УДК 539.3

РАСЧЕТ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ

Г.М. Куликов, С.В. Плотникова, С.А. Струлев, Ю.В. Кулешов

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Ключевые слова и фразы: геометрически точный элемент оболочки; дискретно-структурная модель; упругая многослойная оболочка.

Аннотация: Разработан алгоритм численного решения геометрически нелинейной контактной задачи для упругой многослойной композитной оболочки под действием следящего давления на основе $(4N+3)$-параметрической дискретно-структурной модели путем использования деформационных соотношений Грина–Лагранжа, точно представляющих произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в криволинейных координатах отсчетной поверхности оболочки, где N – число слоев. В данном алгоритме значение узловой контактной силы по направлению нормали к ограничивающей поверхности связано с множителем Лагранжа λ посредством формулы $\lambda|\mathrm{grad}\,\Psi|$, где Ψ – функция непроникания контактирующих тел. Это позволило использовать достаточно большие шаги по нагрузке, исходя из геометрически точного элемента оболочки, развитого ранее в работах автора.

Рассмотрим тонкую оболочку толщиной h, составленную из N упругих анизотропных слоев постоянной толщины h_k. Будем полагать, что в каждой точке оболочки существует поверхность упругой симметрии, параллельная отсчетной поверхности Ω. В качестве отсчетной поверхности примем внутреннюю поверхность какого-либо слоя или поверхность раздела слоев, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам θ_1 и θ_2, отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату θ_3 будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности Ω (рис. 1). Пусть z_{k-1} и z_k – поперечные коорди-

Куликов Г.М. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика»; Плотникова С.В. – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика», e-mail: psvetlana1962@rambler.ru; Струлев С.А. – аспирант; Кулешов Ю.В. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика», ТамбГТУ, г. Тамбов.

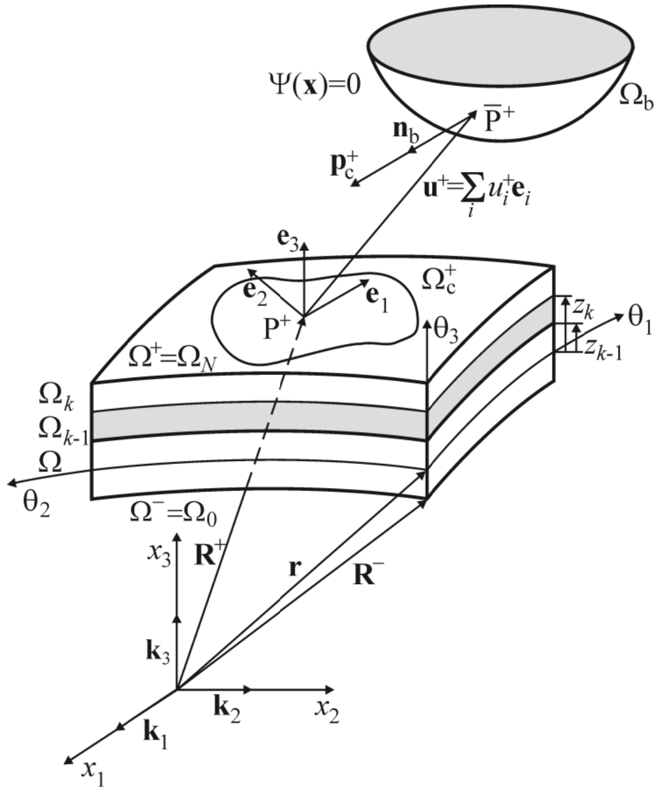

Рис. 1. Контактное взаимодействие многослойной оболочки с жестким выпуклым телом

наты точек нижней Ω_{k-1} и верхней Ω_k поверхностей k-го слоя, при этом $h_k = z_k - z_{k-1}$; $\mathbf{e}_\alpha$ – единичные векторы касательных к координатным линиям θ_α; $\mathbf{e}_3$ – единичный вектор внешней нормали; $\mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$ – радиус-вектор отсчетной поверхности Ω; $\mathbf{R}^-(\theta_1, \theta_2)$, $\mathbf{R}^+(\theta_1, \theta_2)$ – радиус-векторы внешних поверхностей Ω^- и Ω^+. Здесь и далее $k = 1, 2, \ldots, N$; $\alpha, \beta = 1, 2$; $i, j = 1, 2, 3$.

Предположим для определенности, что контактное взаимодействие оболочки осуществляется лишь с одним абсолютно жестким телом без учета трения в области контакта. Пусть граница неподвижного выпуклого тела Ω_b является достаточно гладкой и описывается уравнением

$$\Psi(\mathbf{x}) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{k}_i$ – радиус-вектор поверхности Ω_b. Для множества точек, лежащих вне жесткого тела, справедливо неравенство

$$\Psi(\mathbf{x}) > 0. \tag{2}$$

Условия (1), (2) можно трактовать как условия непроникания оболочки и жесткого тела. Эти условия выражают тот факт, что два контактирующих тела должны оставаться в контакте согласно условию (1) или быть разделены в соответствии с неравенством (2).

Будем полагать для простоты, что на нижней поверхности Ω^- контактное взаимодействие не происходит, а поверхность Ω^+ состоит из двух частей: $\Omega^+ = \Omega_f^+ \bigcup \Omega_c^+$, где Ω_f^+ – часть поверхности с заданными внешними поверхностными нагрузками; Ω_c^+ – часть поверхности, где ожидается контактное взаимодействие. В этом случае условие неотрицательности контактного давления представим в виде

$$p_c^+ = -\mathbf{p}_c^+ \mathbf{n}_b \le 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{n}_b$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Ω_b (см. рис. 1).

Условия (1) – (3) могут быть записаны с помощью одного уравнения (4)

$$p_c^+ \left(\mathbf{R}^+\right) \Psi\left(\overline{\mathbf{R}}^+\right) = 0, \tag{4}$$

$$\overline{\mathbf{R}}^+ = \mathbf{R}^+ + \mathbf{u}^+ = \sum_i \overline{R}_i^+ \mathbf{k}_i, \quad \overline{R}_i^+ = r_i + z_N t_{3i} + \sum_j t_{ji} u_j^+, \tag{5}$$

где $r_i(\theta_1, \theta_2)$ – компоненты радиус-вектора отсчетной поверхности; $u_j^+(\theta_1, \theta_2)$ – компоненты вектора перемещений внешней поверхности; $t_{ji}(\theta_1, \theta_2)$ – элементы матрицы перехода от базиса декартовой системы координат $\mathbf{k}_i$ к локальному базису $\mathbf{e}_i$; $\overline{R}_i^+(\theta_1, \theta_2)$ – компоненты радиус-вектора внешней поверхности деформированной оболочки. Условие (4) выражает тот факт, что контактные силы определяются лишь в тех точках оболочки, в которых осуществляется контактное взаимодействие с жестким основанием.

Чтобы ввести контактные ограничения (4) в вариационную формулировку задачи, рассмотрим модифицированный функционал Ху-Васидзу [1]

$$J_{PL} = J_{HW} + \iint_{\Omega_c^+} \left[\lambda \Psi\left(\overline{\mathbf{R}}^+\right) - \frac{\lambda^2}{2 \in} \right] d\Omega, \tag{6}$$

где J_{HW} – функционал Ху-Васидзу [2]; $\lambda\left(\mathbf{R}^+\right)$ – множитель Лагранжа; $\in$ – положительный штрафной параметр, который введен с целью регуляризации задачи. В случае $\in \to \infty$ приходим к стандартной формулировке задачи контактного взаимодействия оболочки с жестким основанием [3]. Отметим, что функционал J_{PL} нередко называют возмущенным лагранжианом [4].

Условие стационарности функционала (6) приводит к вариационному уравнению (7)

$$\delta J_{HW} + \delta J_c = 0, \tag{7}$$

$$\delta J_c = \iint_{\Omega_c^+} \left\{ \lambda \delta \Psi\left(\overline{\mathbf{R}}^+\right) + \delta\lambda \left[\Psi\left(\overline{\mathbf{R}}^+\right) - \frac{1}{\in} \lambda \right] \right\} d\Omega, \tag{8}$$

откуда, учитывая результаты [1], следует фундаментальная формула, связывающая контактное давление с множителем Лагранжа,

$$p_{\mathrm{c}}^{+} = \lambda\left(\mathbf{R}^{+}\right)\left|\operatorname{grad}\Psi\left(\overline{\mathbf{R}}^{+}\right)\right|. \qquad (9)$$

В $(4N+3)$-параметрической дискретно-структурной модели многослойной оболочки перемещения распределены по толщине пакета слоев согласно формулам [5]:

$$u_{\alpha}^{(k)} = N_k^{-} v_{\alpha}^{(k-1)} + N_k^{+} v_{\alpha}^{(k)}, \qquad u_3^{(k)} = L_k^{-} v_3^{(k-1)} + \overline{L}_k \, \overline{v}_3^{(k)} + L_k^{+} v_3^{(k)}, \qquad (10)$$

где $v_i^{(k-1)}(\theta_1,\theta_2)$, $v_i^{(k)}(\theta_1,\theta_2)$ – перемещения внешних поверхностей k-го слоя Ω_{k-1} и Ω_k; $\overline{v}_3^{(k)}(\theta_1,\theta_2)$ – поперечное перемещение срединной поверхности k-го слоя; N_k^{-}, N_k^{+} – многочлены Лагранжа первой степени; L_k^{-}, $\overline{L}_k$, L_k^{+} – многочлены Лагранжа второй степени:

$$N_k^{-} = \frac{1}{h_k}(z_k - \theta_3), \qquad N_k^{+} = \frac{1}{h_k}(\theta_3 - z_{k-1}), \qquad (11)$$

$$L_k^{-} = N_k^{-}\left(N_k^{-} - N_k^{+}\right), \qquad \overline{L}_k = 4N_k^{-}N_k^{+}, \qquad L_k^{+} = N_k^{+}\left(N_k^{+} - N_k^{-}\right).$$

При этом тангенциальные и поперечные нормальные деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ и $\varepsilon_{33}^{(k)}$ распределены по толщине k-го слоя по линейному закону, в то время как поперечные касательные деформации $\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)}$ являются постоянными [5].

Вводя аппроксимации перемещений и деформаций по толщине пакета слоев в смешанное вариационное уравнение (7) с последующим использованием на элементе билинейных аппроксимаций для перемещений и деформаций, а также упрощенных аппроксимаций [6] для независимо введенных деформаций и результирующих напряжений, приходим к нелинейным уравнениям равновесия элемента с учетом контактных ограничений (4). Для решения нелинейных уравнений используем инкрементальный подход, рассматривая два деформированных состояния оболочки (необязательно близких друг к другу). Линеаризация инкрементальных уравнений осуществляется с помощью метода Ньютона–Рафсона. Отметим, что матрица жесткости, отвечающая действию следящего нагружения, является несимметричной [7], поэтому система линейных алгебраических уравнений решается модифицированным методом Гаусса для ленточных матриц.

Рассмотрим четырехслойную перекрестно армированную резинокордную торообразную оболочку кругового поперечного сечения, нагруженную равномерно распределенным по внутренней поверхности давлением $p_0 = 0{,}5$ МПа и обжимаемую на плоское или цилиндрическое основание путем перемещения последних на величину Δ таким образом, что защемленные сечения оболочки с координатами $\pm 120^{\circ}$ остаются неподвижными (рис. 2). С помощью этой оболочки будем моделировать каркас диагональной шины. Исходные характеристики элементарных резинокордных слоев следующие [8]: $E_{\mathrm{L}} = 510{,}45$ МПа, $E_{\mathrm{T}} = 6{,}91$ МПа, $G_{\mathrm{LT}} = 2{,}33$ МПа, $G_{\mathrm{TT}} = 1{,}77$ МПа, $\nu_{\mathrm{LT}} = 0{,}46$. Пусть толщина оболочки $h = 4{,}8$ мм, толщина резинокордного слоя $h_k = 1{,}2$ мм, ориентация рези-

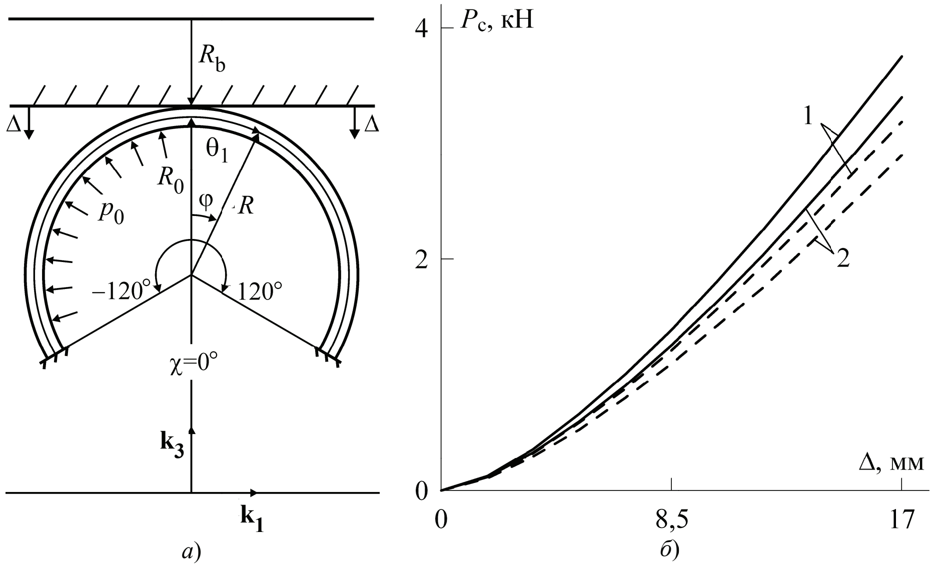

Рис. 2. Контактное взаимодействие торообразной оболочки с плоским и цилиндрическим основаниями:
а – геометрия; *б* – кривые нагрузка-прогиб с учетом следящего нагружения (——) и без учета (— —) при $R_b = \infty$ (*1*) и $R_b = 1000$ мм (*2*)

нокордных слоев $\gamma_k = (-1)^{k-1}\gamma$, где $\gamma = 45^\circ$ и $k = \overline{1,4}$. В качестве отсчетной поверхности примем срединную поверхность оболочки, которая образована вращением части окружности радиусом $R = 50$ мм. Расстояние от оси вращения до экватора срединной поверхности $R_0 = 250$ мм.

Условия непроникания контактирующих тел для плоского (12) и цилиндрического (13) оснований запишем в виде:

$$\Psi = R_0 + \frac{1}{2}h - \Delta - \overline{R}_3^+ \geq 0, \tag{12}$$

$$\overline{R}_3^+ = A_2 \cos\chi - v_1^+ \sin\varphi\cos\chi - v_2^+ \sin\chi + \left(\frac{1}{2}h + v_3^+\right)\cos\varphi\cos\chi,$$

$$\Psi = \frac{1}{2R_b}\left(\overline{R}_2^+\right)^2 + \frac{1}{2R_b}\left(R_0 + \frac{1}{2}h + R_b - \Delta - \overline{R}_3^+\right)^2 - \frac{1}{2}R_b \geq 0, \tag{13}$$

$$\overline{R}_2^+ = A_2 \sin\chi - v_1^+ \sin\varphi\sin\chi + v_2^+ \cos\chi + \left(\frac{1}{2}h + v_3^+\right)\cos\varphi\sin\chi,$$

где χ – окружная координата; $A_2 = R_0 - R(1-\cos\varphi)$ – параметр Ламе в окружном направлении.

Результаты расчета шины на действие следящего и консервативного нагружений получены с помощью нерегулярных конечноэлементных 48×36 сеток при $\in = 10^{-4}$ (см. рис. 2). Как видим, учет следящего давления является важным для оценки прочности пневматической шины. Так, погрешность вычисления результирующей узловых контактных сил P_c составляет более 18 %.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00373) и Министерства образования и науки РФ по программе «Проведение фундаментальных исследований в области естественных наук» (проект № 2.1.1/660).

Список литературы

1. Kulikov, G.M. Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part III. Analysis of TM shells with constraints / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2007. – Vol. 196, No. 7. – P. 1203–1215.

2. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 542 с.

3. Zhong, Z.H. Finite element procedures for contact-impact problems / Z. Zhong. – Oxford : Oxford University Press Inc., 1993. – 371 p.

4. Simo, J.C. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems / J.C. Simo, P. Wriggers, R.L. Taylor // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1985. – Vol. 50, No. 2. – P. 163–180.

5. Куликов, Г.М. Деформационные соотношения дискретно-структурной теории многослойных оболочек высокого порядка / Г.М. Куликов // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2009. – Том 14, вып. 3. – С. 530–535.

6. Kulikov, G.M. Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Computer Modeling in Engineering & Sciences. – 2008. – Vol. 28, No. 1. – P. 15–38.

7. Куликов, Г.М. Расчет композитных конструкций под действием следящих нагрузок с использованием геометрически точного элемента оболочки / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композит. материалов. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 789–804.

8. Куликов, Г.М. Контактное взаимодействие композитных оболочек под действием следящих нагрузок с жестким выпуклым основанием / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композит. материалов. – 2010. – Т. 46, № 1. – С. 36–51.

Analysis of Pneumatic Shells Based on Discrete Layer Model

G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova, S.A. Strulev, Yu.V. Kuleshov

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: discrete-layer model; elastic multilayered shell; geometrically exact shell element.

Abstract: An algorithm of the numerical solution of the geometrically non-linear contact problem has been developed for an elastic multilayered composite shell subjected to follower pressure. It is based on the $(4N+3)$-parameter discrete-layer model by using Green–Lagrange strain-displacement relationships, which exactly represent arbitrarily large rigid-body shell motions in curvilinear coordinates of the reference surface, where N is a number of layers. In the present paper, a nodal contact force normal to the constraint surface is associated with the Lagrange multiplier λ by means of a formular $\lambda|\mathrm{grad}\,\Psi|$, where Ψ is the impenetrability function of contact bodies. This allows one to use much larger load steps employing a geometrically exact shell element developed earlier in authors' papers.
