УДК 519.1+519.8

НЕПРЕРЫВНАЯ Δ-РАСКРАСКА НЕКОТОРЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ G с $\Delta(G)$= 5 и 6

А.М. Магомедов, Т.А. Магомедов, М.А. Магомедов

ГОУ ВПО «Дагестанский государственный университет», г. Махачкала

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор А.К. Рамазанов

Ключевые слова и фразы: двудольный граф; непрерывная раскраска; полиномиальное время.

Аннотация: Рассмотрен вопрос существования непрерывной реберной раскраски Δ-красками у двудольного графа $G = (X, Y, E)$, где степени всех вершин X равны $\Delta(G)$. Показано, что в следующих двух случаях ответ может быть получен за полиномиальное время: 1) $\Delta(G) = 5$ и отсутствуют вершины степени 1; 2) $\Delta(G) = 6$ и отсутствуют вершины нечетной степени.

1. Введение

В статье используется терминология монографии [12]. Под непрерывной Δ-раскраской (или, сокращенно, Δ-раскраской) двудольного графа $G = (X, Y, E)$ с максимальной степенью вершины Δ будем понимать отображение $E \to C = \{1, \dots, \Delta\}$ множества ребер в множество первых Δ натуральных чисел, такое, что в каждой вершине v представлены $d(v)$ цветов из C с последовательными номерами

$$i, i + 1, \dots, i + d(v) - 1 \in C.$$

Если Δ-раскраска графа G существует, то граф G называется Δ-раскрашиваемым, в противном случае – Δ-нераскрашиваемым.

Непрерывная раскраска двудольных графов востребована, например, в задачах теории расписаний. Пусть для каждого прибора y_i из множества Y предписан набор (мультимножество) требований из множества X, над каждым из которых прибор y_i должен выполнить одну операцию; длительность операции равна 1, порядок выполнения операций безразличен, запрещена одновременная обработка прибором нескольких требований или одного требования несколькими приборами. Наибольшее из количеств

Магомедов А.М. – кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой дискретной математики и информатики, magomedtagir1@yandex.ru; Магомедов Т.А. – сотрудник кафедры дискретной математики и информатики; Магомедов М.А. – сотрудник кафедры дискретной математики и информатики, ДГУ, г. Махачкала.

операций, предписанных каждому прибору, и количеств операций, предписанных выполнить над каждым требованием, обозначим Δ. Спрашивается, существует ли расписание обслуживания длительности Δ без прерываний работы каждого прибора и без задержек обработки каждого требования, соответствующее заданным предписаниям?

Построим двудольный граф $G = (X, Y, E)$, в котором количество ребер, соединяющих вершину $x_j \in X$ с вершиной $y_i \in Y$, равно количеству операций, предписанных прибору y_i выполнить над требованием x_j; максимальная степень вершины графа G будет равна введенному выше Δ. Если граф $G = (X, Y, E)$ является Δ-раскрашиваемым (и только тогда), существует искомое расписание без задержек и прерываний. Для доказательства достаточно отождествить номер цвета ребра (x_j, y_i) в раскраске графа номеру единицы времени обработки прибором y_i требования x_j.

Напомним, что задача построения оптимального по быстродействию расписания обслуживания n требований l приборами NP-полна:

1) при $l = 3$, если принято ограничение: коль скоро начат процесс обслуживания требования прибором, это требование не может обслуживаться никаким другим прибором до завершения его обслуживания (возможно, с перерывами) данным прибором [3];

2) при $l \geq 3$ в предположении, что в процессе обслуживания каждого требования не допускаются задержки, даже если разрешены прерывания процесса обслуживания каждого требования каждым прибором (результат В.А. Струсевича и Е.Р.Ерошиной [14]).

В [11] показано, что если для каждого прибора мощность предписанного набора требований равна 2, то задача о расписании длительности 5 без прерываний в работе каждого прибора (задержка в обслуживании требований разрешается) разрешима за полиномиальное время. В общем виде задача о Δ-раскрашиваемости двудольного графа NP-полна [13]. Задача разрешима за полиномиальное время при $\Delta = 3$ [4] и при $\Delta = 4$ [6]; но при $\Delta = 5$ она становится NP-полной [6].

Обозначим через $\Gamma_{\Delta,P}$ класс двудольных графов $G = (X, Y, E)$, где степень каждой вершины $x \in X$ равна Δ, степень каждой вершины $y \in Y$ принадлежит некоторому множеству P с элементами, не превышающими Δ. Ряд результатов, относящихся к различным аспектам рассматриваемой проблемы, получили А.С. Асратян, Р.Р. Камалян, А.В. Пяткин и др. В частности, в [1] доказана NP-полнота задачи о 6-раскрашиваемости графа класса $\Gamma_{6,\{3\}}$; отметим, что доказательство опирается на результат [7] об NP-полноте задачи существования в графе класса $\Gamma_{4,\{3\}}$ кубического подграфа, включающего все вершины графа, степени которых равны 4. Некоторые вопросы, относящиеся к рассматриваемой проблеме, обсуждаются в [8, 10, 11].

В данной статье доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Задача о 5-ракрашиваемости графа класса $\Gamma_{5,\{2,3,4,5\}}$ разрешима за полиномиальное время.

Теорема 2. Задача о 6-раскрашиваемости графа класса $\Gamma_{6,\{2,4,6\}}$ разрешима за полиномиальное время.

2. Задача о 5-ракрашиваемости графа класса $\Gamma_{5,\{2,3,4,5\}}$

В [6] (следствие 3.12) показана 4-раскрашиваемость двудольного графа с $\Delta = 4$, не содержащего вершин степени 3. Нам понадобится незначительное уточнение этого факта.

Лемма 1. Двудольный граф $G' = (X', Y', E')$ класса $\Gamma_{4,\{2,4\}}$ допускает 4-раскраску, такую, что в каждой вершине степени 2 представлены либо цвета 1 и 2, либо цвета 3 и 4.

Доказательство. Без ограничения общности граф G' будем считать связным. Рассмотрим эйлеров цикл L и, начиная с любого ребра, инцидентного произвольно выбранной вершине $x \in X'$ (назовем ее «начальной» вершиной), присвоим последовательным ребрам цикла L метки 1 и 2 по следующему правилу: при переходе через вершину y степени 2 метка сохраняется, в остальных случаях метка меняется (с 1 на 2 или с 2 на 1). Понятно, что каждой вершины степени 4, отличной от начальной, инцидентны по два ребра с метками 1 и 2; в действительности утверждение справедливо и для начальной вершины, поскольку при обходе цикла L метка меняется нечетное число раз: переход через начальную вершину выполняется один раз, а переход через каждую из остальных вершин степени 4 – по два раза. Для каждого $i = 1, 2$, обозначим подграф графа G', порожденный на ребрах с меткой i, через $G_i{}'$. Каждая связанная компонента $G_i{}'$ является циклом с четным количеством ребер; остается раскрасить последовательные ребра каждого такого цикла попеременно в цвета $2i - 1$ и $2i$; $i = 1, 2$.

Лемма доказана.

Замечание 1. При любой Δ-раскраске двудольного графа с $\Delta = 5$ цвет 3 представлен в каждой вершине, степень которой превышает 2.

Подмножество, образованное в множестве Y вершинами степени k, будем обозначать Y_k. Если выбрана Δ-раскраска двудольного графа $G = (X, Y, E)$, то обозначим наименьший и наибольший номера цветов, представленных в вершине v, через $c(v)$ и $C(v)$ соответственно.

Теорема 3. Для 5-раскрашиваемости двудольного графа $G = (X, Y, E)$ класса $\Gamma_{5,\{2,3,4,5\}}$ необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $|Y_4| = 0$;

2) существует полное паросочетание множества X с множеством Y, насыщающее все вершины множества $X \cup Y_3 \cup Y_5$ и только их.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть граф G 5-раскрашиваем и выбрана некоторая его 5-раскраска. Покажем, что $c(y_0) \neq 2$ и $C(y_0) \neq 4$ для любой вершины $y_0 \in Y$. Пусть, например, $C(y_0) = 4$. Поскольку $C(x_1) = \cdots = C(x_n) = 5$, то $C(y) = 5$ в точности для n вершин $y \in Y$ (понятно, что эти вершины отличны от y_0). В силу неравенств $d(y) \geq 2$ и непрерывности раскраски, в каждой из этих n вершин представлен и цвет 4. Тогда не менее $n + 1$ ребер имеют цвет 4; следовательно, хотя бы одной из вершин $x_1, \ldots, x_n$ инцидентны два ребра с цветом 4, что противоречит определению 5-раскраски. Аналогично доказывается, что $c(y_0) \neq 2$.

Отсюда следует: 1) $|Y_4| = 0$; в самом деле, если $d(y_0) = 4$ для некоторой вершины $y_0 \in Y$, то диапазон цветов $[c(y_0), C(y_0)]$, представленных в вершине y, суть [1,4] или [2,5], т.е. либо $C(y_0) = 4$, либо $c(y_0) = 2$, что противоречит доказанному; 2) ни в одной вершине $y \in Y_2$ цвет 3 не представлен, другими словами, $[c(y), C(y)]$ = [1,2] или [4,5] для каждой вершины $y \in Y_2$.

Согласно замечанию 1, цвет 3 представлен в каждой вершине, степень которой превышает 2: в вершинах множества $X \cup Y_3 \cup Y_5$. Коль скоро множество Y_4 пусто и цвет 3, по доказанному, не представлен в вершинах из Y_2, то данный цвет представлен только в вершинах множества $X \cup Y_3 \cup Y_5$. Тогда множество ребер с цветом 3 и образует нужное полное паросочетание множества X с множеством Y.

Достаточность. Пусть теперь $Y = Y_2 \cup Y_3 \cup Y_5$ и существует полное паросочетание M множества X с множеством Y, насыщающее все вершины множества $X \cup Y_3 \cup Y_5$ и только их. Докажем, что граф G 5-раскрашиваем.

Удалим из графа ребра паросочетания M и обозначим полученный граф класса $\Gamma_{4,\{2,4\}}$ через $G' = (X', Y', E')$. Согласно лемме 1, выполним 4-раскрашивание ребер E', после чего заменим цвета ребер с 4 на 5, и с цвета 3 на 4. Восстановим удаленные ребра паросочетания M и присвоим ребрам M цвет 3. В результате получим 5-раскраску графа G.

Теорема доказана.

Следствие 1. Проверка первого условия теоремы 2 тривиальна, а проверка второго условия выполнима, очевидно, за полиномиальное время (например, используя потоковые методы). Поэтому из теоремы 2 вытекает теорема 1.

3. Задача о 6-раскрашиваемости графа класса $\Gamma_{6,\{2,4,6\}}$

Замечание 2. При любой 6-раскраске графа цвета 3 и 4 представлены в каждой вершине, степень которой превышает 3.

Легко привести примеры как 6-раскрашиваемых, так и 6-нераскрашиваемых графов класса $\Gamma_{6,\{2,4,6\}}$.

Пример 1. Граф $K_{6,6}$ 6-раскрашиваем. Для получения 6-раскраски графа $K_{6,6}$ достаточно разбить множество его ребер на 6 непересекающихся паросочетаний $E_1, \dots, E_6$ ([12], следствие 8.22.1) и присвоить ребрам из E_i цвет i; $1 \le i \le 6$.

Пример 2. Граф $G = (X, Y, E)$, изображенный на рис. 1, 6-нераскрашиваем. В самом деле, если допустить, что 6-раскраска графа G существует, то, согласно замечанию 2, в каждой из вершин $y_1, \dots, y_4$ представлен цвет 3. Тогда хотя бы в одной из трех вершин x_1, x_2, x_3 цвет 3 будет представлен более чем один раз, что противоречит определению 6-раскраски.

Для графа $G = (X, Y, E) \in \Gamma_{6,\{2,4,6\}}$ приведем некоторые понятия, введенные в [9]. Будем говорить, что в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ полные реберно-непересекающиеся паросочетания M_1 и M_2 множества X с множеством Y образуют *дуэт*, если каждая вершина множества $X \cup Y_4 \cup Y_6$ насыщена в M_1 и в M_2; количество вершин множества Y_2, насыщенных точно в одном из паросочетаний дуэта, назовем *дефицитом* дуэта, дуэт с наименьшим значением дефицита назовем *максимальным*, а дуэт с нулевым значением дефицита – *совершенным*.

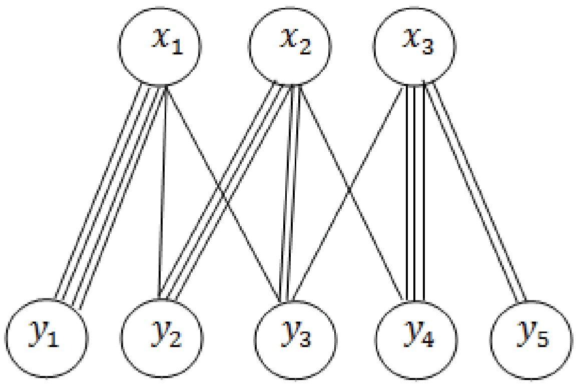

Рис. 1. 6-нераскрашиваемый граф класса $\Gamma_{6,\{2,4,6\}}$

Теорема 4. Двудольный граф $G = (X, Y, E)$ класса $\Gamma_{6\{2,4,6\}}$ 6-раскрашиваем тогда и только тогда, когда G обладает совершенным дуэтом.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть выбрана некоторая 6-раскраска графа G. Поскольку $c(x_1) = \cdots = c(x_n) = 1$, то $c(y) = 1$ в точности для n вершин $y \in Y$; тогда, в силу непрерывности раскраски (и неравенства $d(y) \geq 2$) в каждой из этих n вершин представлен цвет 2. Таким образом, если $c(y) = 2$ для некоторой вершины $y \in Y$, то не менее $n + 1$ ребер имеют цвет 2; следовательно, хотя бы одной из вершин $x_1, \dots, x_n$ инцидентны два ребра с цветом 1, что невозможно. Следовательно, $c(y) \neq 2$. Аналогично доказывается, что для $y \in Y$ значение $c(y)$ отлично от 4 и 6. Таким образом, $c(y) \in \{1,3,5\}$ для каждой вершины $y \in Y$.

Коль скоро для каждой вершины $y \in Y$

$$c(y) \in \{1,3,5\} \quad \text{и} \quad d(y) \in \{2,4,6\},$$

то $[c(y), C(y)]$ суть один из следующих диапазонов:

$$[1,2], [1,4], [1,6], [3,4], [3,6], [5,6].$$

Отсюда видно, что диапазон $[c(y), C(y)]$ либо содержит оба цвета 3 и 4, либо не содержит ни один из этих двух цветов. Выбрав в качестве M_1 и M_2 множества ребер цвета 3 и 4 соответственно, получим совершенный дуэт.

Достаточность. Пусть полные реберно-непересекающиеся паросочетания M_1 и M_2 множества X с множеством Y образуют совершенный дуэт в графе G. Докажем, что граф G 6-раскрашиваем. Удалим ребра дуэта $\{M_1, M_2\}$ из графа и обозначим полученный граф класса $\Gamma_{4,\{2,4\}}$ через $G' = (X', Y', E')$. Согласно лемме 1, выполним 4-раскрашивание множества ребер E', после чего заменим цвета 3 и 4 на 5 и 6 соответственно. Восстановим теперь удаленные ребра дуэта $\{M_1, M_2\}$ и присвоим ребрам из M_1 и M_2 цвета 3 и 4 соответственно. В результате получим 6-раскраску графа G.

Теорема доказана.

Пусть $\{M_1, M_2\}$ — дуэт в графе G, концы $y', y'' \in Y_2$ некоторого пути C насыщены точно в одном из M_1 и M_2. Если для каждой неконцевой вершины v пути C выполнено условие: при $v \in X \cup Y_4 \cup Y_6$ из двух инцидентных v ребер пути C множеству $M_1 \cup M_2$ принадлежит в точности одно ребро, а при $v \in Y_2 -$ либо оба ребра, либо ни одно, то C назовем *псевдочередующимся* путем относительно $\{M_1, M_2\}$.

Воспользуемся следующей теоремой [9], являющейся распространением характеризации, полученной в [2] для максимального паросочетания в двудольном графе, на понятие максимального дуэта.

Теорема 5. Дуэт $\{M_1, M_2\}$ в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда граф G не содержит псевдочередующегося пути относительно $\{M_1, M_2\}$.

Замечание 3. Вопросы сложности вычисления максимального паросочетания в двудольном графе освещены в [5]. Вычисление максимального дуэта потребует не более $O(N)$ шагов, на каждом из которых проверка существования псевдочередующегося пути относительно дуэта и построение такого пути с последующим уменьшением дефицита осуществляются за время $O(N^2)$.

Из замечания 3 следует, что из теоремы 4 вытекает теорема 2, поскольку вычисление максимального дуэта осуществляется за полиномиальное время, а в соответствии с теоремой 4 для проверки 6-раскрашиваемости графа остается проверить, является ли найденный максимальный дуэт совершенным.

Список литературы

1. Asratian, A.S. Some Results on Interval Edge Colorings of (α, β)-Biregular Bipartite Graphs / A.S. Asratian, C.J. Casselgren // Department of Mathematics, Linkoping University, S-581 83 Linkoping, Sweden, (2007), Preprint.

2. Berge, C. Two Theorems in Graph Theory / C. Berge // Proceedings of the National Academy of Sciences United States. – 1957. – Vol. 43. – P. 842–844.

3. Cho, Y. Preemptive Scheduling of Independent Jobs with Release and Due Times on Open, Flow and Job Shops / Y. Cho, S. Sahni // Operations Research. – 1981. – No. 29(3). – P. 511–512.

4. Even, S. On the Complexity of Timetable and Integral Multi-Commodity Flow Problems / S. Even, A. Itai, A. Shamir // SIAM Journal on Computing. – 1976. – No. 5(4). – P. 691–703.

5. Hopcroft, J.E. An $n^{2.5}$ Algorithm for Maximum Matching in Bipartite Graphs / J.E. Hopcroft, R.M. Karp // SIAM Journal on Computing. – 1973. – No. 2. – P. $225 - 231$.

6. Krzysztof, G. The Complexity of Consecutive Δ-Coloring of Bipartite Graphs: 4 is Easy, 5 is Hard / G. Krzysztof // Ars Combinatoria. – 1997. – No. 47. – P. 287–298.

7. Pyatkin, A.V. Interval Coloring of (3,4)-Biregular Bipartite Graphs Having Large Cubic Subgraphs / A.V. Pyatkin // Journal of Graph Theory. – 2004. – No. 47. – P. 122–128.

8. Магомедов, А.М. К вопросу о реберной раскраске двудольного графа / А.М. Магомедов // Дискрет. математика. – 2009. – № 21(2). – С. 153–159.

9. Магомедов, А.М. О модификации характеризации Бержа / А.М. Магомедов // Проблемы теоретической кибернетики : тез. докл. XV междунар. конф., Казань, 2–7 июня 2008 г. / под ред. Ю.И. Журавлева. – Казань, 2008. – С. 77.

10. Магомедов, А.М. Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя / А.М. Магомедов // Мат. заметки. – 2009. – № 85(1). – С. 65–72.

11. Магомедов, А.М. Условия существования непрерывных расписаний длительности пять / А.М. Магомедов, А.А. Сапоженко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. математика и кибернетика. – 2010. – № 34(1). – С. 39–44.

12. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы : монография / М. Свами, К. Тхуласираман. – М. : Мир, 1984. – 455 с.

13. Севастьянов С.В. Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа / С.В. Севастьянов // Методы дискрет. анализа. – 1990. – № 50. – С. 61–72.

14. Танаев, В.С. Теория расписаний. Многостадийные системы / В.С. Танаев, Ю.Н. Сотсков, В.А. Струсевич. – М. : Наука, 1989. – 328 с.

Continuous Δ-Coloring of Bipartite Graphs *G* with $\boldsymbol{\Delta(G)}$ = 5 or 6

A.M. Magomedov, T.A. Magomedov, M.A. Magomedov

Dagestan State University, Makhachkala

Key words and phrases: bipartite graph; continuous coloring; polynomial time.

Abstract: We investigate the question whether a bipartite graph $G = (X, Y, E)$, where the degree of every vertex in X is equal to $\Delta(G)$, has a continuous coloring with $\Delta(G)$ colors. We show that the above question can be answered in polynomial time in two cases: 1) If $\Delta(G) = 5$ and no vertex of degree 1; 2) If $\Delta(G) = 6$ and no vertex of odd degree.
