ББК В161.5

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ МЕТОДАМИ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Н.В. Панов

ГОУ ВПО «Институт вычислительных технологий», г. Новосибирск.

Рецензент И.Н. Дрогобыцкий

Ключевые слова и фразы: интервальный анализ; интервальное расширение функции; интервальная оценка.

Аннотация: Работа посвящена сравнению точности оценок области значения функций методами интервального анализа. Вычисление такой оценки может быть полезно при решении многих задач. В статье описываются способы построения интервальных расширений, приводятся численные эксперименты для различных целевых функций.

Введение

К задаче определения границ области значений функции сводятся многие задачи управления, проектирования, распознавания образов и так далее. Фактически, эта задача эквивалентна задаче определения глобальных минимума и максимума целевой функции на заданной области определения. Проблема глобальной оптимизации, в свою очередь, часто возникает во многих областях науки и техники. К настоящему моменту наработан богатый инструментарий для численного решения этой задачи. [1, 2, 5, 6, 8, 9]. В настоящей статье рассматриваются методы оценки области определения функции на интересующей нас области определения методами интервального анализа.

Интервальный анализ – сравнительно молодой раздел вычислительной математики, оперирующий не отдельными числами, а целыми интервалами или областями. Формально говоря, одномерный интервал – это замкнутый отрезок вещественной оси. Левый и правый конец интервала обозначают как $\underline{x}$ и $\overline{x}$, соответственно. В тексте интервальные величины выделяют жирным шрифтом. В этих обозначениях можно записать, что $x = [\underline{x}, \overline{x}]$. Многомерные интервалы (также называемые брусами) определяются как вектор с интервальными компонентами, его геометрическим образом является параллелепипед (брус). Подробнее см., например, [4]. Создано несколько интервальных арифметик, в частности наиболее популярная классическая интервальная арифметика. В ней операции сложения, вычитания, умножения и деления определяются следующим образом:

$$x + y = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$$

$$x - y = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$$

$$x \cdot y = [\min(\underline{x}\cdot\underline{y}, \overline{x}\cdot\overline{y}, \underline{x}\cdot\overline{y}, \overline{x}\cdot\underline{y}),\ \max(\underline{x}\cdot\underline{y}, \overline{x}\cdot\overline{y}, \underline{x}\cdot\overline{y}, \overline{x}\cdot\underline{y})]$$

$$1\ /\ y = [1/\overline{y},\ 1/\underline{y}], \text{ (для } y \text{ не содержащих 0)}$$

Подробнее об интервальных арифметиках и их особенностях см. в [6,9].

Интервальным расширением вещественной функции f называется интервальная функция f, если:

1. $f(x) = f(x)$. То есть, значения интервального расширения от точечного аргумента совпадают со значениями искомой функции.

2. $f(x)$ монотонна по включению. То есть, если $x \subseteq y$, то $f(x) \subseteq f(y)$.

Таким образом, интервальное расширение $f(x)$ функции $f(x)$ на брусе x является для неё внешней оценкой (оценкой объемлющим множеством).

Естественное интервальное расширение. Если для рациональной функции $f(x)$ на интервале x определен результат $f_{nat}(x)$ подстановки вместо аргументов функции интервалов их изменения и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики, то полученная интервальная функция $f_{nat}(x)$ будет интервальным расширением функции f на брусе x, называемым естественным интервальным расширением. Вычислять такое интервальное расширение просто, но по сложившемуся мнению, использование его подчас приводит к весьма грубым результатам при оценивании области значений функции [8]. Дело в том, что интервальная оценка зачастую весьма избыточна из-за эффекта зависимости – втягивания «лишних» точек при математических преобразованиях. Это обстоятельство послужило причиной появления различных модификаций вычисления интервальной оценки. Наиболее популярной стала среднезначная форма [7].

Среднезначная форма интервального расширения. Если $f'(x)$ – интервальное расширение производной $f'(x)$ функции $f(x)$ на интервале x, то значение искомой функции на брусе x может быть оценено как

$$\min\left(f(c)+\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\times\frac{wid(x_i)}{2}\right)$$
$$\le f(x) \le$$
$$max\left(f(c)+\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\times\frac{wid(x_i)}{2}\right)$$

где $c \in x$ – некоторая фиксированная точка. Тогда выражение

$$f_{mv}(x) = f(c) + f'(x) \cdot (x - c). \qquad (1)$$

по определению является интервальным расширением функции f на интервале x. В качестве c традиционно выбирается середина интервала.

Наклонная форма интервального расширения. Пусть вещественнозначную функцию f от n переменных нам удалось представить в виде $f(x)=f(x_0) + f_s(x_0, x)(x - x_0)$, где $f_s(x_0, x)$,мы будем называть наклоном функции f между точками x_0 и x при заданных x_0, x. В одномерном случае наклон функции $f_s(x_0, x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ совпадает с ее разделенной разностью первого порядка. Предполагая непрерывность функции наклона, получаем $f_s(x_0, x_0) = f'(x_0)$. В многомерном не интервальном случае наклон определяется неоднозначно. Интервальный наклон не есть интервальное расширение обычного наклона, но множество всех представителей наклонов функции между точками x и y, когда y пробегает заданный брус y.

Определение. Интервальным наклоном функции f на интервале y относительно точки x называется интервальный вектор s, такой, что для любого $y \in y$ существует $s \in s$, являющийся наклоном функции $f(x)$ между точками x и y.

Мы можем найти внешнюю оценку области значений функции f на брусе x как

$$f_{slope}(x, x_0) = f(x_0) + f_s(x_0, x) \cdot (x - x_0). \qquad (2)$$

Такое интервальное расширение называют наклонным.

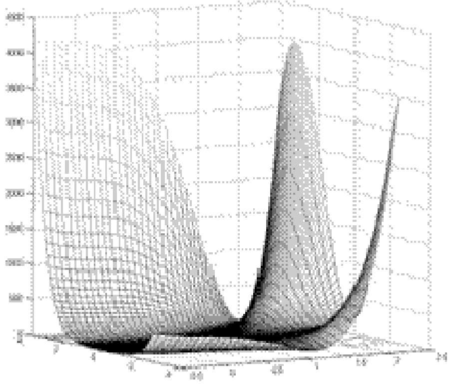


Рис.1. Функция Price5

Точность интервального расширения функций. Оценим область значений простейшей функции: $f(x) = x - x$, скажем, на интервале [-1, 1]. Естественное интервальное расширение, по правилам, описанным выше, оценит область значения функции как [-1, 1] – [-1, 1] = [-2, 2]. Проблема в том, что при вычислениях неявно подразумевается, что любая переменная в каждый момент времени может принять любое значение из своего интервала. То есть все входящие интервалы рассматриваются как независимые. Если бы вместо $f = x - x$ было бы $f = x - y$, то оценка была бы точной. Среднезначная форма на том же примере обозначит границы как [0, 0], независимо от размеров входного интервала. В тоже время, если мы рассмотрим функцию

$$f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x, \qquad (3)$$

чья производная равна $f'(x) = 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$, а интервальное расширение, вычисленное по формуле (1) на интервале [-1, 1] даст следующую оценку**:** $f_{mv}(x) = f(c) + f'(x) \cdot (x - c) = f(\mathrm{mid}[-1, 1]) + ([-16, 16] - [0, 9] + [-4, 4] - 1) \cdot [-1, 1] = 0 + [-16, 16] - [0, 9] + [-4, 4] - 1 = [-25, 16] + [-4, 4] - 1 = [-30, 19]$.

Естественное интервальное расширение на том же интервале [-1, 1] дает оценку

$f_{nat}(x) = 4 \cdot [-1, 1]^4 - 3 \cdot [-1, 1]^4 + 2 \cdot [-1, 1]^2 - [-1, 1] = [-4, 10]$.

Возможно, нам удастся улучшить точность среднезначной оценки, получив более точную оценку на значения производной. Посчитаем естественное интервальное расширение производной по схеме Горнера. Некоторые классики рекомендуют именно этот способ вычисления для повышения точности [0]. Вопреки ожиданиям, использование этого метода для вычисления производной функции (3) увеличило лишь ширину интервальной оценки:

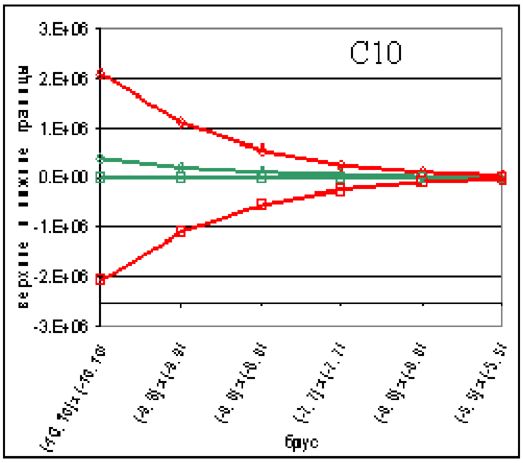


Рис.3. Точность интервальных оценок

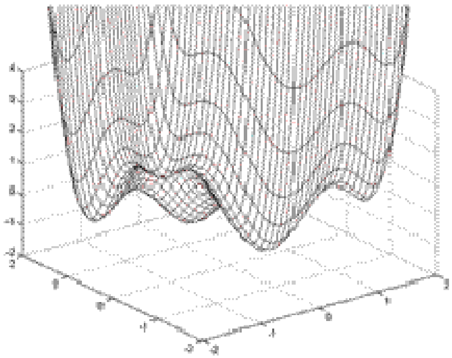


Рис.2. Вид функции C10

$f'_h(x) = ((16x - 9) \cdot x + 4) \cdot x - 1 = (([-16, 16] - 9) \cdot [-1, 1] + 4) \cdot [-1, 1] - 1 = [-30, 28]$,

$f_{mv(h)} = 0 + [-30, 28] \cdot [-1, 1] = [-30, 28]$.

В интервальных алгебрах форма записи функции, ее вид существенно влияют на точность интервального расширения и в общем случае $x^n = x \cdot \ldots \cdot x$. Действительно, $x^2 = [0, 4]$ на интервале [-2, 1], в то время как $x \cdot x = [-2, 4]$, $x^3 = [-8, 1]$ на том же интервале, когда $x \cdot x \cdot x = [-8, 4]$ и тому подобное. Схема Горнера как раз переводит возведение в степень в каскады умножений. Правда, есть и обратные примеры: на интервале [-1, -5] $x^3 = x \cdot x \cdot x = [-125, -1]$. Чтобы не строить свою теорию лишь на одном примере, мы случайным образом сгенерировали еще несколько полиномов различных степеней и с произвольными коэффициентами. Для них посчитали естественное расширение «в лоб» и по схеме Горнера на интервалах различной ширины. Эксперименты подтверждают сфор-мулированные выше рассуждения. Иногда использование схемы Горнера давало более точный результат, иногда – нет. Характерно, что для отрицательных интервалов точнее схема Горнера, для нульсодержащих – наоборот. Над положительными интервалами обе обеспечивают одинаковую точность.

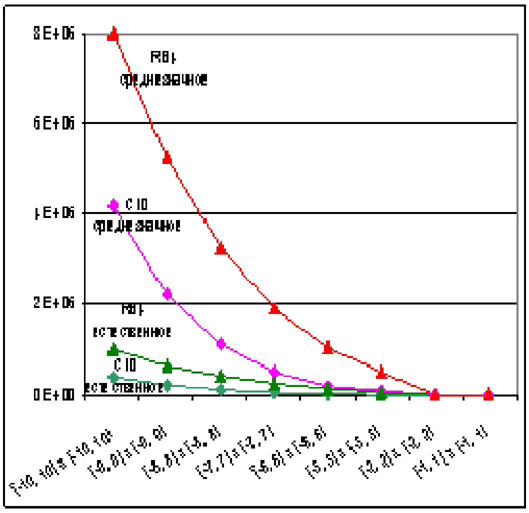
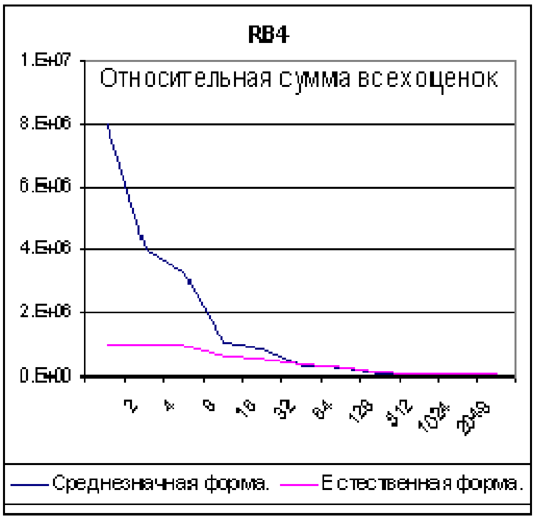


Рис.4. Ширина интервальных оценок

Продолжим сравнивать точность естественного и среднезначного интервальных расширений. Еще одним серьезным минусом среднезначной формы интервального расширения является ее неприменимость в ряде случаев. Действительно, вычисление наклона $f_s(x_0, x)$ в выражении (2) подразумевает деление. Если знаменатель будет нольсодержащий интервал, то границы будут весьма широки. Сдвинем интервал интереса так, чтобы ноль не мешал. Например, на интервале [35,40] наклонная форма интервального расширения с центром в середине интервала оценит область значений функции (3) как [4 973 701, 23 805 845]. (Результат округлён до целых.) Естественное интервальное расширение дает более точные границы: [5 812 910, 10 114 540].

Вычислим естественное расширение функции «Price5» [6]. $f_{P5}(x, y) = (2x^3y – y^3)^2 + (6x – y^2 + y)^2$ на брусе [-5, 5] x [-2, 6]. Действуя по определению, получим $f_{nat}(x, y) = [0,\ 2\,949\,280]$. Точные значения минимума и максимума на указанной области определения – 0 и 2 948 256. Разница менее одного процента – неплохо для способа, позволившего нам за одну итерацию найти гарантированные внешние оценки минимума и максимума функции. Особенно учитывая характер функции (рис. 2). Точность естественного интервального расширения существенно зависит от способа записи формулы функции. Если в функции P5 раскрыть скобки, тем самым существенно увеличив количество вхождений обеих переменных, то естественное интервальное расширение такого выражения на том же брусе даст уже оценку [-698 524, 2 900 952].



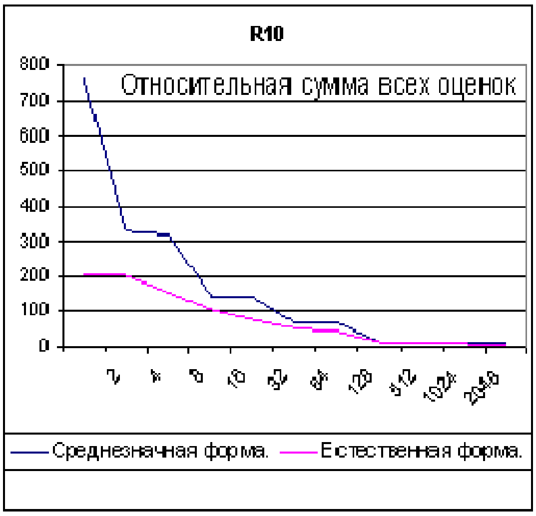


Рис. 5. Средняя величина интервальной оценки

Точность любой интервальной оценки критическим образом зависит от ширины бруса оценивания. Для естественного интервального расширения эта зависимость имеет первый порядок точности: $\mathrm{dist}(f(x), \mathrm{range}_x f) \le C \cdot \|\mathrm{wid}\ x\|$, тогда как среднезначная форма имеет уже второй порядок точности. Именно благодаря этому последняя значительно преобладает в интервальных исчислениях. Наши эксперименты подтверждают, что ширина среднезначной формы с уменьшением размера бруса уменьшается значительно быстрее ширины естественного интервального расширения. К сожалению, это ещё не означает, что его точность всегда становится лучше. На рис. 3 показаны верхняя и нижняя оценки области значения функции $f = 4x^2 - 2.1x^4 + 1/3x^6 + xy – 4y^2 + 4y^4$, также известной под именем «Шестигорбый верблюд» или «C10» [6]. Это весьма круто возрастающая за пределами бруса [-1, 1] x [-1, 1] функция (рис. 2) имеет шесть локальных минимумов, которым и обязана своим названием. Удивленные результатом мы проверили ещё ряд функций: $f_{r10} = x^2 + y^2 - \cos(18x) – \cos(18y)$, известную под именем десятой функции Растригина (R10), Griewank2: $f_{G2} = (x^2 + y^2) / 200 – \cos(x) \cdot \cos(y / \sqrt{2}) + 1$, функции Розенброка (Rosenbrock4): $f_{RB4} = 100(x^2 – y^2)^2 + (x – 1)^2$ [6]. Утверждение прежнее – естественное интервальное расширение в основном позволяет получать более качественную оценку. Лишь на интервалах, чья ширина очень мала, среднезначная форма значительно чаще дает более точный результат. Здесь мы приводим лишь график для четырех функций (тех, что могут быть построены в одном масштабе) на рис. 4.

Следующий эксперимент, проделанный нами, заключается в дроблении исходной области определения [-10, 10]x[-10, 10] последовательно на 2, 4, 8, 16, … , 2 048 одинаковых подбрусов, равномерно покрывающих начальную область определения и сравнение ширины интервальных оценок. Результаты приведены в виде графиков на рисунках 5 и 6. Графики усредненной ширины интервальной оценки по всем брусам не показательны – из них не понятно поведение на малых брусах (рис. 5), так что мы приводим графики суммы интервальных оценок по всем брусам. Видно, что на достаточно крупных брусах предпочтительнее использовать естественное интервальное расширение. При уменьшении характерного размера брусов для большинства (но далеко не для всех!) целевых функций среднезначная форма позволяет получить более точные оценки.

Мы можем рекомендовать использовать естественное интервальное расширение для оценки области значения большинства функций на достаточно протяженных областях. Для оценки области значений функций на узких интервалах можно использовать среднезначное интервальное расширение. Стоит учитывать, что вычисление среднезначного интервального расширения сложнее вычисления естественного расширения, в то время как их погрешность на малых брусах сравнима и весьма невелика по сравнению с оценкой на больших областях (рис. 6). Для получения более точных оценок на различных интервалах можно брать их пересечение. Кроме того, можно обратиться, например, к бицентрированной форме.

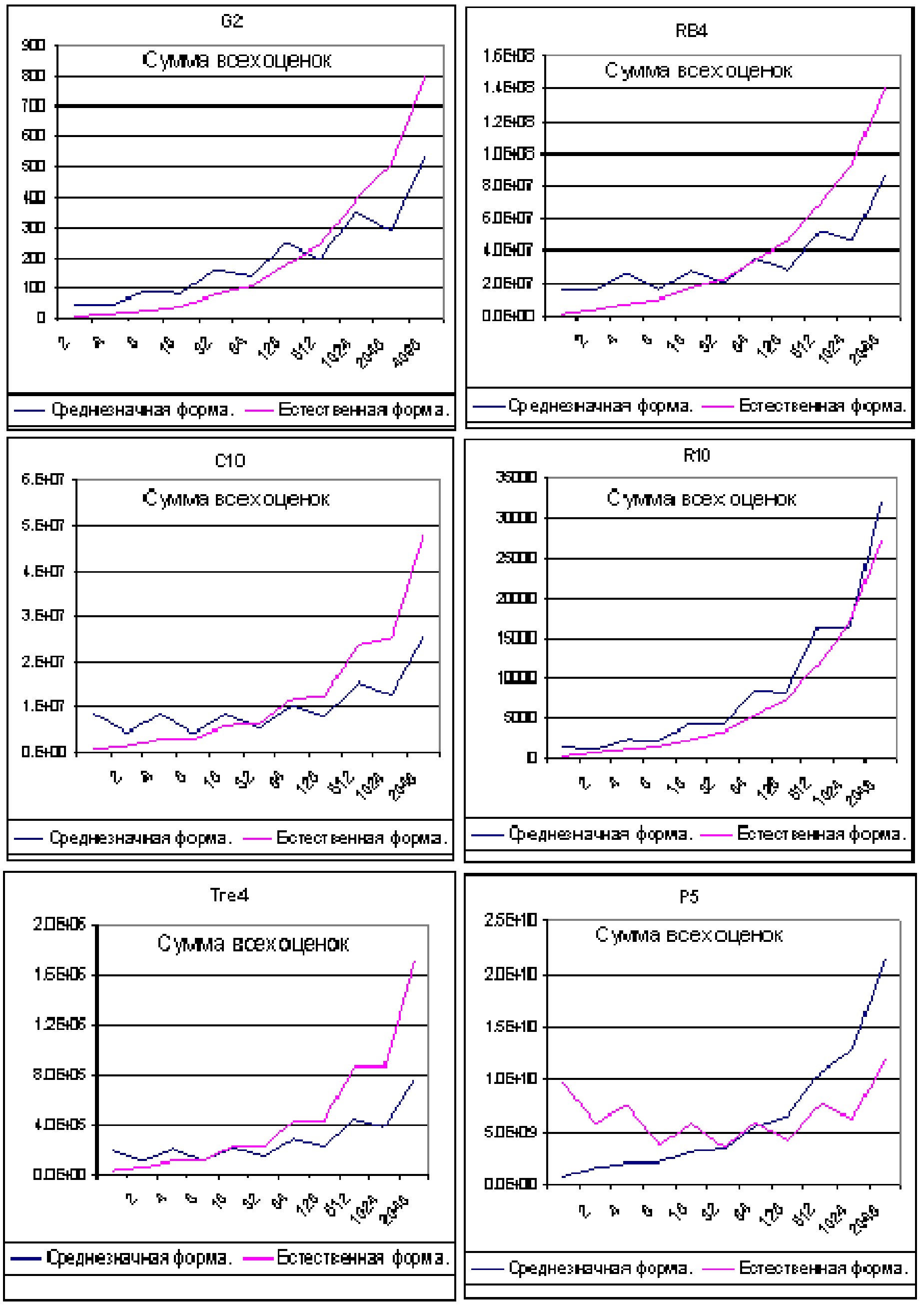


Рис. 6. Избыточность среднезначного и естественного интервального расширений

Список литературы

1. Евтушенко, Ю.Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций. / Ю.Г Евтушенко // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1971. – Т. 11. – №6.

2. Жиглявский, А.А. Методы поиска глобального экстремума. / А.А Жиглявский, А.Г. Жилинскас.– М. : Наука, 1991.

3. Левитин, А.В. Алгоритмы: разработка и анализ. / А.В. Левитин. – М. : «Вильямс», 2006.

4. Панов, Н.В. Стохастические подходы в интервальных методах глобальной оптимизации. / Н.В Панов, С.П.Шарый // Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям ИНТЕРВАЛ-06, 1–4 июля 2006 года, Петергоф, Россия. Расширенные тезисы докладов. – Санкт-Петербург: ВВМ, 2006.–С. 101–105.

5. Ali, M. Stochastic Global Optimization: Problem, Classes and Solution Techniques / M Ali, A. Trn, S. Viitanen // J. of Global Optimization 14, 1999. – P. 437–447.

6. Janson, C. A Global Minimization Method. / C. Janson, Knuppel O. // Berichte des Forschungsschwerpunktes Informations und Kommunikationstechnik, 1992.

7. Hansen, E. Global optimization using interval analysis. / E. Hansen, G. Walster– New York: Marcel Dekker, 2004.

8. Kearfott, R. Rigorous Global Search: Continuous Problems. / R. Kearfott. – Kluwer Academic Publishers, 1996.

9. Moore, R. Interval Analysis. / R. Moore– New Jersey, Prentice-Hall, 1966.

Range Evaluation through Interval Analysis

N.V. Panov

Institute of Computation Technologies, Novosibirsk

Key words and phrases: interval analysis; interval expandability; interval evaluation.

Abstract: The paper deals with comparing the accuracy of range evaluation through interval analysis. The calculation of this evaluation can be used in solution of different tasks. The paper describes the ways of designing interval expansions and numerical experiments for various objective functions.
