УДК 678.126.033.01: 539.62

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО МЕТОДА НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ИЗДЕЛИЙ

И.В. Рогов, Н.П. Жуков, Н.Ф. Майникова, Н.В. Лунева

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Ключевые слова и фразы: математическая модель; многослойное изделие; неразрушающий контроль; теплофизические свойства; тепловая активность; теплопроводность.

Аннотация: Разработана математическая модель теплопереноса при неразрушающем контроле теплофизических свойств двухслойных изделий. Метод контроля предусматривает тепловое воздействие на поверхность исследуемого тела от локального нагревателя постоянной мощности, фиксирование температурных откликов в заданных точках поверхности исследуемого тела, обработку термограмм по разработанному алгоритму.

При решении задач оперативного теплового контроля изделий определенный интерес представляют неразрушающие методы с использованием круглого плоского источника тепла, расположенного на поверхности полуограниченного в тепловом отношении объекта [1]. Исследования в этой области на сегодняшний день остаются актуальными. Это определяется прежде всего тем, что теплофизические свойства (**ТФС**) материалов изделий находят на основании косвенных экспериментов и рассчитывают по определенным математическим моделям.

В результате точность и надежность определения ТФС во многом обуславливается тем, насколько адекватно математическая модель описывает тепловые процессы в объекте исследования, происходящие при измерении.

В данной работе представлена математическая модель теплопереноса при неразрушающем контроле двухслойных изделий.

Согласно измерительной схеме тепловой системы (рис. 1), воздействие на исследуемое тело, имеющее равномерное начальное температурное распределение, осуществляется с помощью нагревателя постоянной мощности, выполненного в виде тонкого диска радиусом R, встроенного в подложку измерительного зонда (**ИЗ**). Исследуемое тело представляет собой конструкцию, состоящую из двух слоев (например, двухслойная пластина). Подложка ИЗ выполнена из рипора – хорошего теплоизолятора. Радиус подложки ИЗ – r_1. Толщина первого слоя – h_1, второго – h_2. Длина и ширина тела: L_1 и L_2. Температура в точке контроля измеряется с помощью термопары (**ТП**).

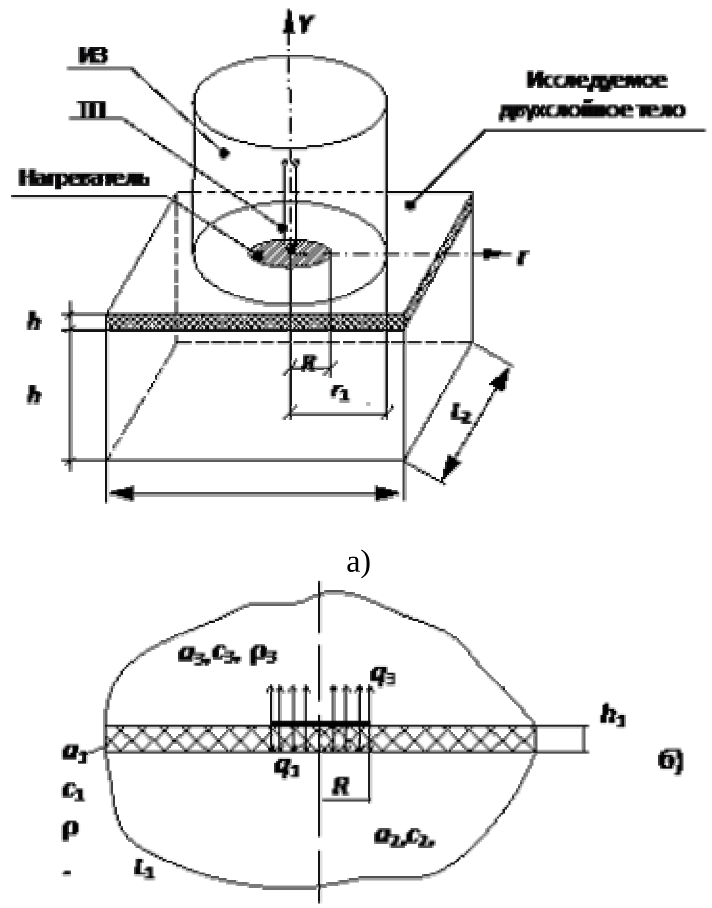

Рис. 1. Измерительная (*а*) и тепловая (*б*) схемы

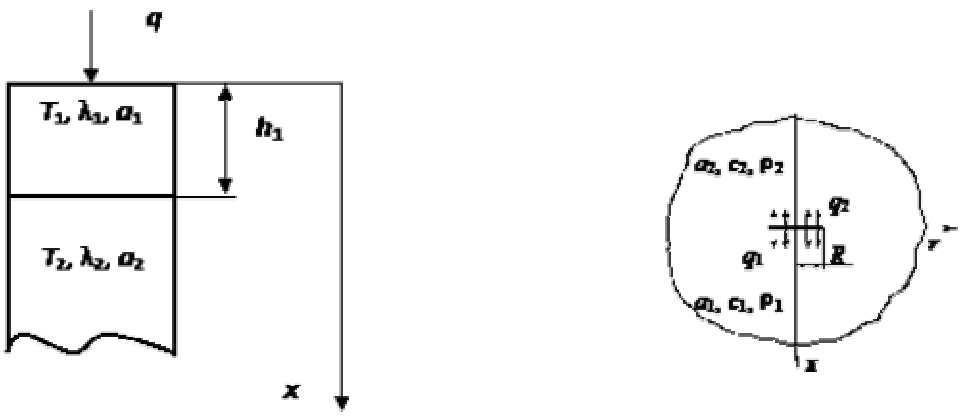

Рис. 2. Система, состоящая из ограниченного и полуограниченного тел

Рассмотрим систему, состоящую из ограниченного и полуограниченного тел при граничных условиях второго рода (рис. 2).

Ограниченный стержень (неограниченная пластина) толщиной h_1 приведен в соприкосновение с полуограниченным стержнем (полуограниченным телом), имеющим другие термические коэффициенты. Боковые поверхности стержней имеют тепловую изоляцию. В начальный момент времени на свободном конце стержня (пластины) начинает действовать источник тепла постоянной мощности q, который действует на протяжении всего процесса нагрева. Требуется найти распределение температуры по длине стержней (по глубине пластины и тела) в любой момент времени.

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad \tau > 0,\ 0 < x < h_1; \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad \tau > 0,\ h_1 < x < \infty; \tag{2}$$

$$T_1(x,0) = T_2(x,0) = 0; \tag{3}$$

$$T_1(h_1,\tau) = T_2(h_1,\tau); \tag{4}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(h_1,\tau)_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(h_1,\tau)_1}{\partial x}; \tag{5}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(0,\tau)_1}{\partial x} = q; \tag{6}$$

$$T_2(\infty,\tau) = 0. \tag{7}$$

Решения уравнений (1) и (2) при условиях (3) для изображений функций $T_1(x, \tau)$ и $T_2(x, \tau)$ будут иметь вид:

$$T_{L1}(x,s) = A\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}x\right) + B\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}x\right); \tag{8}$$

$$T_{L2}(x,s) = C\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_2}}x\right). \tag{9}$$

Постоянные *A*, *B*, и *C* находим из граничных условий (4), (5) и (6). С учетом (8) и (9):

$$A\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right) + B\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right) = C\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_2}}h_1\right); \tag{10}$$

$$A\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right) - B\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right) = -C\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_2}}h_1\right); \tag{11}$$

$$B - A = \frac{q\sqrt{a_1}}{s^{3/2}\lambda_1}. \tag{12}$$

С учетом того, что $\varepsilon = \frac{\lambda}{\sqrt{a}}$, перепишем (11) и (12) в виде:

$$A\varepsilon_1\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right) - B\varepsilon_1\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right) = -C\varepsilon_2\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_2}}h_1\right); \tag{13}$$

$$B - A = \frac{q}{s^{3/2}\varepsilon_1}. \tag{14}$$

Решая уравнения (10), (13) и (14) относительно *A*, *B* и *C* получим:

$$A=\frac{q(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)}{\varepsilon_1 s^{3/2}\left((\varepsilon_1+\varepsilon_2)\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)\right)}; \qquad (15)$$

$$B=\frac{q(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)}{\varepsilon_1 s^{3/2}\left((\varepsilon_1+\varepsilon_2)\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)\right)}; \qquad (16)$$

$$C=\frac{2q\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_2}}h_1\right)}{s^{3/2}\left((\varepsilon_1+\varepsilon_2)\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)\right)}. \qquad (17)$$

Введем обозначения: $K_\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$; $h^*=\frac{1-K_\varepsilon}{1+K_\varepsilon}=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$.

Решение задачи в области изображений:

$$T_{L1}(x,s)=\frac{q\left(\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}x\right)+h^*\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}x\right)\right)}{\varepsilon_1 s^{3/2}\left(\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)-h^*\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)\right)}; \qquad (18)$$

$$T_{L2}(x,s)=\frac{2q\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_2}}h_1\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_2}}x\right)}{s^{3/2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left(\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)-h^*\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_1}}h_1\right)\right)}. \qquad (19)$$

После перехода от изображения к оригиналу запишем решение краевой задачи (1)– (7):

$$T_1(x,\tau)=\frac{q}{\varepsilon_1}\left(2\sqrt{\tau}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau a_1}}\right)+2\sqrt{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}(h^*)^n\left(\mathrm{ierfc}\left(\frac{(2nh_1-x)}{2\sqrt{\tau a_1}}\right)+\mathrm{ierfc}\left(\frac{(2nh_1+x)}{2\sqrt{\tau a_1}}\right)\right)\right); \qquad (20)$$

$$T_2(x,\tau)=\frac{4q\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\sum_{n=1}^{\infty}(h^*)^{n-1}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{\left((x-h_1)\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}+(2n-1)h_1\right)}{2\sqrt{\tau a_1}}\right). \qquad (21)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{Fo}=\frac{a_1\tau}{(h_1)^2},\quad \tilde{x}=\frac{x}{h_1},\quad K_a=\frac{a_1}{a_2},\quad \Theta=\frac{T\lambda_1}{qh_1},$$

где Fo – безразмерное время (число Фурье); $\tilde{x}$ – безразмерная координата; K_a – относительная температуропроводность тел; Θ – безразмерная температура.

Выражения (20) и (21) можно записать в безразмерном виде:

$$\Theta_1(\tilde{x},\mathrm{Fo}) = 2\sqrt{\mathrm{Fo}}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{\tilde{x}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right) + 2\sqrt{\mathrm{Fo}}\sum_{n=1}^{\infty}(h^*)^n\left(\mathrm{ierfc}\left(\frac{(2n-\tilde{x})}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right) + \mathrm{ierfc}\left(\frac{(2n+\tilde{x})}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\right), \quad (22)$$

$$\Theta_2(\tilde{x},\mathrm{Fo}) = \frac{4\sqrt{\mathrm{Fo}}K_\varepsilon}{(1+K_\varepsilon)}\sum_{n=1}^{\infty}(h^*)^{n-1}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{\left((\tilde{x}-1)\sqrt{K_a}+(2n-1)\right)}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right). \quad (23)$$

Ряды в решениях (20), (21) и (22), (23) хорошо сходятся при малых значениях времени (Фурье).

При $\tilde{x} = 0$ формула (22) имеет вид:

$$\Theta_1(0,\mathrm{Fo}) = 2\sqrt{\mathrm{Fo}}\left(\frac{1}{\pi} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2(h^*)^n\,\mathrm{erfc}\left(1,\frac{n}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\right)\right)\right). \quad (24)$$

При больших Фурье формула (24) имеет вид:

$$\Theta_1(0,\mathrm{Fo}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{2h^*}{h^*-1}\right)\sqrt{\mathrm{Fo}} - \frac{4h^*}{(h^*-1)^2}. \quad (25)$$

Перейдем от безразмерных величин к размерным. После ряда преобразований и упрощений при больших τ имеем:

$$T(0,\tau) = \frac{2q}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\tau}}{\varepsilon_2} + \left(1-\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}\right)\frac{qh_1}{\lambda_1}. \quad (26)$$

Таким образом, мы получаем линейную зависимость вида:

$$T(0,\tau) = b_1\sqrt{\tau} + b_0, \quad (27)$$

где $b_1 = \dfrac{2q}{\sqrt{\pi}\varepsilon_2}$, (28)

тогда $\varepsilon_2 = \dfrac{2q}{\sqrt{\pi}b_1}$. (29)

Рассмотрим частные случаи.

Случай 1. Первый слой изделия (рис. 1) высокотеплопроводный, а второй – низкотеплопроводный, т.е. $\lambda_1 >> \lambda_2$, тогда $\varepsilon_1 >> \varepsilon_2$. Следовательно,

$$b_0 = \left(1-\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}\right)\cdot\frac{q\cdot h_1}{\lambda_1} = \left(\frac{\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}\right)\cdot\frac{q\cdot h_1}{\lambda_1} \approx -\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}\cdot\frac{q\cdot h_1}{\lambda_1} = -\frac{q\cdot c_1\cdot \rho_1\cdot h_1}{\varepsilon_2^2}. \quad (30)$$

Определяем:

$$c_1 \cdot \rho_1 \cdot h_1 = -\frac{b_0 \varepsilon_2^2}{q}. \qquad (31)$$

Следовательно, если нам известны c_1 и ρ_1, то из выражения (31) мы можем определить h_1. При заданном значении h_1 можем определить произведение $c_1\rho_1$.

Случай 2. Первый слой изделия (рис. 1) низкотеплопроводный, а второй – высокотеплопроводный, т.е. $\lambda_1 << \lambda_2$, тогда $\varepsilon_1 << \varepsilon_2$. Следовательно,

$$b_0 = \left(1 - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}\right) \cdot \frac{q \cdot h_1}{\lambda_1} \approx \frac{q \cdot h_1}{\lambda_1}. \qquad (32)$$

Определяем:

$$\frac{\lambda_1}{h_1} = \frac{q}{b_0}. \qquad (33)$$

Из выражения (33), зная λ_1, можно определить h_1. Если задано h_1, можно определить λ_1.

Список литературы

1. Жуков, Н.П. Многомодельные методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств твердых материалов и изделий. / Н.П. Жуков, Н.Ф. Майникова // Монография. – М. : Машиностроение – 1, 2004. – 288 с.
2. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.
3. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 487 с.