65–79.

Scientific Methods of Vector Preference of Complex Engineering Systems Characterized by Quality Factors Set in a Limited Indeterminate Aspect

Yu.V. Vedernikov, V.V. Mogilenko

Mikhailovskaya Military Artillery Academy, St. Petersburg

Key words and phrases: interval analysis; relations of preference; technical systems; vector optimization.

Abstract: The paper considers the task of determining preference relations on a set of complex engineering systems with heterogeneous quality factors which can be set in a limited uncertain (interval) format. The problem is reduced to the construction of an ordered set of effective options of complex systems (Pareto preference). The solution is based on a combined application of axiomatic methods of decision making theory, fuzzy sets and interval analysis. A numerical example is given.

© Ю.В. Ведерников, В.В. Могиленко, 2011