УДК 519.1+519.8

НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПИСАНИЯ ДЛЯ 3-ЭЛЕМЕНТНЫХ ПРЕДПИСАНИЙ

А.М. Магомедов

ГОУ ВПО «Дагестанский государственный университет», г. Махачкала

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор А.К. Рамазанов

Ключевые слова и фразы: двудольный граф; допустимый поток; непрерывное расписание; паросочетание; сеть; трансверсталь.

Аннотация: Для 3-предписаний рассмотрена задача о непрерывном расписании длительности 5. Доказано, что задача разрешима за полиномиальное время. Получены необходимые и достаточные условия существования.

1. Введение

В статье используются определения и обозначения из монографии [10].

Исходные данные к расписанию обслуживания в системе с l приборами требований из множества $N = \{1, \dots, n\}$ заданы семейством $\Omega =$ $= \{\omega_1, \dots, \omega_l\}$, где каждое ω_i представляет собой неупорядоченный набор из трех, необязательно различных, элементов из N (3-*предписание*). Если, например, $\omega_i = (a, b, c)$, то прибор i должен выполнить по одной операции над каждым из требований a, b и c в последовательные единицы времени; длительность каждой операции равна единице, порядок выполнения операций произволен, условия предшествования отсутствуют, запрещается одновременное обслуживание прибором более одного требования и/или одного требования более чем одним прибором.

Введем обозначения: $\mathrm{rep}_{\omega_i} a$ – количество вхождений требования $a \in N$ в предписание ω_i, $\mathrm{rep}_\Omega a = \sum_{1 \le i \le l} \mathrm{rep}_{\omega_i} a$, $m = \max_a \mathrm{rep}_\Omega a$.

Сформулируем **задачу о непрерывном расписании для 3-предписаний**: существует ли $(l \times m)$-матрица M с элементами из множества $\{0, 1, \dots, n\}$, такая, что: 1) в каждой i-й строке матрицы M какие-либо три подряд идущие ячейки заняты элементами предписания ω_i, остальные

Магомедов Абдулкарим Магомедович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой дискретной математики и информатики, magomedtagir1@yandex.ru, ДГУ, г. Махачкала.

ячейки строки заняты нулевыми элементами; 2) положительные элементы в каждом столбце попарно различны.

Интерпретация: равенство $M_{ik} = j$ означает при $j \in N$, что прибор i в k-й момент времени обслуживает требование с номером j; если $M_{ik} = 0$, то в момент времени k прибор i не обслуживает ни одного требования.

Понятно, что первое из условий в формулировке задачи обеспечивает выполнение предписаний семейства Ω, а также непрерывность работы каждого прибора; второе условие равносильно запрету на одновременное обслуживание одного требования более чем одним прибором.

Непрерывные расписания востребованы в приложениях, где стоимость простоев приборов неприемлемо высока или операции включения-выключения приборов сопряжены со значительными издержками.

В [11] рассмотрена близкая задача оптимизации без ограничений на длины предписаний и установлена ее NP-полнота. В [2] NP-полнота задачи доказана при $m = 5$ и отсутствии дополнительных ограничений на длины предписаний. В [9] доказано, что задача остается NP-полной, даже если $\mathrm{rep}_\Omega 1 = \cdots = \mathrm{rep}_\Omega n = m$.

Интересно, что непрерывное расписание для предписаний длины 2 существует всегда, если m четно [6]. Для случая предписаний длины 2 и $m = 5$ в [8] доказано, что задача разрешима за полиномиальное время; вопросы проверки этих условий рассмотрены в [4].

Для случая $m = 6$ вопросы существования непрерывного расписания для 3-предписаний в несколько иной постановке обсуждаются в [1, 5, 7]: в [1] доказана NP-полнота задачи; в [5] обсуждается случай с запретом на повторение элементов внутри предписаний; в [7] доказано, что задача разрешима за полиномиальное время, если длина каждого предписания представлена четным числом.

Сформулируем основной результат статьи: *при $m = 5$ задача о непрерывном расписании для семейства 3-предписаний Ω разрешима за полиномиальное время*.

2. Подготовительные результаты

Нам понадобятся две леммы из [8]. В формулировке лемм используются следующие обозначения и определения.

Через $M[i]$ будем обозначать мультимножество, образованное ненулевыми элементами i-го столбца матрицы M. Будем говорить, что элемент a, $a \neq 0$, *не насыщает*, *насыщает* или *пресыщает* $M[i]$ (и i-й столбец матрицы), если соответственно $\mathrm{rep}_{M[i]} a = 0$, $\mathrm{rep}_{M[i]} a = 1$ или $\mathrm{rep}_{M[i]} a = 2$; заметим, что всюду в дальнейшем $\mathrm{rep}_{M[i]} a \leq 2$ для любых i и a. Через $\mathrm{inc}(k)$ и $\mathrm{dec}(k)$ обозначим соответственно операции увеличения и уменьшения параметра k на единицу.

Лемма 1. Пусть 2-предписания некоторого семейства размещены в $(l \times 2)$-матрице M, a_1 пресыщает первый столбец (других случаев пресыщения нет) и не насыщает второй столбец матрицы M. Тогда найдется a_k, $a_k \neq a_1$, и такое размещение заданного семейства 2-предписаний в новой $(l \times 2)$-матрице M', что:

1) $\mathrm{rep}_{M'[1]}a_1 = \mathrm{rep}_{M'[2]}a_1 = 1,\ \mathrm{rep}_{M'[1]}a_k = 1,\ \mathrm{rep}_{M'[2]}a_k = 0$;

2) в остальных случаях $\mathrm{rep}_{M'[i]}a_j = \mathrm{rep}_{M[i]}a_j$.

Лемма 2. Пусть 2-предписания семейства Ω размещены в строках подматриц M_l и M_r, образованных соответственно первыми двумя и последними двумя столбцами $(l \times 4)$-матрицы M, и некоторое a_1 пресыщает первый столбец (других случаев пресыщенности нет), насыщает второй столбец и не насыщает один из столбцов $\lambda \in \{3, 4\}$. Тогда существует $a_k \in N$, $a_k \neq a_1$, и такое преобразование данного размещения к размещению без пресыщенных столбцов, что все возможные при выполнении данного преобразования изменения значений $\mathrm{rep}_{M[i]}a$ $(1 \leq i \leq 4,\ a \in N)$ сводятся либо к операциям:

$$\mathrm{dec}(\mathrm{rep}_{M[i]}a_1),\ \mathrm{inc}(\mathrm{rep}_{M[i]}a_k),\ \mathrm{inc}(\mathrm{rep}_{M[\lambda]}a_1),\ \mathrm{dec}(\mathrm{rep}_{M[\lambda]}a_k), \quad (1)$$

либо к операциям:

$$\mathrm{dec}(\mathrm{rep}_{M[1]}a_1), \mathrm{dec}(\mathrm{rep}_{M[2]}a_k),\ \mathrm{inc}(\mathrm{rep}_{M[\lambda]}a_1),\ \mathrm{inc}(\mathrm{rep}_{M[7-\lambda]}a_k). \quad (2)$$

Другими словами, изменения значений $\mathrm{rep}_{M[i]}a$ сводятся к обмену символов a_1 и a_k между столбцами 1 и λ или же к перемещению предписания (a_1, a_k) из M_l в M_r.

Замечание 1. Добавление a_k в $M[7-\lambda]$ при преобразованиях (1) или (2) возможно лишь при условии удаления a_k из $M[2]$. В самом деле, в (1) операция $\mathrm{inc}(\mathrm{rep}_{M[7-\lambda]}a_k)$ отсутствует, а в (2) она включена совместно с операцией удаления a_k из $M[2]$.

3. Нормализованные расписания

Размещение элементов в строке непрерывного $(l \times 5)$-расписания M для 3-предписаний будем называть *нормализованным*, если отличны от нуля либо первые три элемента, либо последние три элемента строки; в случае, если отличны от нуля элементы в позициях 2, 3 и 4, размещение в строке будем называть *смещенным*.

Расписание будем называть *нормализованным*, если размещение элементов в каждой строке расписания является *нормализованным.* Следующая теорема сводит задачу поиска непрерывного расписания для семейства 3-предписаний к поиску в классе нормализованных расписаний.

Теорема 1. Если для семейства Ω 3-предписаний, удовлетворяющего условию

$$\mathrm{rep}_{\Omega} i \leq 5 \text{ для каждого } i \in N,$$

существует непрерывное $(l \times 5)$-расписание, то для семейства Ω существует и нормализованное $(l \times 5)$-расписание.

Доказательство. Достаточно доказать, что если в непрерывном $(l \times 5)$-расписании M для семейства Ω 3-предписаний количество строк со смещенным размещением равно некоторому положительному k, то для семейства Ω можно указать непрерывное $(l \times 5)$-расписание, в котором количество строк со смещенным размещением равно $k - 1$.

Выберем любую строку i со смещенным размещением; $M_{i1} = M_{i5} = 0$. Выполним перемещение *ненулевого* элемента $a_1 = M_{i4}$ в нулевую ячейку M_{i1} и запомним данное действие как «начальное перемещение». Теперь размещение в строке i является, очевидно, нормализованным, но в $M[1]$ возможно a_1-пресыщение. Подматрицу матрицы M, образованную столбцами $1, 2, 4, 5$ и всеми строками с нормализованным размещением, обозначим M'; понятно, что четвертый столбец подматрицы M' a_1-ненасыщен.

Если первый столбец подматрицы $M' a_1$-насыщен, доказательство завершено.

Если первый столбец подматрицы M' a_1-пресыщен, а второй столбец подматрицы M' a_1-ненасыщен, то применение леммы 1 завершает доказательство.

Пусть, наконец, первый столбец a_1-пресыщен, а второй столбец матрицы M' a_1-насыщен. Применим лемму 2; в результате ни один из столбцов M' не пресыщен ни одним элементом. Неравенство

$$\mathrm{rep}_{M[j]} a \leq 1, \tag{3}$$

равносильное отсутствию пресыщения, может быть нарушено разве лишь в том столбце матрицы M, в который операциями из леммы 2 добавлен новый элемент:

– либо в $M[1]$ добавлен a_k, в $M[4]$ добавлен a_1;

– либо в $M[4]$ добавлен a_1, в $M[5]$ добавлен a_k.

По определению M', $M[1] = M'[1]$, $M[5] = M'[4]$. Поэтому отсутствие пресыщения в столбцах матрицы M' исключает нарушение неравенства (3) в первом и пятом столбцах матрицы M. Справедливость аналогичного утверждения для четвертого столбца матрицы M не столь очевидна (заметим, что $M'[3] \subseteq M[4]$). Однако и здесь добавление a_1 не приводит к a_1-насыщению, поскольку «начальным перемещением» a_1 было удалено из $M[4]$.

Таким образом, получено $(l \times 5)$-расписание, в котором количество строк со смещенным расписанием равно $k - 1$. Теорема доказана.

Всюду далее будем полагать, что $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ – семейство 3-предписаний с элементами из множества N, удовлетворяющее условию

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mathrm{rep}_\Omega i = 5. \tag{4}$$

Под *трансверсалью* семейства Ω будем понимать множество из l различных представителей, выбранных по одному из каждого ω_i, $1 \leq i \leq l$. Трансверсаль семейства Ω назовем *специальной трансверсалью*, если она включает все такие элементы i множества N, для которых $\mathrm{rep}_\Omega i = 5$.

Теорема 2. Нормализованное расписание для семейства 3-предписаний Ω существует тогда и только тогда, когда Ω обладает специальной трансверсалью.

Доказательство. *Необходимость.* Если для семейства 3-предписаний Ω существует нормализованное расписание, то множество $\{M_{13}, \ldots, M_{l3}\}$ является специальной трансверсалью.

Достаточность. Пусть семейство Ω обладает специальной трансверсалью. Выберем $(l \times 5)$-матрицу M с нулевыми элементами; подматрицу, образованную столбцами 1, 2, 4 и 5, обозначим M'.

Осуществим перебор всех 3-предписаний из Ω, выполняя для каждого ω_i следующие два действия: 1) обозначим через ω_i' «2-предписание», остающееся после удаления из ω_i символа, представляющего ω_i в специальной трансверсали, 2) присвоим значение данного представителя ячейке M_{i3}; $1 \leq i \leq l$. Укажем теперь такой способ размещения каждого 2-предписания ω_i' либо в первых двух ячейках, либо в последних двух ячейках отдельной матрицы M, чтобы ни в одном столбце матрицы один и тот же элемент множества N не встречался дважды.

Построим граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, а множество ребер E определено следующим образом. Вначале E пусто. Осуществим перебор всех 2-предписаний ω_i': если j и k – символы, образующие очередное ω_i', то в множество E добавляется ребро (v_j, v_k), «пронумерованное» числом i (в случае $j = k$ будет добавлена петля); номер i далее будет использован при размещении j и k. Из определения специальной трансверсали, учитывая (4), заключаем, что наибольшая степень вершины в графе G равна 4. Добавлением фиктивных ребер преобразуем G к однородному графу степени 4: сначала произвольно образуем пары из вершин с нечетными степенями (понятно, что таких вершин всегда четное число), затем соединим вершины внутри каждой пары *фиктивным* ребром; в результате все вершины графа имеют четные степени: 2 или 4, остается для каждой вершины степени 2 добавить петлю. Каждая связная компонента однородного графа степени 4 суть эйлеров граф с четным количеством ребер (коль скоро сумма степеней вершин равна $4K$, количество ребер равно $2K$, где K – некоторое целое положительное число); последовательные ребра соответствующей эйлеровой цепи пометим поочередно метками 1 и 2. Из четности количества ребер следует, что каждой вершине преобразованного графа инцидентны два ребра, помеченные 1, и два ребра, помеченные 2. Подграфы, порожденные наборами ребер, помеченных соответственно 1 и 2, обозначим $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$. Каждая связная компонента графа G_1 является однородным графом степени 2; выберем направление обхода соответствующей эйлеровой цепи, ориентируя тем самым ребра цепи; затем для каждой дуги (v_q, v_p) ориентированной цепи разместим q в ячейке M_{i1}, p – в ячейке M_{i2} (i-номер, присвоенный ребру выше). Аналогично выполним размещение в столбцах 4 и 5, используя граф G_2. Ясно, что в каждом из столбцов будет размещен точно один экземпляр каждого элемента множества N, и в каждой строке все три ненулевых элемента размещены рядом. Остается удалить пары чисел, соответствующие фиктивным ребрам. Теорема доказана.

Для проверки существования у семейства Ω специальной трансверсали построим транспортную сеть T:

1) **множеств вершин:** T_1 (источник), T_2 (сток), $x_1, \ldots, x_n$ (соответствующие элементам множества N), $y_1, \ldots, y_l$ (соответствующие предписаниям семейства Ω);

2) **дуги**:

– (T_1, x_j) пропускной способности 1 и нижним потоковым ограничением, равным: 1 при $\mathrm{rep}_\Omega\, j = 5$; 0 при $\mathrm{rep}_\Omega\, j < 5$;

– (x_j, y_i) пропускной способности 1 и нижним потоковым ограничением 0;

– (y_i, T_2) пропускной способности 1 и нижним потоковым ограничением 1; $1 \le j \le n$; $1 \le i \le l$.

Следующая элементарная лемма сводит проверку существования специальной трансверсали семейства Ω к проверке существования *допустимого потока* [12] в транспортной сети T. Напомним, что допустимым потоком называется поток f, который удовлетворяет условию $\mathrm{lo}(e) \le f(e) \le \mathrm{hi}(e)$ по каждой дуге e; здесь $\mathrm{lo}(e)$ и $\mathrm{hi}(e)$ – нижнее потоковое ограничение и пропускная способность дуги e соответственно.

Лемма 3. Семейство 3-предписаний Ω, удовлетворяющее (4), обладает специальной трансверсалью тогда и только тогда, когда в сети T существует допустимый поток.

Доказательство леммы тривиально.

Ясно, что в случае существования в сети T допустимого потока f (по теореме о целочисленности [12], f можно считать целочисленным потоком), для каждой вершины y_i имеется точно одна дуга (x_j, y_i), такая, что $f(x_j, y_i) = 1$ (и тогда $f(x_j, y_k) = 0$ при любом $k \ne j$); выбирая в трансверсаль из соответствующего предписания ω_i элемент, равный j, получаем искомую специальную трансвераль для семейства Ω.

Специальная трансверсаль, как мы видели из доказательства теоремы 2, является основой алгоритма построения нормализованного расписания. Поскольку оба построения, − как специальной трансверсали, так и нормализованного расписания на ее основе, − осуществляются за полиномиальное время, то из теорем 2 и 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Задача о непрерывном расписании для семейства 3-предписаний Ω разрешима за полиномиальное время.

Таким образом, задача, сформулированная во введении, решена полностью. Тем не менее, в обозначении необходимого и достаточного условия в формулировке теоремы 2 присутствует элемент избыточности. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Нормализованное расписание для семейства 3-предписаний Ω существует тогда и только тогда, когда Ω обладает трансверсалью.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2. Докажем достаточность. Пусть семейство Ω обладает некоторой трансверсалью R. Покажем, что тогда Ω обладает и специальной трансверсалью.

Соотнесем семейству Ω двудольный граф $G = (X, Y, E)$, где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$, множество E образовано следующим образом: выполняется перебор всех предписаний семейства Ω, добавляя в множество E при просмотре очередного предписания $\omega_i = (q, p, s)$ три ребра: (x_q, y_i), (x_p, y_i) и (x_s, y_i). Ясно, что степени всех вершин из Y равны 3, а наибольшая степень вершин из X, в соответствии с (4), равна 5.

Трансверсали R соответствует, очевидно, полное паросочетание M_1 множества Y в множество X. С другой стороны, так как *в двудольном графе существует паросочетание, насыщающее все вершины максимальной степени* [11], степени всех вершин из Y равны 3, а степень каждой вершины из X не превышает 5, то в графе G существует паросочетание M_2, насыщающее все вершины степени 5. Тогда, согласно теореме Мендельсона-Далмеджа [3], в графе G найдется паросочетание $M \subseteq M_1 \cup M_2$, насыщающее все вершины множества Y и все вершины степени 5 из множества X; перебирая все ребра $(x_j, y_i) \in M$ и выбирая каждый раз элемент j в качестве представителя соответствующего предписания ω_i, получим специальную трансверсаль. Теорема доказана.

Статья написана при поддержке гранта РФФИ 0901-96504-р_юг_а и гранта 2010-1.3.2-111-017 Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Список литературы

1. Asratian, A.S. Some Results on Interval Edge Colorings of (α, β)-Biregular Bipartite Graphs / A.S. Asratian, C.J. Casselgren. – S-581 83 Linkoping, Sweden : Linköping University, 2007. – (Preprint / Linköping University, Department of Mathematics).

2. Krzysztof, G. The Complexity of Consecutive Δ-Coloring of Bipartite Graphs: 4 is Easy, 5 is Hard / G. Krzysztof // Ars Combinatoria. – 1997. – No. 47. – P. 287–298.

3. Mendelsohn, N.S. Some Generalizations of the Problem of Distinct Representatives / N.S. Mendelsohn, A.L. Dulmage // Canad. J. Math. – 1958. – Vol. 10. – P. 230–241.

4. Магомедов, А.М. Условия построения непрерывных расписаний для двухэлементных предписаний / А.М. Магомедов // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-23 : сб. тр. XXIII Междунар. науч. конф. : в 12 т. / под общ. ред. В.С. Балакирева. – Саратов, 2010. – Т. 2. – С. 58–60.

5. Магомедов, А.М. К вопросу о реберной раскраске двудольного графа / А.М. Магомедов // Дискрет. математика. – 2009. – № 21(2). – С. 153–159.

6. Магомедов, А.М. Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя / А.М. Магомедов // Мат. заметки. – 2009. – № 85(1). – С. 65–72.

7. Магомедов, А.М. Непрерывная Δ-раскраска некоторых двудольных графов G с $G(\Delta)$ = 5 и 6 / А.М. Магомедов, Т.А. Магомедов, М.А. Магомедов // Вопр. соврем. науки и практики. Ун-т им. В.И. Вернадского. – 2010. – № 7–9(30). – С. 51–57.

8. Магомедов, А.М. Условия существования непрерывных расписаний длительности пять / А.М. Магомедов, А.А. Сапоженко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. математика и кибернетика. – 2010. – № 34(1). – С. 39–44.

9. Магомедов, А.М. Непрерывное расписание для специализированных процессоров без отношения предшествования / А.М. Магомедов // Вестн. Моск. энергет. ин-та. Сер. Автоматика, вычисл. техника, информатика. – 2009. – № 5. – С. 14–17.

10. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы : монография / М. Свами, К. Тхуласираман. – М. : Мир, 1984. – 455 с.

11. Танаев, В.С. Теория расписаний. Многостадийные системы / В.С. Танаев, Ю.Н. Сотсков, В.А. Струсевич. – М. : Наука, 1989. – 328 с.

12. Форд, Л.Р. Потоки в сетях / Л.Р. Форд, Д.Р. Фалкерсон. – М. : Мир, 1966. – 276 с.

Continuous Schedule for Three-Element Instructions

A.M. Magomedov

Dagestan State University, Makhachkala

Key words and phrases: admissible flow; bigraph; continuous schedule; matching; network.

Abstract: For 3-instructions the problem about the continuous schedule of duration 5 is considered. It is proved, that the problem can be solved in polynomial time. The required and sufficient conditions are found.
