УДК 004.92, 004.925.86

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВПИСЫВАНИЯ КОНТУРА В ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК

С.Л. Сергеев, С.Ю. Севрюков

ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург

Ключевые слова и фразы: информационные технологии; математическое моделирование; медицинские изображения; реконструкция изображений.

Аннотация: Рассматривается задача вписывания произвольного контура в четырёхугольник. При этом допустимым преобразованием считается только параллельный перенос и масштабирование. Находится такое преобразование, которое обеспечивает минимум максимального отклонения.

Введение

Для планирования и проведения некоторых лечебных процедур необходимо наличие изображения среза тела пациента (обычно поперечного). Лучшим инструментом для этого является томограф, но он дорог и не всегда доступен. При отсутствии томографии изображение восстанавливается из различных снимков (рентгенограммы, УЗИ). Приблизительную картину среза можно получить из атласа стандартных анатомий (срезов), скорректировав её в соответствии с реальными размерами и формой тела конкретного пациента. Некоторую информацию о положении определённого органа в теле пациента можно получить из двух рентгенограмм, снятых в различных проекциях, ортогональных исследуемому срезу. Задача построения среза тела конкретного пациента приближённо решается вписыванием изображений срезов органов в четырехугольники, полученные из двух рентгенограмм (рис. 1).

Задача вписывания контура в многоугольник часто возникает и в других приложениях.

Математическая постановка задачи

С математической точки зрения решаемая задача формулируется следующим образом. Заданы: четырёхугольник и замкнутая кривая – контур.

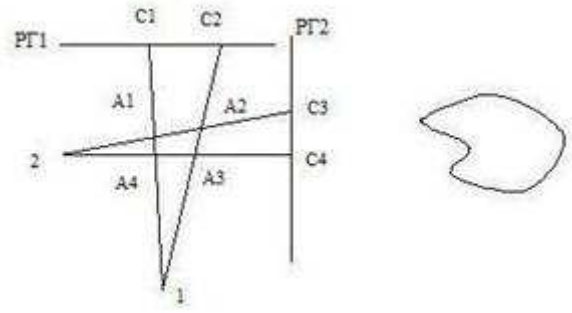

Рис. 1. Изображения срезов органов:

слева – C_1C_2 и C_3C_4 – поперечные срезы проекции некоторого внутреннего органа на рентгенограммы РГ1 и РГ2 из источников 1 и 2; справа – изображение среза данного органа, взятое из атласа.

Требуется, не внося изменений ни в четырёхугольник, ни в контур, параллельным перемещением и равномерным растяжением/сжатием (масштабированием) контура вписать контур в четырёхугольник. Очевидно, точное решение этой задачи возможно лишь в виде исключения, поэтому будем искать как можно более точное приближенное решение.

Пусть на плоскости *Oxy* задан четырёхугольник *M* в виде набора координат его вершин $A_i = (x_i, y_i),\ i = 1,2,3,4$ и замкнутый контур $\bar{L}$.

Построим вокруг контура четырёхугольник $\bar{M}$ с вершинами $\bar{A}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i),\ i = 1,2,3,4$ и сторонами $\bar{A}_i\bar{A}_{i+1}$, параллельными сторонам A_iA_{i+1}таким образом, чтобы контур $\bar{L}$ оказался вписанным в четырёхугольник $\bar{M}$ (рис. 2).

Уравнения прямых, проведённых через точки A_i и A_{i+1}, будем записывать в виде $y_i = x \cdot tg\varphi_i + b_i$, прямых, проведённых через точки $\bar{A}_i$ и $\bar{A}_{i+1}$, в виде $\bar{y}_i = x \cdot tg\varphi_i + \bar{b}_i$.

Пусть $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ – контур и четырёхугольник, полученные из $\bar{L}$ и $\bar{M}$ параллельным переносом и равномерным растяжением/сжатием по обеим осям. Прямые, проведённые через точки $\tilde{A}_i$ и $\tilde{A}_{i+1}$, будем записывать в виде $\tilde{y}_i = x \cdot tg\varphi_i + \tilde{b}_i$.

Расстояние между прямыми y_i и $\tilde{y}_i$ обозначим через h_i. Набор $\{|h_i|\}$ будем рассматривать как меру отклонения контура $\tilde{L}$ от вписанного в четырёхугольник *M*.

Очевидно,

$$h_i = (\tilde{b}_i - b_i)\cos\varphi_i \tag{1}$$

Очевидно, также, что $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ могут быть получены из $\bar{L}$ и $\bar{M}$ линейным преобразованием

$$\tilde{x} = k\bar{x} + \xi,\quad \tilde{y} = k\bar{y} + \eta \tag{2}$$

Подставим в равенство $\tilde{b}_i = \frac{\tilde{y}_i\bar{x}_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}\bar{x}_i}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i}$ уравнения (2). Используя соотношения $\bar{b}_i = \frac{\bar{y}_i\bar{x}_{i+1} - \bar{y}_{i+1}\bar{x}_i}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i}$ и $tg\varphi_i = \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i}$, получим:

$$\tilde{b}_i = -\xi \cdot tg\varphi_i + \eta + k\bar{b}_i \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получим

$$h_i = -\xi\sin\varphi_i + \eta\cos\varphi_i + k\bar{b}_i\cos\varphi_i - b_i\cos\varphi_i \tag{4}$$

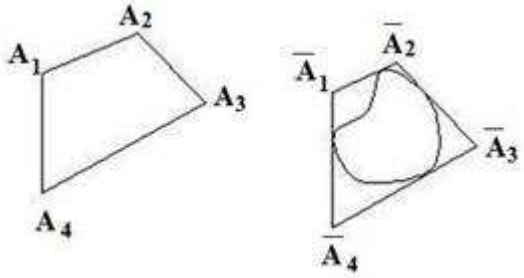

Рис. 2:

слева – четырёхугольник M, в который надо вписать контур; справа – контур $\bar{L}$ и описанный вокруг него четырёхугольник $\bar{M}$ (стороны четырёхугольников параллельны).

Будем считать центровку оптимальной, если переменные ξ, η, k подобраны таким образом, что наибольшее из отклонений h_i является наименьшим. То есть

$$h_0 = \min_{\xi,\eta,k}\max_i|h_i|;\quad (i=1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

Будем рассматривать уравнения

$$-\xi\sin\varphi_i + \eta\cos\varphi_i + k\bar{b}_i\cos\varphi_i - h = b_i\cos\varphi_i \tag{6}$$

и уравнения, которые можно назвать сопряженными уравнениям (6):

$$-\xi\sin\varphi_i + \eta\cos\varphi_i + k\bar{b}_i\cos\varphi_i + h = b_i\cos\varphi_i \tag{7},$$

линейные относительно переменных ξ, η, k, h.

При любых ξ, η, k значение одной из функций $h_j(k, \xi, \eta)$, являясь наибольшим среди всех h_i, не будет минимально возможным. В силу линейности функций имеется направление в

пространстве переменных ξ, η, k, продвижение в котором приводит к уменьшению h_j. Однако, после точки пересечения гиперплоскости h_j с тремя другими, дальнейшее продвижение в этом направлении приводит к ситуации, когда h_j перестает быть наибольшим среди всех. Предельная точка, в которой эта функция, оставаясь наибольшей, имеет минимальное значение – её общая точка с тремя другими функциями.

Будем составлять всевозможные системы четырёх уравнений – комбинации по четыре уравнения вида (6) и (7) (в одной системе может присутствовать только одно уравнение с индексом *i* – вида (6) или вида (7)).

Решение каждой из этих систем может быть решением уравнения (5).

Результат – h_0 – величина минимальной погрешности, соответствующие ей ξ, η, k – параметры преобразования.

Сомнения в том, что решение системы, составленной из уравнений вида (6) и (7), является решением уравнения (5) связаны с двумя обстоятельствами.

Первое. Каждому решению $(h_0, \xi_0, \eta_0, k_0)$ соответствует решение $(-h_0, \xi_0, \eta_0, k_0)$. В одном из них $h_0 < 0$. Мы рассматриваем только те, где $h_0 \geq 0$.

Второе. В некоторых точках-решениях имеется направление в пространстве координат $\xi,\ \eta,\ k,$ в котором все функции, входящие в систему, убывают. Это можно показать на примере системы линейных уравнений второго порядка (рис. 3).

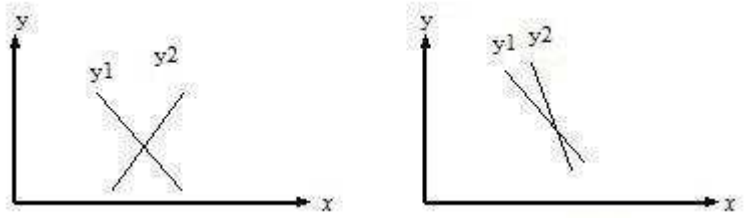

Рис. 3:
слева – прямые y_1 и y_2 в точке пересечения образуют $\min_x max[y_1(x), y_2(x)]$; справа – пересечение прямых y_1 и y_2 не является минимумом: в направлении возрастания *x* обе функции убывают.

Исследование набора систем уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$A_i\xi + B_i\eta + C_ik + D_i - \delta_i h = 0\ ,\ \delta_i = \pm 1;\ (i = 1,2,3,4) \qquad (8)$$

Здесь для каждого *i* берется перед последним слагаемым какой-нибудь один знак.

Пусть решение этой системы – $(\xi_0, \eta_0, k_0, h_0)$. Для произвольных ξ, η, k уравнения (8) запишем в виде $\delta_i h_i(\xi, \eta, k) = A_i\xi + B_i\eta + C_ik + D_i,\ (i = 1,2,3,4)$

Вычтем из них тождества $\delta_i h_0 = A_i\xi_0 + B_i\eta_0 + C_ik_0 + D_i, \qquad (i = 1,2,3,4)$

Получим

$h_i(\xi, \eta, k) - h_0 = -\delta_i[A_i(\xi - \xi_0) + B_i(\eta - \eta_0) + C_i(k - k_0)]\ ,\ (i = 1,2,3,4)$

Определение. В точке (ξ_0, η_0, k_0) имеет место:

$\min_{\xi,\eta,k} \max_i h_i(\xi, \eta, k)\ \ (i = 1,2,3,4)$, если не существует таких (ξ, η, k), что $h_i(\xi, \eta, k) - h_0 < 0$ для всех h_i одновременно.

Будем искать условия, которым должны удовлетворять A_i, B_i, C_i, чтобы выполнялась система неравенств

$-\delta_i[A_i(\xi - \xi_0) + B_i(\eta - \eta_0) + C_i(k - k_0)] < 0\ ,\ (i = 1,2,3,4)$.

Сделаем замены:

$B_i = -\lambda_i A_i,\ C_i = -\mu_i A_i, \qquad \xi - \xi_0 = p(k - k_0), \qquad \eta - \eta_0 = q(k - k_0)$

Получим: $-\delta_i(p - \lambda_i q - \mu_i)A_i(k - k_0) < 0\ ,\ \ (i = 1,2,3,4).$

Пусть $k - k_0 > 0$. Определим условия на λ_i и μ_i, при которых $(p - \lambda_i q + \mu_i)\sigma_i < 0,\ (i = 1,2,3,4)$, где $\sigma_i = sign(\ -\delta_i A_i)$.

Положим, для определённости, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$.

Будем рассматривать прямые $p^{(i)} = \lambda_i q + \mu_i,\ (i = 1,2,3,4)$ на плоскости Oqp. Координату пересечения $p^{(i)}$ и $p^{(j)}$ будем обозначать q_{ij}. В силу сделанных предположений, если $i < j$, то $p^{(i)} > p^{(j)}$ при $q > q_{ij}$ и $p^{(i)} < p^{(j)}$ при $q < q_{ij}$. (Здесь и далее в неравенствах типа $p^{(i)} > p^{(j)}$ имеется ввиду $p^{(i)}(q) > p^{(j)}(q)$.)

Нужно рассмотреть 16 вариантов неравенств, возникающих при комбинировании различных сочетаний σ_i. Будем обозначать эти варианты индексами $m_1.m_2.m_3.m_4$, где $m_i = 1$ при $\sigma_i = +1, m_i = 2$ при $\sigma_i = -1$. Например, при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = +1$ возникает вариант 1.1.1.1: существуют ли такие q^*, что $p < p^{(i)}$ для $i = 1,2,3,4$?

Рассмотрим область $q > max\ q_{ij}$. В ней, очевидно, $p^{(1)} > p^{(2)} > p^{(3)} > p^{(4)}$

В этой области можно выделить подобласти, в каждой из которых выполняются одновременно 4 условия для одного из вариантов:

$p^{(1)} > p^{(2)} > p^{(3)} > p^{(4)} > p$ – вариант 1.1.1.1,

$p^{(1)} > p^{(2)} > p^{(3)} > p > p^{(4)}$ – вариант 1.1.1.2,

$p^{(1)} > p^{(2)} > p > p^{(3)} > p^{(4)}$ – вариант 1.1.2.2,

$p^{(1)} > p > p^{(2)} > p^{(3)} > p^{(4)}$ – вариант 1.2.2.2,

$p > p^{(1)} > p^{(2)} > p^{(3)} > p^{(4)}$ – вариант 2.2.2.2.

В области $q < \min\ q_{ij}$ имеем $p^{(1)} < p^{(2)} < p^{(3)} < p^{(4)}$.

В этой области имеются подобласти для вариантов: 2.1.1.1, 2.2.1.1, 2.2.2.1,

Таким образом, для всех перечисленных комбинаций σ_i точка (ξ_0, η_0, k_0) не является минимумом. То, что результат получен для случая $k - k_0 > 0$, не имеет значения, так как достаточно существования любой области, в которой одновременно выполняются все неравенства.

Для построения дальнейших рассуждений докажем следующую лемму.

Лемма.

Если $i < j < k$, то выполняется одно из неравенств:

$$q_{ij} < q_{ik} < q_{jk} \text{ или } q_{jk} < q_{ik} < q_{ij}.$$

Доказательство.

Пусть $q_{ij} < q_{ik}$. Тогда при $q_{ij} < q < q_{ik}$ выполняется $p_i > p_j,\ p_i < p_k$, откуда $p_j < p_k$, а следовательно $q_{jk} > q_{ik}$ и $q_{ij} < q_{ik} < q_{jk}$.

Пусть $q_{ij} > q_{ik}$. Тогда при $q_{ik} < q < q_{ij}$ выполняется $p_i < p_j,\ p_i > p_k$, откуда $p_j < p_k$, а следовательно, $q_{jk} < q_{ik}$ и $q_{jk} < q_{ik} < q_{ij}$.

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим остальные варианты.

<u>Вариант 1.1.2.1</u> – $p < p^{(1)},\ p < p^{(2)},\ p > p^{(3)},\ p < p^{(4)}$

– для выполнения неравенства $p^{(3)} < p < p^{(1)}$ должно быть $q > q_{13}$.

– для выполнения неравенства $p^{(3)} < p < p^{(2)}$ должно быть $q > q_{23}$.

– для выполнения неравенства $p^{(3)} < p < p^{(4)}$ должно быть

$q < q_{34}$.

Таким образом, все неравенства выполняются только при одновременном выполнении двух неравенств $q_{13} < q < q_{34}$, $q_{23} < q < q_{34}$.

Следовательно, для существования минимума при $k - k_0 > 0$ в варианте 1.1.2.1 необходимо выполнение одного из трёх условий:

1. $q_{13} < q_{34} < q_{23}$;
2. $q_{23} < q_{34} < q_{13}$;
3. $q_{34} < q_{13},\ q_{34} < q_{23}$;

Рассмотрим теперь вариант 2.2.1.2, эквивалентный 1.1.2.1 при $k - k_0 < 0$:
$p > p^{(1)},\ p > p^{(2)},\ p < p^{(3)},\ p > p^{(4)}$.

– для выполнения неравенства $p^{(1)} < p < p^{(3)}$ должно быть $q < q_{13}$;.

– для выполнения неравенства $p^{(2)} < p < p^{(3)}$ должно быть $q < q_{23}$;.

– для выполнения неравенства $p^{(4)} < p < p^{(3)}$ должно быть $q > q_{34}$;.

Таким образом, все неравенства выполняются только при одновременном выполнении двух неравенств
$q_{34} < q < q_{13}$, $q_{34} < q < q_{23}$.

Следовательно, для существования минимума при $k - k_0 < 0$ в варианте 1.1.2.1 необходимо выполнение одного из трех условий:

1. $q_{13} < q_{34} < q_{23}$;
2. $q_{23} < q_{34} < q_{13}$;
3. $q_{34} > q_{13},\ q_{34} > q_{23}$.

Итак, для того, чтобы при всех $k - k_0$ не выполнялось хотя бы одно из условий варианта 1.1.2.1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух неравенств:

1. $q_{13} < q_{34} < q_{23}$;
2. $q_{23} < q_{34} < q_{13}$.

Иначе,

$$\min(q_{13}, q_{23}) < q_{34} < \max(q_{13}, q_{23}) \tag{11}$$

Вариант 1.2.1.1 – $p < p^{(1)},\ p > p^{(2)},\ p < p^{(3)},\ p < p^{(4)}$.

Рассуждения аналогичны предыдущим, поэтому, кратко
$q > q_{12}, q < q_{23}, q < q_{24}$. Хотя бы одно неравенство не выполняется, если:

1. $q_{23} < q_{12} < q_{24}$;
2. $q_{24} < q_{12} < q_{23}$;
3. $q_{12} > q_{23},\ q_{12} > q_{24}$.

Вариант 2.1.2.2 - $p > p^{(1)},\ p < p^{(2)},\ p > p^{(3)},\ p > p^{(4)}$, эквивалентный 1.2.1.1 при $k - k_0 < 0$.
$q < q_{12}, q > q_{23}, q > q_{24}$. Хотя бы одно неравенство не выполняется, если

1. $q_{23} < q_{12} < q_{24}$;
2. $q_{24} < q_{12} < q_{23}$;
3. $q_{12} < q_{23},\ q_{12} < q_{24}$.

Итак, для того, чтобы при всех $k - k_0$ не выполнялось хотя бы одно из условий варианта 1.2.1.1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось:

$$\min(q_{23}, q_{24}) < q_{12} < \max(q_{23}, q_{24}) \quad (12)$$

Вариант 1.2.1.2 – $p < p^{(1)},\ p > p^{(2)},\ p < p^{(3)},\ p > p^{(4)}$

Все неравенства выполняются при одновременном выполнении

$$q_{12} < q_{23},\ q_{14} < q_{23},\ q_{34} < q_{23} \quad (13)$$

Для наших целей необходимо и достаточно, чтобы нарушалось одно из них.

Легко доказать, что если $q_{12} < q_{23}$ и $q_{34} < q_{23}$, автоматически $q_{14} < q_{23}$, и если $q_{12} > q_{23}$ и $q_{34} > q_{23}$, то и $q_{14} > q_{23}$.

Таким образом, в качестве вариантов нарушения хотя бы одного из неравенств (13) следует рассматривать:

– $q_{12} < q_{23} < q_{34}$;

– $q_{34} < q_{23} < q_{12}$;

– $q_{23} < q_{12}, q_{23} < q_{34}$.

Вариант 2.1.2.1 – $p > p^{(1)},\ p < p^{(2)},\ p > p^{(3)},\ p < p^{(4)}$, эквивалентный 1.2.1.2 при $k - k_0 < 0$.

Здесь требуется одновременное выполнение неравенств

$$q_{12} > q_{23},\ q_{14} > q_{23},\ q_{34} > q_{23} \quad (14)$$

Рассуждая как выше, придём к выводу, что в качестве вариантов нарушения хотя бы одного из неравенств (14) следует рассматривать:

– $q_{12} < q_{23} < q_{34}$;

– $q_{34} < q_{23} < q_{12}$;

– $q_{23} > q_{12}, q_{23} > q_{34}$.

Для того, чтобы нарушались хотя бы одно из условий варианта 1.2.1.2 при всех $k - k_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$\min(q_{12}, q_{34}) < q_{23} < \max(q_{12}, q_{34}) \quad (15)$$

Вариант 1.2.2.1 – $p < p^{(1)},\ p > p^{(2)},\ p > p^{(3)},\ p < p^{(4)}$

Все неравенства выполняются при одновременном выполнении условий:

$$q_{12} < q_{24},\ q_{12} < q_{34},\ q_{13} < q_{24},\ q_{13} < q_{34} \quad (16)$$

Для нарушения хотя бы одного из этих условий необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\max(q_{12}, q_{13}) > \min(q_{24}, q_{34})$.

Вариант 2.1.1.2 – $p > p^{(1)},\ p < p^{(2)},\ p < p^{(3)},\ p > p^{(4)}$, эквивалентный 1.2.2.1 при $k - k_0 < 0$

.

Все неравенства выполняются при одновременном выполнении условий:

$$q_{12} > q_{24},\ q_{12} > q_{34},\ q_{13} > q_{24},\ q_{13} > q_{34} \quad (17)$$

Для нарушения хотя бы одного из этих условий необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\min(q_{12}, q_{13}) < \max(q_{24}, q_{34})$.

Для того, чтобы нарушались условия варианта 1.2.1.2 при всех $k - k_0$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\max(q_{12}, q_{13}) > \min(q_{24}, q_{34}) \text{ и } \max(q_{24}, q_{34}) > \min(q_{12}, q_{13}) \quad (18)$$

Доказательство существования и единственности

Выше показано, что при выполнении одного из условий: (11), (12), (15), (18) решение соответствующей системы удовлетворяет критерию (5).

Докажем, что решение всегда существует, т.е. всегда осуществляется один из вариантов (11), (12), (15), (18). Доказательство будем проводить следующим образом. Будем поочередно предполагать, что не выполняются условия трёх из четырёх вариантов и доказывать, что тогда выполняются условия четвёртого варианта.

Предварительно заметим, что невыполнение условия (18) эквивалентно выполнению одного из условий:

$$\min(q_{12}, q_{13}) > \max(q_{24}, q_{34}), \quad \min(q_{24}, q_{34}) > \max(q_{12}, q_{13}) \tag{19}$$

Доказательство состоит из двух частей. В первой будем предполагать, что не выполняются условия (11) и (12). Докажем, что при этом во всех случаях автоматически не выполняется одно из условий (15), (18) и автоматически выполняется другое.

Пусть $q_{34} > \max(q_{13}, q_{23}),\ q_{12} > \max(q_{23}, q_{24})$

Из $q_{23} < \min(q_{12}, q_{34})$ следует, что условие (15) не выполняется. Из $q_{12} > q_{24}$, $q_{34} > q_{13}$, – что выполняется условие (18).

Пусть $q_{34} < \min(q_{13}, q_{23}),\ q_{12} < \min(q_{23}, q_{24})$

Из $q_{23} > \max(q_{12}, q_{34})$ следует, что условие (15) не выполняется. Из $q_{12} < q_{24}$, $q_{34} < q_{13}$, – что выполняется условие (18).

Пусть $q_{34} > \max(q_{13}, q_{23}),\ q_{12} < \min(q_{23}, q_{24})$.

Выполнение (15) очевидно. Из $q_{34} > q_{13}$ и $q_{24} > q_{12}$ следует $q_{34} > q_{14} > q_{13}$ и $q_{24} > q_{14} > q_{12}$. Откуда $q_{13} < \min(q_{24}, q_{34})$. Из $q_{12} < q_{23}$, – $q_{12} < q_{13} < q_{23}$. Таким образом, $q_{12} < q_{13} < \min(q_{24}, q_{34})$. Условие (19) выполняется.

Пусть $q_{34} < \max(q_{13}, q_{23}),\ q_{12} > \min(q_{23}, q_{24})$.

Аналогично предыдущему доказывается, что выполняется условие (15) и не выполняется – (18).

Вторая часть доказательства. Предполагаем, что не выполняются условия (15) и (18). Доказываем, что автоматически не выполняется одно из условий (11), (12) и выполняется второе.

Пусть $q_{23} > \max(q_{12}, q_{34}),\ \min(q_{12}, q_{13}) > \max(q_{24}, q_{34})$.

Пусть $q_{23} < \max(q_{12}, q_{34}),\ \min(q_{12}, q_{13}) < \max(q_{24}, q_{34})$.

Очевидно невыполнение условия (11) и выполнение условия (12).

Пусть $q_{23} > \max(q_{12}, q_{34}),\ \min(q_{12}, q_{13}) < \max(q_{24}, q_{34})$.

Пусть $q_{23} < \max(q_{12}, q_{34}),\ \min(q_{12}, q_{13}) > \max(q_{24}, q_{34})$.

Очевидно выполнение условия (11) и невыполнение условия (12).

Таким образом, существование решения доказано.

Докажем теперь, что всегда реализуется лишь один из вариантов 1.1.2.1, 1.2.1.1, 1.2.1.2, 1.2.2.1.

Рассмотрим вариант 1.1.2.1. Пусть выполнено условие (11).

Предположим $q_{13} < q_{34} < q_{23}$. Согласно лемме $q_{13} < q_{14} < q_{34}$, $q_{12} < q_{13} < q_{23}$, $q_{34} < q_{24} < q_{23}$. Откуда $q_{12} < q_{13} < q_{14} < q_{34} < q_{24} < q_{23}$. Из последнего неравенства видно, что условия (12), (15) и (18) не выполняются.

Предположим $q_{23} < q_{34} < q_{13}$. Согласно лемме $q_{23} < q_{24} < q_{34}$, $q_{34} < q_{14} < q_{13}$, $q_{23} < q_{13} < q_{12}$. Откуда $q_{12} > q_{13} > q_{14} > q_{34} > q_{24} > q_{23}$. Из последнего неравенства видно, что условия (12), (15) и (18) не выполняются.

Аналогично доказывается, что если выполнены условия одного из вариантов 1.2.1.1, 1.2.1.2 или 1.2.2.1, то не выполняются условия всех других вариантов.

Особые случаи

Рассмотрим случаи $\lambda_i = \lambda_{i+1}$. Из геометрических соображений ясно, что равенство $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ возникает, если две стороны четырёхугольника параллельны. Это возможно, однако при этом выполнение равенства $\mu_i = \mu_{i+1}$ означало бы, что эти стороны просто совпадают. Поэтому принимаем: $\mu_i \neq \mu_{i+1}$при $\lambda_i = \lambda_{i+1}$.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2,\ \mu_1 > \mu_2$.

Очевидно, что при этом $p^{(1)} > p^{(2)}$ и не существует q_{12}. Соотношения (11), (12), (15), (18) с учетом $q_{13} < q_{23}, q_{14} < q_{24}$ и соотношений леммы вырождаются в неравенства

$q_{14} < q_{34} < q_{24}$ – вариант 1.1.2.1

$$q_{23} < q_{34} \text{ – вариант 1.2.1.2} \quad (21)$$

$q_{34} < q_{13}$ – вариант 1.2.2.1

$\lambda_2 = \lambda_3,\ \mu_2 > \mu_3$.

$q_{34} < q_{13}$ – вариант 1.1.2.1,

$q_{12} < q_{24}$ – вариант 1.2.1.1,

$$q_{13} < q_{34}, q_{24} < q_{12} \text{ – вариант 1.2.2.1} \quad (22)$$

$\lambda_3 = \lambda_4,\ \mu_3 > \mu_4$

$q_{24} < q_{12} < q_{23}$ – вариант 1.2.1.1,

$q_{23} < max(q_{12}, q_{14})$ – вариант 1.2.1.2,

$$min(q_{12}, q_{13}) < q_{24} \text{ – вариант 1.2.2.1} \quad (23)$$

$\lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_3 = \lambda_4,\ \mu_1 > \mu_2,\ \mu_3 > \mu_4$

Реализуется один вариант: 1.2.2.1. При $k - k_0 < 0$ он переходит в 2.1.1.2. Вариант реализуется безусловно.

Случаи $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2}$ и, тем более $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ невозможны из геометрических соображений (это означало бы существование в четырёхугольнике более, чем двух параллельных сторон).

$A_i = 0$

$A_1 = 0, B_1 \neq 0$. (Из уравнений (6) и (7) следует, что случай $A_i = B_i = 0$ невозможен.) Тогда первое из уравнений системы приобретает вид:

$(q - q_{01})\sigma_1(k - k_0) < 0$, где $\sigma_1 = sign(-\delta_1 B_1),\ q_{01} = -\frac{C_1}{B_1}$.

Будем рассматривать этот случай как предельный при $\lambda_1 \to \infty$. Будем считать, что $p < p^{(1)}$ при $q > q_{01}$ и $p > p^{(1)}$ при $q < q_{01}$. Тогда сохраняются в силе все рассуждения для общего случая, с учётом, что

$q_{01} = q_{12} = q_{13} = q_{14}$. В итоге:

$min(q_{01}, q_{23}) < q_{34} < max(q_{01}, q_{23})$ – вариант 1.1.2.1.

$min(q_{23}, q_{24}) < q_{01} < max(q_{23}, q_{24})$ – вариант 1.2.1.1.

$min(q_{01}, q_{34}) < q_{23} < max(q_{01}, q_{34})$ – вариант 1.2.1.2.

$$min(q_{24}, q_{34}) < q_{01} < max(q_{24}, q_{34}) \text{ – вариант 1.2.2.1.} \quad (24)$$

$A_1 = A_2 = 0$.

Преобразуем второе уравнение аналогично первому. Получим:

$(q - q_{02})\sigma_2(k - k_0) < 0$, где $\sigma_2 = sign(-\delta_2 B_2),\ q_{02} = -\frac{C_2}{B_2}$.

Положим $q_{01} < q_{02}$. Применяя аналогичные рассуждения, получим, с учётом $q_{01} = q_{13} = q_{14}, q_{02} = q_{23} = q_{24}$:

$q_{01} < q_{34} < q_{02}$ – вариант 1.1.2.1,

$q_{02} < q_{34}$ – вариант 1.2.1.2,

$$q_{34} < q_{01} \text{ – вариант 1.2.2.1} \quad (25)$$

Доказательства существования и единственности решения для всех особых случаев не сложны и аналогичны тем, что приведены для соотношений (11), (12), (15), (18).

Таким образом, предлагается следующий алгоритм решения «задачи центровки» кривой в четырёхугольнике.

Строим четырёхугольник $\bar{M}$, и находим координаты его вершин.

По заданным координатам вершин четырёхугольников M и $\bar{M}$ находим для каждой из сторон четырехугольников коэффициенты $A_i = -sin\varphi_i,\ B_i = cos\varphi_i, C_i = \bar{b}_i cos\varphi_i,\ D_i = -b_i cos\varphi_i$. Составляем n уравнений.

Вычисляем $\lambda_i, \mu_i, \sigma_i$. Перенумеровываем уравнения таким образом, чтобы выполнялось требование $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$, при $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ _ $\mu_i > \mu_{i+1}$, при $A_i = 0$ принимаем $i = 1$, при $A_i = A_j = 0$ и $\frac{C_i}{B_i} > \frac{C_j}{B_j}$ принимаем $i = 1, j = 2$.

Для каждой из 4 систем, составленных из четырёх уравнений вида (6) и сопряжённых им уравнений вида (7) так, чтобы получились варианты 1.1.2.1, 1.2.1.1, 1.2.1.2 и 1.2.2.1 определяем выполнение одного из условий (11), (12), (15), (18) или их аналогов в особых случаях. Для варианта, в котором условия выполнены, решаем соответствующую систему.

К каждой точке исходной кривой применяем преобразование
$x_{нов} = \bar{k}_0 x_{стар} + \bar{\xi}_0,\ \ y_{нов} = \bar{k}_0 y_{стар} + \bar{\eta}_0$

Заключение

В работе сделана математическая постановка задачи вписывания контура в четырёхугольник. Сформулирован критерий оптимальности. Предложен алгоритм решения оптимизационной задачи.

Список литературы

1. Firdaus Janoos, Kishore Mosaliganti, Xiaoyin Xu, Raghu Machiraju, Kun Huang, Stephen T.C. Wong, «Robust 3D reconstruction and identification of dendritic spines from optical microscopy imaging», Medical Image Analysis, 2009, Volume 13, Issue 1, Pages 167–179.
2. Pierre-Louis Bazin, Dzung L. Phama, «Homeomorphic brain image segmentation with topological and statistical atlases», Medical Image Analysis, 2008, Volume 12, Issue 5, Pages 616–625.
3. Сергеев, С.Л. Построение рисунка поперечного среза тела пациента по двум рентгенограммам. Труды международной конференции «Beam dynamics & optimization BDO’2002» / С.Л.Сергеев. – СПбГУ. – 2002. – С. 319–328
4. Сергеев, С.Л. «Построение рисунка поперечного среза пациента по внешнему контуру тела» Труды международной конференции «Beam dynamics & optimization BDO’2002» / С.Л. Сергеев. –СПбГУ – 2002. – С. 313–319.

Solving Optimal Integrating Circuit in Chetyrehugolnik

S.L. Sergeev, S.Y. Sevryukov

Saint-Petersburg State University, St. Peterburg

Key words and phrases: information technology; mathematical modeling; medical images; image reconstruction.

Abstract: The problem of incorporating an arbitrary contour in the quadrangle. This transformation is valid only parallel translation and scaling. It is a transformation, which provides a minimum of maximum deflection.

© С.Л. Сергеев, С.Ю. Севрюков, 2009