УДК 33:303.093.7

ИССЛЕДОВАНИЕ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СИМВОЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

А.П. Гладких

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент д-р техн. наук, д-р экон. наук, профессор Б.И. Герасимов

Ключевые слова и фразы: динамическая система; модель экономики; обыкновенные дифференциальные уравнения; полилинейная функция; символьное решение; символьное интегрирование.

Аннотация: Рассмотрен анализ модели рыночной экономики с помощью метода символьного интегрирования. Показано, что при некоторых значениях параметров траектории системы обладают свойствами беспорядочности и случайности.

Введение

В настоящее время рыночная экономика является важнейшим объектом исследований, в экономической теории прочно закрепились различные модели взаимодействия рынков рабочей силы, товаров и денег и др. [1–3].

Подавляющее большинство экономических процессов, как известно, протекает во времени, вследствие чего математические модели, адекватные объекту исследования, должны быть динамическими. Один из подходов к прогнозу развития динамических экономических процессов – автономный. В рамках такого подхода анализируется как смещается точка равновесия соответствующей динамической модели при изменении тех или иных параметров последней.

Однако следует подчеркнуть, что сложным экономическим описаниям систем соответствуют модели, существенно нелинейные, пример такой математической модели показан в [4]. Поэтому автономный подход эффективен лишь до тех пор, пока в силу некоторых причин характер стационарного состояния не изменится кардинальным образом. Подобные изменения, называемые бифуркациями, принадлежат уже к области приложений методов нелинейного динамического анализа.

Возвратимся к математической модели рыночной экономики, описанной в [4]. Она представляет собой систему трех нелинейных дифференциальных уравнений.

Гладких А.П. – аспирант кафедры «Распределенные вычислительные системы», e-mail: gap84@rambler.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов.

Анализ поведения макроэкономических показателей, изложенный в работе [4], выполняется с помощью исследования этой системы с применением условия Рауса–Гурвица, все достоинства и недостатки которого известны. Проанализируем модель с применением метода символьного интегрирования с целью моделирования и исследования динамики поведения объекта. В результате использования данного метода вычисления будут производиться в символьном виде, а конечные результаты обладают бóльшей степенью точности, чем при использовании иных подходов.

Метод символьного интегрирования

Рассмотрим объект, векторная запись которого может быть представлена как

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = C\,, \tag{1'}$$

где $x = (x_1,...,x_n)$; $f(x)$ – полилинейная форма; A – квадратичная матрица.

Эквивалентное интегральное уравнение, соответствующее (1), имеет вид

$$x(t) = C + \int_0^t [Ax(\tau) + f(x(\tau))]d\tau\,. \tag{2}$$

Применяя метод последовательных приближений к (2), получим

$$x_{N+1}(t) = C + \int_0^t [Ax_N(\tau) + f(x_N(\tau))]d\tau\,. \tag{3}$$

В соответствии с (3) имеем начальное приближение

$$x_1(t) = C + \int_0^t [Ax_0(\tau) + f(x_0(\tau))]d\tau = C + Ax_0(t)t + f(x_0(t))t\,,$$

и

$$x_2(t) = C + \int_0^t [A(C + Ax_0(\tau)\tau + f(x_0(\tau))\tau) + f(x_1(\tau))]d\tau =$$

$$= C + ACt + \frac{A^2t^2}{2}x_0(t) + \frac{Af(x_0(t))t^2}{2} + F_1(x_0(t),t),$$

где $F_1(x_0(t),t) = \int_0^t f(x_1(\tau))d\tau = tf(C + Ax_0(t)t + f(x_0(t))t)$;

$$x_3(t) = C + \int_0^t \left[A\left(C + AC\tau + \frac{A^2\tau^2}{2}x_0(\tau) + \frac{Af(x_0(\tau))\tau^2}{2} + F_1(x_0(\tau),\tau) \right) + f(x_2(\tau)) \right] d\tau =$$

$$= C + ACt + \frac{A^2t^2}{2}C + \frac{A^3t^3}{3!}x_0(t) + \frac{A^2 f(x_0(t))t^3}{3!} + tAF_1(x_0(t),t) + F_2(x_0(t),t)$$

или, подставив значение $F_1(x_0(t),t)$,

$$x_3(t) = C + ACt + \frac{A^2t^2}{2}C + \frac{A^3t^3}{3!}x_0(t) + \frac{A^2 f(x_0(t))t^3}{3!} +$$
$$+ t^2 Af(C + Ax_0(t)t + f(x_0(t))t) + F_2(x_0(t),t),$$

где

$$F_2(x_0(t),t) = \int_0^t f(x_2(\tau))d\tau = tf(x_2(\tau)) = tf(C + ACt + \frac{A^2t^2}{2}x_0(t) +$$
$$+ \frac{Af(x_0(t))t^2}{2} + tf(C + Ax_0(t)t + f(x_0(t))t)).$$

Продолжая вычисления аналогичным образом, получим

$$x_{N+1}(t) = \left[E + At + \frac{A^2t^2}{2} + ... + \frac{(At)^{(N+1)}}{(N+1)!}\right]C + \frac{A^N f(x_0(t))t^{(N+1)}}{(N+1)!} + F_N(x_0(t),t). \quad (4)$$

Учитывая, что в (4) при $N \to \infty$ слагаемое $\frac{A^N f(x_0(t))t^{(N+1)}}{(N+1)!} \to 0$, а сумма $E + At + \frac{A^2t^2}{2} + ... + \frac{(At)^{(N+1)}}{(N+1)!}$ представляет из себя определение матричной экспоненты e^{At} в ряд, получим

$$x_{N+1}(t) = \mathrm{e}^{At}C + F_N(x_0(t),t), \quad (5)$$

где $F_N(x_0(t),t) = \underbrace{\int_0^t ... \int_0^t}_{N} f(x_0(\tau))d\tau.$

Оператор, представляющий собой правую часть (2), при малых значениях t является сжимающим. Поэтому существует такое положительное число T, что на отрезке $[0,T]$ схема (5) сходится к решению уравнения (2), причем равномерно. Это решение имеет вид

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}C + F(x_0(t),t).$$

Исследование модели рыночной экономики

Как показано в работе [4], объект рыночной экономики может быть описан следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = bx^1\left((1-\sigma)x^3 - \delta x^2\right), \\ \dot{x}^2 = x^1\left(1-(1-\delta)x^2 + \sigma x^3\right), \\ \dot{x}^3 = a\left(x^2 - dx^1\right) \end{cases} \tag{6}$$

или в альтернативном виде

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = bx^1x^3 - bx^1x^3\sigma - \delta x^1\delta x^2, \\ \dot{x}^2 = x^1 - x^1x^2 - x^1x^2\delta + x^1\sigma x^3, \\ \dot{x}^3 = ax^2 - adx^1, \end{cases} \tag{7}$$

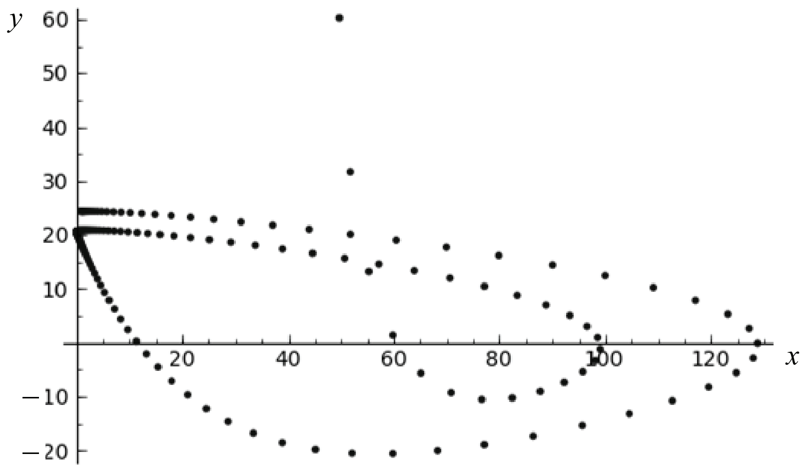
где b, a, d – общие параметры; δ – параметр, определяющий денежные средства, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса государства; σ – параметр, определяющий денежные средства, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса предпринимателей.

В системе (7) $x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$ – вектор независимых переменных; $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -ad & a & 0 \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов; $f(x) = \begin{bmatrix} bx^1x^3 - \sigma bx^1x^3 - b\delta x^1x^2 \\ -x^1x^2 - \delta x^1x^2 + \sigma x^1x^3 \\ 0 \end{bmatrix}$ – вектор нелинейных частей.

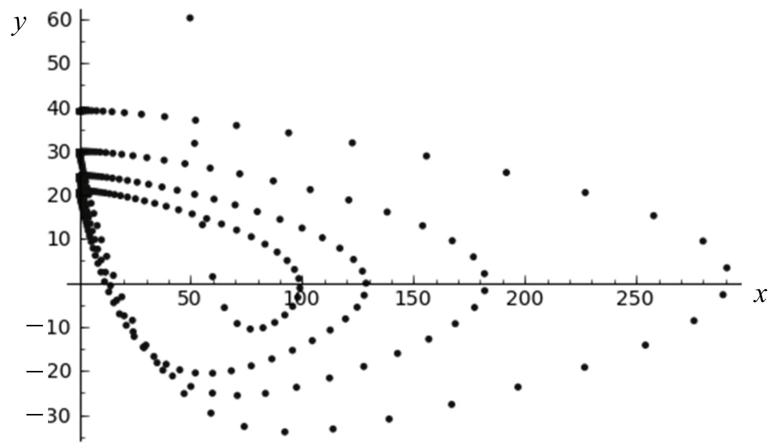
Результаты решения (7), полученные с помощью программы на языке математической системы Sage, представлены на рисунках ниже. Графики выполнены в координатах x, y – капитал, платежеспособный спрос. Значения общих параметров в расчете: $b = 0{,}4$; $a = 3{,}7$; $d = 1{,}7$.

На рис. 1, *а*, *б* видно развитие экономической модели в том случае, когда денежные средства, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса предпринимателей, сначала постоянно уменьшаются при сохранении положительного платежеспособного спроса государства. Как видно из рисунков, в данной ситуации наблюдается постепенное снижение уровня потребления, и как следствие, капитализации, затем сменяющееся очередным подъемом.

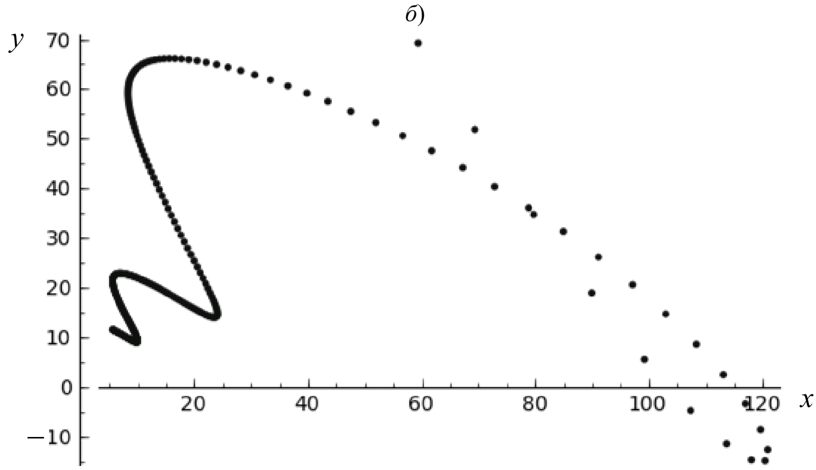
На рис. 1, *в* представлен вариант, когда денежные средства, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса предпринимателей, и денежные средства, определяющие платежеспособный спрос государства, падают. При этом наблюдается снижение спроса предпринимателей, ведущее к уменьшению капитализации, и затем к возможному застою и разрушению экономики.



а)



б)



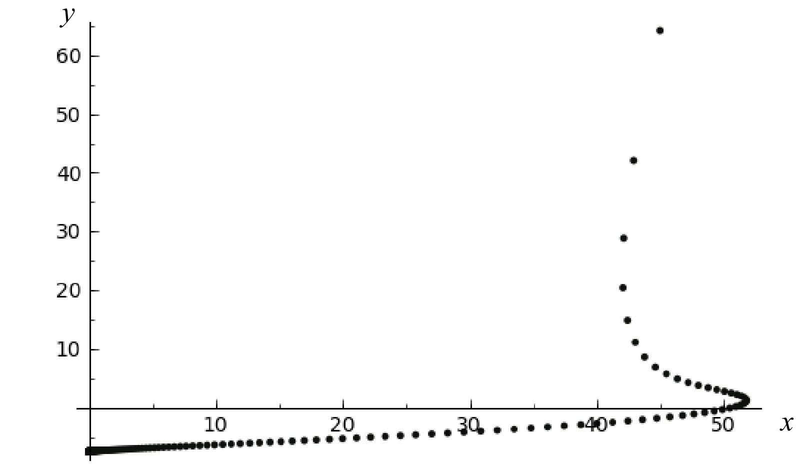
в)

Рис. 1. График траектории движения системы (начало):

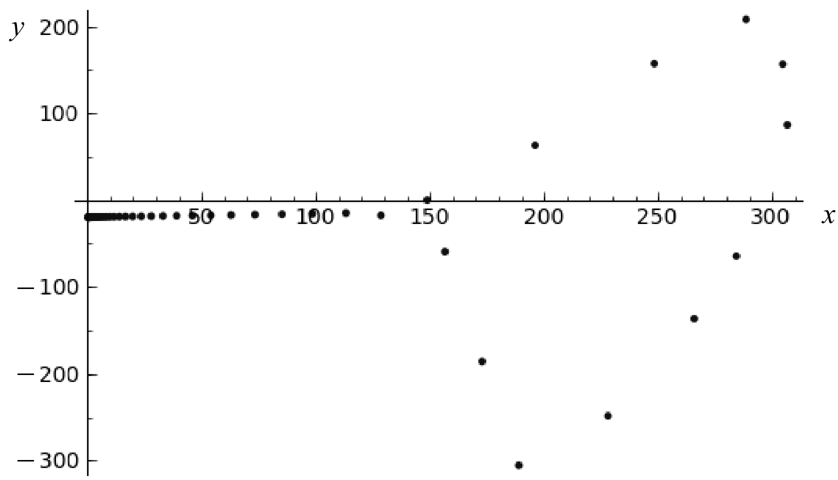
а – $\sigma = -1$; $\delta = 0{,}5$; $T = 0{,}005$; $n = 300$; $x_0^1 = 50$; $x_0^2 = 106$; $x_0^3 = 25$;

б – $\sigma = -1$; $\delta = 0{,}5$; $T = 0{,}005$; $n = 800$; $x_0^1 = 50$; $x_0^2 = 106$; $x_0^3 = 25$;

в – $\sigma = -1$; $\delta = -0{,}5$; $T = 0{,}005$; $n = 300$; $x_0^1 = 300$; $x_0^2 = 86$; $x_0^3 = 25$



г)



д)

Рис. 1 (окончание):

г – $\sigma = 0{,}266$; $\delta = 0{,}65$; $T = 0{,}005$; $n = 300$; $x_0^1 = 50$; $x_0^2 = 106$; $x_0^3 = 25$;

д – $\sigma = 0{,}266$; $\delta = 0{,}65$; $T = 0{,}005$; $n = 500$; $x_0^1 = 300$; $x_0^2 = 46$; $x_0^3 = 5$

На рис. 1, *г*, *д* показаны ситуации, которые соответствуют появлению дополнительных возможностей спроса у предпринимателей и государства. При этом возможны различные варианты как положительного, так и отрицательного развития экономической модели, характеризующие правильность действий по распоряжению возникающей прибылью у предпринимателей и государства.

Полученные результаты показывают высокую чувствительность модели к изменению параметров σ, δ и несколько расходятся с приведенными в работе [4]. В частности, при положительном платежеспособном спросе предпринимателей и государства циклическое развитие экономической модели наблюдается далеко не всегда. Это отличие объяснимо применением другого метода моделирования, использованного в исследовании нелинейной системы дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Власов, М.П. Моделирование экономических процессов / М.П. Власов. – Ростов н/Д : Феникс, 2005 – 409 с.
2. Колемаев, В.А. Математическая экономика : учеб. для вузов / В.А. Колемаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.
3. Лебедев, В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов / В.В. Лебедев. – М. : ИЗОГРАФ, 1997. – 224 с.
4. Магницкий, Н.А. Новые методы хаотической динамики / Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.

Symbolical Integration for Market Economy Research

A.P. Gladkikh

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: dynamic system; economy model; general differential equations; polylinear function; symbolical decision.

Abstract: The paper is devoted to the analysis of spontaneous economy model by means of symbolical integration technique. It is shown that at some values of parameters system trajectories possess properties of irregularity and occasionality.
