ББК 22.161

НОВЫЙ ПОДХОД В МЕТОДИКЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА УБЫВАНИЕ И ВОЗРАСТАНИЕ

А.Д. Новиков

ГОУ ВПО «Армавирский государственный педагогический институт», г. Армавир

Ключевые слова и фразы: возрастание функции; исследование функции; методика преподавания математики; убывание функции.

Аннотация: В результате анализа существующего в настоящее время подхода к исследованию функций на убывание и возрастание, в данной статье делается вывод о наличии неустранимых в рамках этого подхода противоречий. В качестве альтернативного подхода автором предлагаются новая концепция, инструментарий и схема исследования функций на убывание и возрастание, отвечающая требованиям непротиворечивости и полноты теории. Новый подход применим как в вузовских курсах математического анализа и высшей математики, так и в школьном курсе математики.

В учебниках по математическому анализу под основной задачей исследования функций на возрастание и убывание понимается определение множеств, на которых рассматриваемая функция соответственно возрастает и убывает. В школьном курсе алгебры и начал математического анализа под этими множествами понимаются промежутки убывания и возрастания функций [4]. В вузовских курсах математического анализа и высшей математики кроме промежутков убывания и возрастания функций находят также отдельные точки возрастания и убывания функции. Заметим, что в средней школе в конце 80-ых гг. прошлого столетия эти понятия были вообще изъяты из учебников по алгебре и началам анализа. Это привело к невозможности полноценного исследования функций на возрастание и убывание в курсе математики общеобразовательной средней школы и вызвало серьезную озабоченность и множество вопросов учителей средней школы и преподавателей вузов.

В статье [1], опубликованной в журнале «Математика в школе» А.Я. Блох, отвечая на вопрос учителей о правомерности включении точек экстремума в промежутки возрастания (убывания) функции, пишет: «… одна и та же экстремальная точка принадлежит сразу двум множествам: одному из промежутков возрастания и одному из промежутков убывания функции».

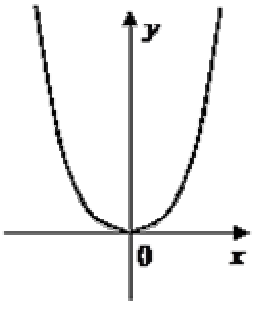

Рис. 1. Исследование функции на монотонность

Далее автор приводит пример исследования на монотонность функции $y=x^2$ (рис. 1). По его мнению, совпадающему с точкой зрения авторов современных школьных учебников по алгебре и началам математического анализа (например, [4]), исследование функций на монотонность сводится к нахождению их промежутков убывания и возрастания. Поэтому данная функция, как считает автор [1], убывает на полуинтервале $(-\infty;0]$ и возрастает на полуинтервале $[0;+\infty)$.

Отнесемся к этому выводу критически и исследуем сам метод получения такого результата. Первая часть утверждения получена в результате применения определения функции, убывающей на множестве к функции $y=x^2$ с областью определения $(-\infty;0]$, а вторая – в результате применения определения возрастающей на множестве функции к функции $y=x^2$ и областью определения $[0;+\infty)$. Спрашивается, а где же исследование заявленной функции $y=x^2$ с областью определения $(-\infty,+\infty)$? Его просто нет. Ведь в ходе такого «исследования» потерян сам его объект – исследуемая функция. Дело в том, что исследованием двух, отличных от заявленной функций, нельзя заменить исследования данной функции, так как все три функции, задаются одинаковой формулой, но имеют различные области определения. Если же определения монотонных на множестве функций применить к функции $y=x^2$ с областью определения $(-\infty,+\infty)$, то единственный результат, который может быть получен – это функция $y=x^2$ с областью определения $(-\infty,+\infty)$ не является монотонной. Другими словами, исследуемая на возрастание и убывание функция $y=x^2$ с $D(y)=(-\infty,+\infty)$ так и осталась неисследованной. Аналогичная ситуация буквально автоматически складывается и при исследовании любой другой функции, имеющей как точки возрастания, так и точки убывания. Это означает, что такие функции остаются фактически неисследованными. Причина этого заключается, прежде всего, в некорректности самой концепции подхода к исследованию. А именно, в разбиении области определения исследуемой функции на промежутки с последующим переходом к исследованию получившейся совокупности функций. Кроме того, как будет показано ниже, выбор инструментария исследования (определения монотонных функций и определения точек убывания и возрастания функции) неадекватен поставленной задаче.

В самом деле, считая, что основной задачей исследования функций на возрастание (убывание), определение ее промежутков возрастания и убывания, мы одновременно отказываемся от исследования исходной функции, так как неизбежно подменяем ее совокупностью других функций, задаваемых той же формулой, но имеющими другие области определения. Уже этого факта достаточно для того, чтобы отказаться от столь противоречивого подхода. Кроме того, пользуясь определениями возрастающей и убывающей на множестве функции, можно лишь выяснить, является ли исследуемая функция возрастающей или убывающей. И не более того, что следует из самой сути этих определений.

Сказанное выше подтверждает также исследование на возрастание и убывание дифференцируемых функций. Например, функция $y=\frac{1}{x}$ имеет производную $y'=-\frac{1}{x^2}<0$ на всей области определения данной функции $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Следовательно, эта область D и является *областью* ее *убывания*, понимаемая как множество точек, в каждой из которых данная функция убывает. И в то же время функция $y=\frac{1}{x}$ с $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ не является убывающей, так как не удовлетворяет соответствующему определению убывающей функции. Итак, говорить, что данная функция является убывающей на промежутках $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$ бессмысленно, поскольку тогда на самом деле речь пойдет уже о двух других функциях $y=\frac{1}{x}$ с областью определения $D=(-\infty,0)$ и $y=\frac{1}{x}$ с областью определения $(0,+\infty)$.

Следующий пример наглядно показывает, что выпускник современной средней школы оказывается не в состоянии полноценно исследовать на убывание и возрастание даже следующую довольно простую функцию

$$y=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

В самом деле, старшеклассники, в качестве результата исследования этой функции напишут, что она убывает на промежутках $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$. При этом точку области определения функции $x=0$ (точка возрастания) они вообще никак не классифицируют, поскольку не знакомы с понятиями точек убывания и возрастания функции. Как было сказано выше, эти понятия без всяких объяснений в конце 80-х гг. прошлого века (практически сразу после ухода из жизни всемирно известного математикаА.Н. Колмогорова, написавшего в соавторстве первый в России учебник по алгебре и началам анализа для средней школы) были изъяты из школьных учебников математики. И лишь студенты вузов, изучающие полные курсы математического анализа, смогут классифицировать эту точку.

Опираясь на изложенное выше, неизбежно приходим к выводу, что используемая ныне постановка основной задачи исследования функций на возрастание и убывание некорректна, поскольку искать «промежутки возрастания и убывания функции» – значит автоматически потерять сам объект исследования – исходную функцию. Поэтому мы предлагаем исследовать функции на возрастание и убывание на основе другой, непротиворечивой системы понятий и определений, считая основной задачей такого исследования определение *областей возрастания* и *убывания* функций [5–7].

Определение 1. *Областью возрастания (убывания)* функции называется множество точек возрастания (убывания) этой функции.

Определения точек возрастания и убывания функций приведены в [2, с. 224] и [3, с. 175] и используют понятие δ-окрестности точки. Однако, в силу симметрии δ-окрестности относительно исследуемой точки x_0 в случае дискретных функций с ее помощью далеко не всегда можно найти все точки возрастания (убывания) функции, что показывает следующий пример.

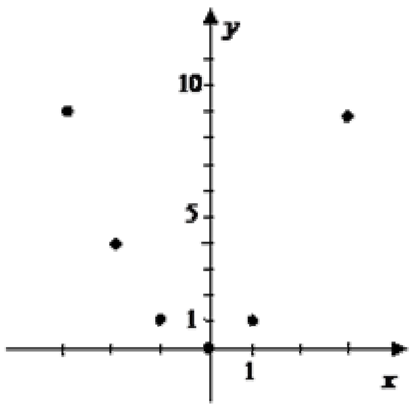

Рис. 2. Определение точки возрастания функции

Пример. Выяснить, является ли точка $x=1$ точкой возрастания функции $f(x)=x^2$ с областью определения $D(f)=\{-3;-2;-1;0;1;3\}$. Найти области возрастания и убывания данной функции.

В этом примере (рис. 2) определение точки возрастания функции на основе понятия δ-окрестности точки не позволяет классифицировать точку $x=1$ как точку возрастания данной функции, поскольку не существует такой δ-окрестности этой точки, в которой $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$, где $x_1\in(1-\delta;1)$ и $x_2\in(1;1+\delta)$. В то же время, как видно, например, из графика данной функции точка $x=1$ есть точка возрастания заданной функции. Рассмотренный пример позволяет сделать вывод, что определения точек возрастания и убывания функций, базирующиеся на понятии δ-окрестности, позволяют находить эти точки только при исследовании непрерывных функций. Если же обобщить эти определения, заменив в них понятие δ-окрестности на понятие окрестности, которая может быть и несимметричной относительно исследуемой точки, то точка $x=1$ в рассмотренном выше примере будет классифицирована как точка возрастания функции. Сформулируем обобщенные определения точек возрастания и убывания функции.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_2)$, в которой $f(x)<f(x_0)$ при $x<x_0$, $x\in D(f)$ и $f(x)>f(x_0)$ при $x>x_0$, $x\in D(f)$.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется *убывающей в точке* x_0, если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_2)$, в которой $f(x)>f(x_0)$ при $x<x_0$, $x\in D(f)$ и $f(x)<f(x_0)$ при $x>x_0$, $x\in D(f)$.

В соответствии с этими определениями, точка минимума функции $x=0$ в примере не может быть включена ни в область возрастания, ни в область убывания исследуемой функции. Аналогичное заключение, очевидно, будет иметь место и для точек экстремума любых других функций.

Исследуем далее точки $x=-3$ и $x=3$ из предыдущего примера. Ясно, что поскольку функция не определена слева от точки $x=-3$ и справа от точки $x=3$, то определения 2 и 3 для этих точек неприменимы. Поэтому для их классификации потребуются еще два определения.

Определение 4. Функция $y=f(x)$ называется *убывающей в точке* x_0 *справа*, если существует такая правосторонняя окрестность точки x_0 $(x_0, x_0+\delta)$, в которой $f(x)<f(x_0)$ при $x>x_0$, $x\in D(f)$.

Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0 *слева*, если существует такая левосторонняя окрестность точки x_0 $(x_0-\delta, x_0)$, в которой $f(x)<f(x_0)$ при $x<x_0$, $x\in D(f)$.

Применяя определения 4 и 5 соответственно к точкам $x=-3$ и $x=3$, приходим к выводу, что в точке $x=-3$ исследуемая функция *убывает справа*, а в точке $x=3$ – *возрастает слева*. Следовательно, областью убывания функции из предыдущего примера является множество $D_{\downarrow}=\{-3, -2, -1\}$, а областью возрастания – $D_{\uparrow}\{1, 3\}$. Заметим, что практикуемый ныне в средней и высшей школе подход к исследованию функций, подобных той, что приведена в только что рассмотренном примере, вообще неприменим (средняя школа), либо приводит, как было показано выше, к абсурдным результатам (высшая школа).

В то же время ясно, что при первоначальном введении функциональной зависимости и изучении свойств функций в 7 классе средней школы сразу же вводить такое, далеко не самое простое понятие, как понятие окрестности точки привело бы к серьезным методическим трудностям. Это понятие разумнее было бы ввести при последующем изучении функций в 8-ом и 9-ом классе. И это возможно, если в 7-ом классе при изучении функций, заданных на множествах изолированных точек заменить определения 2–4 на эквивалентные им определения, в которых используются гораздо более простые для усвоения понятия – понятия предшествующей и последующей точек дискретного множества.

Определение 2'. Точка x_i называется *точкой возрастания* функции $y=f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_{i-1})<f(x_i)<f(x_{i+1})$, т.е. если значение функции в данной точке больше значения функции в предшествующей точке, но меньше значения функции в последующей точке.

Определение 3'. Точка x_i называется *точкой убывания* функции $y=f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_{i-1})>f(x_i)>f(x_{i+1})$, т.е. если значение функции в данной точке меньше значения функции в предшествующей точке, но больше значения функции в последующей точке.

Определение 4'. Точка $a=x_1$ называется *точкой возрастания (убывания) справа* функции $y=f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$), т.е. если значение функции на левой границе ее области определения меньше (больше) значения функции в последующей точке.

Определение 5'. Точка $b=x_n$ называется *точкой возрастания (убывания) слева* функции $y=f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_n)>f(x_{n-1})$ ($f(x_n)<f(x_{n-1})$), т.е. если значение

функции на правой границе ее области определения больше (меньше) значения функции в предыдущей точке.

Заметим, что определения 4, 5, 4′, 5′ можно использовать при исследовании функций на возрастание и убывание лишь, применяя их к наименьшему и наибольшему значениям независимой переменной из области определения функции. Так, например, для функции $y = x^2$ с $D(y) = (-\infty, +\infty)$ определения 4, 5 не применимы для точки $x_0 = 0$, поскольку данная функция определена как слева, так и справа от этой точки.

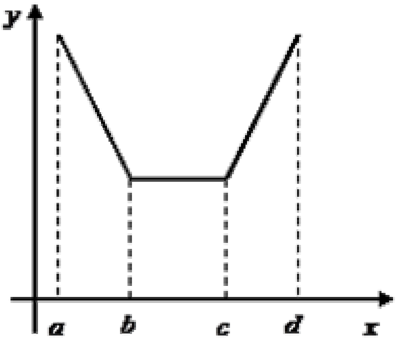

Рис. 3.

Рис. 3.

Остановимся далее на выявлении точек, в которых функция нестрого убывает или возрастает. Для этого достаточно воспользоваться системой определений, аналогичной системе определений 2–5.

Рассмотрим пример исследования такой функции, график которой изображен на Рис.3., имеет область нестрогого убывания $D_{,}$ = $[a, c]$ и область нестрогого возрастания $D_{\&}$ = $[b, d]$. Отсюда видно, что отрезок, параллельный оси (x) входит как в область нестрогого убывания функции, так и в область нестрогого ее возрастания, т.е. не классифицируется. Поэтому, опираясь на определение постоянной функции, разумно ввести понятие *области постоянства функции* D_{-}.

Определение 7. *Областью постоянства* функции называется множество точек функции, для каждой из которых существует такая, хотя бы односторонняя ее окрестность, в каждой точке которой из области определения функции эта функция принимает одинаковые значения.

Отсюда ясно, что точка постоянства функции обладает окрестности, имеющей, по меньшей мере, еще одну точку с тем же значением функции.

Определения 2–7 вместе с определениями точек экстремумов позволяют при исследовании функции на возрастание и убывание разбить все точки ее области определения на непересекающиеся классы точек: область убывания, область возрастания, область постоянства, точки минимума и точки максимума. Таким образом, предлагаемый нами подход к исследованию функций на возрастание и убывание представляет собой не только полноценную и, скорее всего, безальтернативную схему, позволяющую классифицировать все точки области определения исследуемой функции (рис. 4).

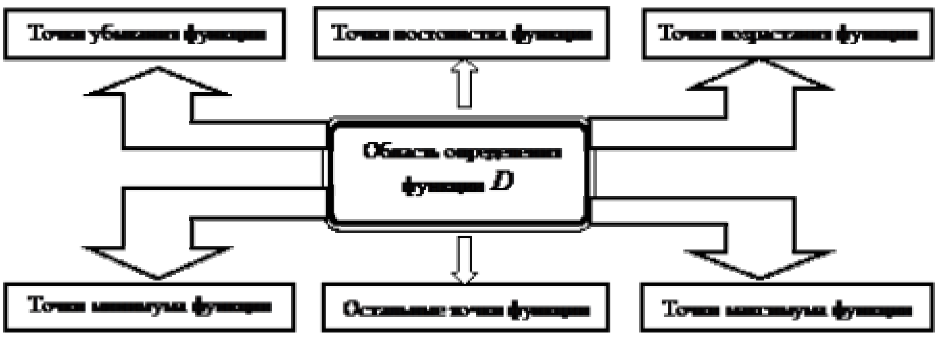

Рис. 4. Схема классификации точек области определения функции

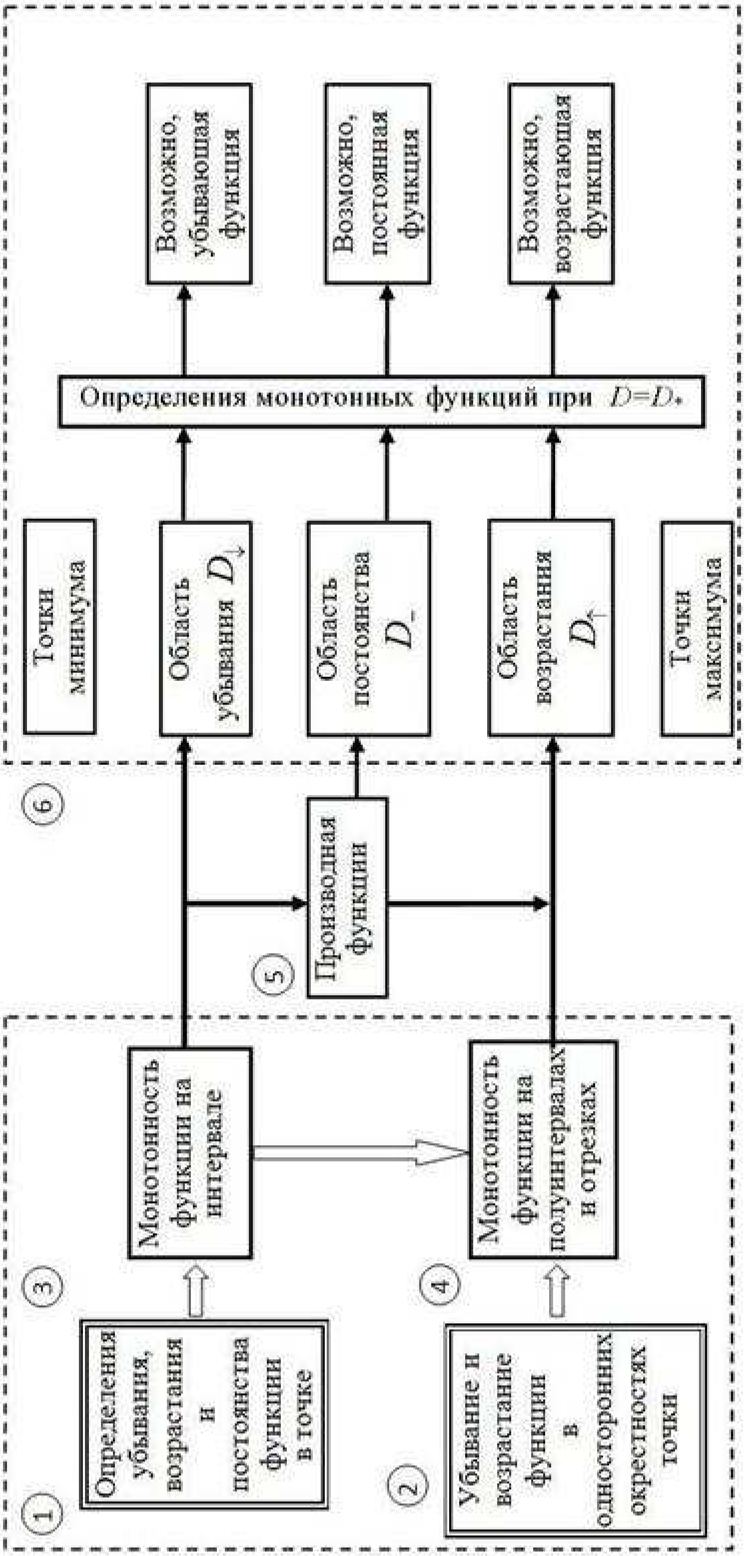

Рис. 5. Схема исследования функций на убывание и возрастание

Используя определения 2–5 (строгого возрастания и убывания функции) и определение 7, нетрудно получить следующие результаты исследования функции, график которой изображен на рис. 3: область убывания $D_{\downarrow}=[a, b)$, область постоянства $D_{-}=[b, c]$, область возрастания $D_{\uparrow}=(c, d]$. Определения точек нестрогого возрастания и убывания функции, как видно из приведенного примера, становятся излишними.

В схеме на рис. 4 под классом остальных точек понимается множество точек, не входящих в другие пять классов этой же схемы. Поясним этот случай примером.

Пусть требуется исследовать на убывание и возрастание функцию:

$$y=\begin{cases} x, \ x\in(-\infty, 0); \\ -1, \ x=0; \\ \begin{cases} 1, \ x\in Q; \\ 0, \ x\in I; \end{cases} x\in(0; 1); \\ -x^2+3, \ x\in[1, \infty); \end{cases}$$

где Q – множество рациональных чисел; I – множество иррациональных чисел.

Приведем результаты исследования: $D_{\downarrow}=(1, \infty)$, $D_{-}=$ Æ, $D_{\uparrow}=(-\infty, 0)$, $M=\{0\}$ – множество минимумов; $N=\{1\}$ – множество максимумов. Следовательно, в данном примере множество остальных точек – это множество $(0; 1)$. Другими словами, это интервал, на котором задана функция Дирихле. Таким образом, все точки области определения исследуемой функции классифицированы, что является важнейшим преимуществом предлагаемого подхода к исследованию функций действительной переменной на убывание и возрастание.

Заметим также, что при определении области убывания (возрастания) функции в качестве инструмента классификации необходимо пользоваться двусторонней окрестностью исследуемой точки. И только при классификации точек, соответствующих наименьшему и наибольшему значениям аргумента (если они существуют), нужно пользоваться односторонними окрестностями этих точек. В качестве универсального инструмента выявления точек постоянства функции следует пользоваться замкнутыми окрестностями исследуемых точек.

Таким образом, мы приходим к схеме исследования функций на убывание и возрастание, изображенной на рис. 5, где под символом * в обозначении D_{*} понимается один из трех символов ↓, ↑, _.

На схеме цифрами 1 и 2 обозначены определения, позволяющие классифицировать точки области определения функции; цифрами 3 и 4 обозначены обобщения определений 1 и 2 на любые промежутки; цифрой 5 обозначена производная функции, используемая для исследования дифференцируемых функций. Блок, обозначенный цифрой 6, позволяет классифицировать исследуемую функцию на монотонность.

В ходе дальнейшего изучения свойств функций важно обратить внимание на необходимость уточнения терминологии при исследовании функций на непрерывность и с помощью производных. А именно:

– при исследовании функций на непрерывность вместо термина «промежутки непрерывности» следует пользоваться термином «область непрерывности»;

– при вычислении производной функций действительной переменной вместо терминов «промежутки дифференцируемости» функции следует пользоваться термином «область дифференцируемости» функции;

– при исследовании функций действительной переменной на выпуклость (вогнутость) вместо терминов «промежутки выпуклости функции» и «промежутки вогнутости функции» правильно использовать термины «область выпуклости функции» и «область вогнутости функции».

Список литературы

1. Блох, А.Я. Возрастание функции в точке и на множестве / А.Я. Блох // Математика в школе. – 1978. – № 6. – С. 21–23.

2. Ильин, В.А. Математический анализ. Начальный курс / В.А. Ильин, Бл.Х. Садовничий. – М. : Изд-во МГУ, 1985. – 425 с.

3. Райков, Д.А. Одномерный математический анализ : учеб. пособие / Д.А. Райков. – М. : Высш. школа, 1982. – 415 с.

4. Алгебра и начала анализа : учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын [и др.] ; Под ред. А.Н. Колмогорова. – 14-е изд. – М. : Просвещение, 2004. – 384 с.

5. Новиков, А.Д. Новый подход к исследованию функций на возрастание и убывание в вузе и школе / А.Д. Новиков // Наука и Школа. – 2008. – № 1. – С. 23–26.

6. Новиков, А.Д. О корректном введении определения возрастающей (убывающей) на множестве функции / А.Д. Новиков // Высшее образование сегодня. – 2008. – № 2. – С. 70–72.

7. Новиков, А.Д. Возрастание и убывание функций на дискретных множествах / А.Д. Новиков // Высшее образование сегодня. – 2008. – № 12. – С. 83–85.