

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ТЕЛЕ ОТ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Н.П. Жуков, Н.Ф. Майникова, И.В. Рогов, О.Н. Попов

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

**Ключевые слова и фразы:** моделирование; неразрушающий контроль; теплоемкость; теплопроводность.

**Аннотация:** Разработан метод неразрушающего контроля теплофизических свойств твердых материалов. Метод применен на модели цилиндрического полупространства. Получено безразмерное представление температурной функции. Выполнен анализ результатов численного исследования с целью оптимизации режимов проведения эксперимента.

При решении задач оперативного контроля теплофизических свойств (ТФС) материалов определенный интерес представляют неразрушающие методы с использованием линейного источника тепла, расположенного на поверхности полуограниченного в тепловом отношении объекта [1; 4]. Методы, в которых тепловой источник действует на сравнительно небольшом участке объекта, оставляя после себя направленный тепловой поток, а, следовательно, и нестационарное температурное возмущение, представляют широкие технологические возможности, позволяя определять независимо две теплофизические характеристики ( $\lambda$  – теплопроводность и  $a$  – температуропроводность).

Достоинствами данных методов являются также сравнительная простота их технической реализации и малое время, необходимое для проведения эксперимента. Исследования в этой области на сегодняшний день остаются актуальными. Это определяется, прежде всего, тем, что ТФС материала находят на основании косвенных экспериментов и рассчитывают по определенным математическим моделям. В результате точность и надежность определения ТФС во многом обуславливается тем, насколько адекватно математическая модель описывает тепловые процессы, проходящие при измерении.

Данная работа посвящена аналитическому описанию процесса теплопроводности от линейного нагревателя постоянной мощности в полуограниченном теле.

Рассмотрим тепловую схему, представленную на рис. 1.

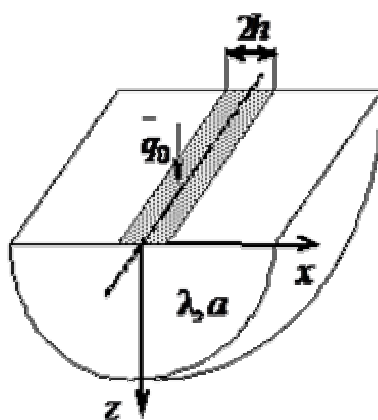


Рис. 1. Тепловая схема

На поверхности полуограниченного в тепловом отношении тела расположен нагреватель в виде полосы шириной  $2h$ , через которую в материал подается тепловой поток  $q_0$  [2].

Температура  $T$  в точке с координатами  $(x,0)$  поверхности в момент времени  $\tau$  будет определяться из выражения [2]:

$$T(x, 0, \tau) = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{Fo}^{0.5}}{x^{0.5} \lambda} \left\{ \operatorname{erf} \left[ \frac{h+x}{2\sqrt{Fo}^{0.5}} \right] + \operatorname{erf} \left[ \frac{h-x}{2\sqrt{Fo}^{0.5}} \right] - \frac{h+x}{2\sqrt{\pi Fo}^{0.5}} \operatorname{Ei} \left[ -\frac{(h+x)^2}{4Fo} \right] - \frac{h-x}{2\sqrt{\pi Fo}^{0.5}} \operatorname{Ei} \left[ -\frac{(h-x)^2}{4Fo} \right] \right\}, \quad (1)$$

где  $Fo$  – число Фурье;  $\tau$  – время, с;  $x$  – координата, м.

Сведем выражение (1) к безразмерному виду:

$$\Theta = \frac{Fo^{0.5}}{x^{0.5}} \left\{ \operatorname{erf} \left[ \frac{1+\bar{x}}{2Fo^{0.5}} \right] + \operatorname{erf} \left[ \frac{1-\bar{x}}{2Fo^{0.5}} \right] - \frac{1+\bar{x}}{2\sqrt{\pi Fo}^{0.5}} \operatorname{Ei} \left[ -\frac{(1+\bar{x})^2}{4Fo} \right] - \frac{1-\bar{x}}{2\sqrt{\pi Fo}^{0.5}} \operatorname{Ei} \left[ -\frac{(1-\bar{x})^2}{4Fo} \right] \right\}, \quad (2)$$

где  $\Theta = T(\bar{x}, 0, \tau) \lambda / \sqrt{q_0 h}$ ;  $Fo = \alpha \tau / h^2$ ;  $\bar{x} = x/h$  – температура, время и координата, соответственно, в безразмерном представлении.

Для точки с координатами  $(0; 0)$  выражение (2) примет вид

$$\Theta = \frac{2Fo^{0.5}}{x^{0.5}} \left\{ \operatorname{erf} \left[ \frac{1}{2Fo^{0.5}} \right] - \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo}^{0.5}} \operatorname{Ei} \left[ -\frac{1}{4Fo} \right] \right\} \quad (3)$$

Используя следующие соотношения [4]:

$$\operatorname{erf}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \quad \operatorname{Ei}[-x] = \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n! n},$$

получим выражение для температуры поверхности  $z=0$  в точке с координатой  $x$  для больших значений  $\tau$ :

$$T(x, 0, \tau) = \frac{\sqrt{q_0 h}}{\lambda x} \left\{ \ln(4\alpha \tau) - \frac{h+x}{2h} \ln(h+x)^2 - \frac{h-x}{2h} \ln(h-x)^2 + 2 - \gamma \right\}, \quad (4)$$

где  $\gamma$  – число Эйлера.

Выражение (4) в безразмерной форме применительно к точке с координатами  $(0; 0)$  для больших значений  $\tau$  имеет вид:

$$\Theta = \frac{1}{x} \left[ \ln(4Fo) + 2 - \gamma \right] \quad (5)$$

Таким образом, получено безразмерное представление температурной функции.

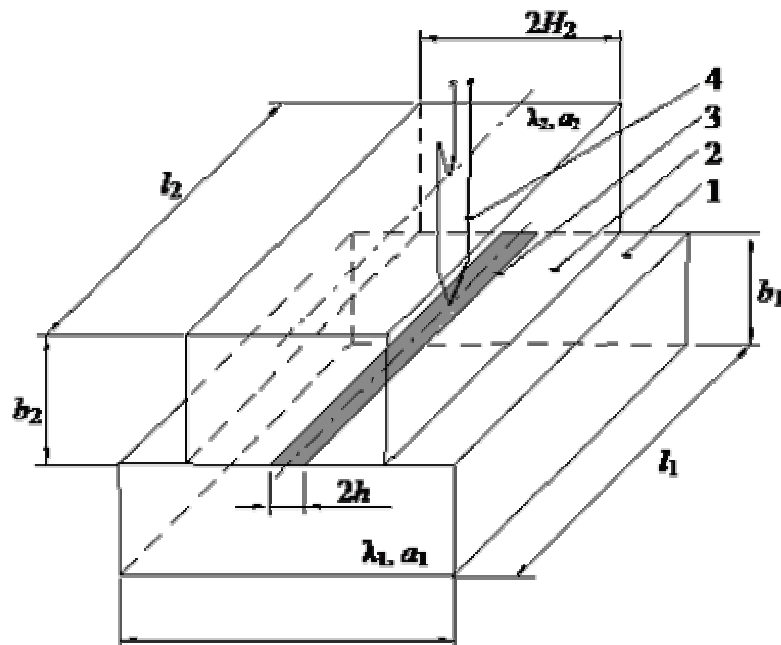


Рис. 2. Измерительная схема метода с линейным источником тепла:

- 1 – изделие; 2 – измерительный зонд (ИЗ); 3 – нагреватель;
- 4 – термоприемник (ТП)

Найденное выражение (5) автоматически распространяется на бесконечное множество тепловых явлений применительно к схеме, представленной на рис. 1.

Измерительная схема метода с линейным плоским нагревателем постоянной мощности представлена на рис. 2.

Рассмотрим два тела (1 и 2) с различными теплофизическими свойствами ( $\lambda_1, a_1$  и  $\lambda_2, a_2$ ). Размеры первого тела: длина –  $l_1$ ; толщина –  $b_1$ ; ширина –  $2H_1$ . Размеры второго тела: длина –  $l_2$ ; толщина –  $b_2$ ; ширина –  $2H_2$ . В плоскости контакта действует линейный источник тепла в виде полосы. Первое тело представляет собой исследуемый образец. Второе тело – подложка измерительного зонда (ИЗ). Начальная температура тел одинакова и равна  $T_0$ . Источник тепла начинает действовать в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ). В месте соприкосновения поверхностей тел 1 и 2 (рис. 2) с нагревателем осуществляется идеальный тепловой контакт.

Перед тепловым воздействием измеряют разность температур между двумя точками, первая из которых располагается в непосредственной близости от нагревателя, а вторая – на расстоянии  $b_2$  от него, до тех пор, пока эта разность температур не станет меньше наперед заданной величины. Тепловое воздействие осуществляется при подаче на нагреватель электрический ток. Мощность нагревателя –  $Q$ . В ходе эксперимента фиксируется термограмма – зависимость разности температур ( $T$ ) в точках контроля от времени ( $\tau$ ).

На рис. 3 представлены термограммы  $\Theta = f(Fo)$ .

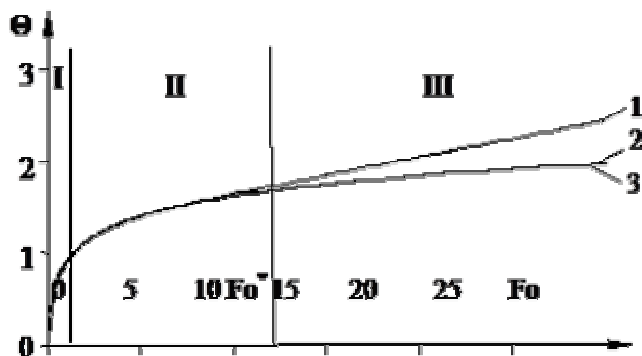


Рис. 3.  $\Theta=f(Fo)$ :

Кривая 1 получена численным моделированием для  $\lambda = 1$  Вт/(м·К),  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1$  Дж/(кг·К); кривые 2 и 3 получены по выражениям (3) и (5), соответственно

Кривая 1 получена численным решением задачи при соотношении  $b_2/h=5$  с помощью пакета ELCUT [5]. Кривые 2 и 3 получены по выражениям (3) и (5) с помощью пакета Maple.

На термограммах, представленных на рис. 3, выделены три участка: I, II и III.

Первый (I) участок термограммы характеризуется тем, что тепловой поток, проходящий через точку контроля, является переменным во времени и соответствует начальной стадии развития теплового процесса.

Второй (II) участок термограммы характеризуется регуляризацией теплового режима в локальной области нагревателя и ТП (рис. 2) тепловой поток, проходящий через точку контроля, становится практически постоянным.

Это позволяет использовать математическую модель (5) описания процесса теплопереноса для второго (рабочего) участка термограммы.

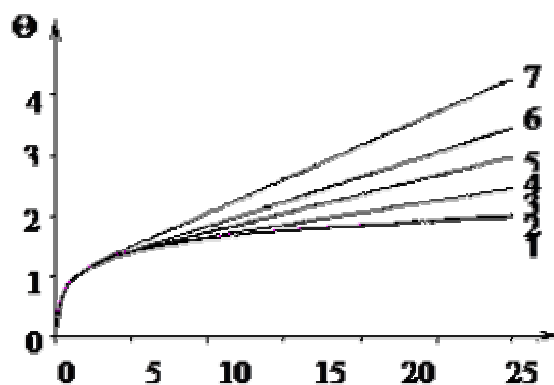
Третий (III) участок термограммы характеризуется тем, что нарушается условие полуограниченности объекта исследования (тепловой поток, проходящий через точку контроля, вновь становится переменным).

Графические зависимости  $\Theta=f(Fo)$ , полученные по формулам (3) и (5), а также численные решения для соотношений  $b_2/h=8,5; 4,3,5$  собраны в семейство, представленное на рис. 4.

Выделим рабочие участки на термограммах, представленных на рис. 4.

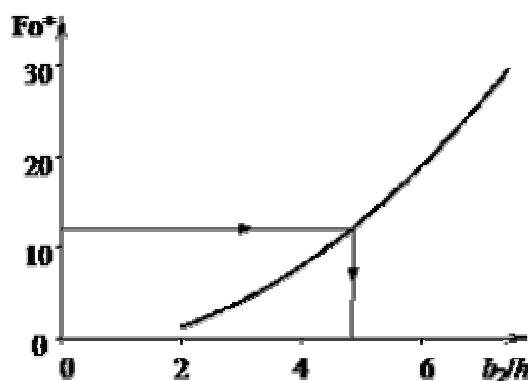
Зная границы рабочих участков термограмм для различных соотношений  $b_2/h$ , можно найти зависимость  $Fo^* = f(b_2/h)$ . По оси ординат на рис. 5 представлены значения  $Fo^*$ , соответствующие времени окончания второго (II) рабочего участка, на термограммах (1–7).

Зависимость, представленная на рис. 5, позволяет определить размеры подложки измерительного зонда. Например, при  $Fo^*=12,3$  толщина подложки измерительного зонда должна составлять  $b_2 \geq 4,85$  мм.



**Рис. 4. Термограммы:**

Кривые 1, 2 получены по формулам (3) и (5). Кривые 3–7 получены численно при следующих соотношениях  $b_2/h$ : 8; 5; 4; 3,5; 3



**Рис. 5.  $Fo^* = f(b_2/h)$**

**Рис. 5.**

Численное исследование теплопереноса в полуограниченном теле от линейного источника тепла постоянной мощности позволило рассмотреть вопросы оптимизации процесса при применении разработанного метода и средства его реализации для определения ТФС полимерных материалов.

*Список литературы*

1. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М. : Высш. шк., 1967. – 599 с.
2. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 487 с.
3. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1984. – 831 с.
4. Платунов, Е.С. Теплофизические измерения и приборы / Е.С. Платунов, С.Е. Буравой, В.В. Курепин, Г.С. Петров ; под общ. ред. Е.С. Платунова. – Л. : Машиностроение, 1986. – 256 с.
5. ELCUT: моделирование двумерных полей методом конечных элементов. Версия 5.5. Руководство пользователя. – СПб. : Производственный кооператив ТОР, 2003. – 249 с.