

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТЕЙ ТРЕХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ

М.А. Аматов, Г.М. Амадова, И.С. Кузнецова

*ГОУ ВПО «Белгородский государственный университет»,
г. Белгород*

Рецензент И.Н. Дрогобыцкий

Ключевые слова и фразы: автоколебания; динамика численности популяций; дифференциальные уравнения; особые точки; разрывные правые части; скользящие режимы; «хищник-жертва».

Аннотация: Исследуется математическая модель, описывающая динамику численностей трех популяций, из которых одна популяция – хищник питается двумя другими. Использование теоретического аппарата дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями позволило доказать, что при условии существования скользящих режимов в указанных системах всегда возможно установление устойчивых периодических колебаний.

Основными факторами, влияющими на динамику биологических популяций, являются, как известно, внутривидовая конкуренция, межвидовая конкуренция и хищничество. Их анализу посвящено большое число работ [1–7]. Однако из курсов экологии [9] известно, что воздействие только хищника на популяции (без конкуренции) способно стабилизировать их численность, не доводя ни одну до полного исчезновения. В таком случае имеет смысл говорить о регулирующей роли хищника, питающегося несколькими видами.

Далее, используя «гипотезу встреч» [2, 134] и методику В. Вольтера [1], составим систему дифференциальных уравнений (1), описывающую динамику биологических популяций в рассматриваемом случае. В этой системе a, b, c, d, e, h, g – положительные константы, x и y – численности популяций жертв, а z – численность хищника.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot (a - b \cdot z), \\ \frac{dy}{dt} = y \cdot (c - d \cdot z), \\ \frac{dz}{dt} = z \cdot (-e + h \cdot x + g \cdot y) \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) имеет три особые точки $M_0(0, 0, 0)$, $M_1\left(0, \frac{e}{g}, \frac{c}{d}\right)$, $M_2\left(\frac{e}{h}, 0, \frac{a}{b}\right)$. Точка M_0 типа седло-узел [12], так как в ней корни характеристического уравнения системы (1) действительные и различных знаков: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = c$, $\lambda_3 = -e$. В точках M_1 и M_2 имеем по одному действительному корню характеристического уравнения и два корня чисто мнимые. В точке M_1 они равны:

$$\lambda_1 = \frac{ad - bc}{d}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i \cdot \sqrt{ce}, \quad \lambda_1 = \frac{bc - ad}{b}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i \cdot \sqrt{ae}$$

Очевидно, что знаки действительных корней в точках M_1 и M_2 зависят от знака определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

. При этом, если в одной из этих точек знак действительного корня положителен, то есть точка неустойчива, то в другой знак действительного корня отрицателен – и в этой точке имеет место особенный случай неасимптотической устойчивости [13, 176].

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$$

Предположим для определенности, что $\Delta = ad - bc < 0$. Тогда точка M_1 устойчива, а точка M_2 неустойчива.

$$V = \frac{y}{x^{\frac{c}{a}}}$$

Рассмотрим функцию $V = \frac{y}{x^{\frac{c}{a}}}$. Поверхности уровня этой функции представляют собой

семейство параболических цилиндров $y = C \cdot x^{\frac{c}{a}}$ ($C > 0$), которые при $C \rightarrow +\infty$ прижимаются к плоскости xoy , а при $C \rightarrow 0$ к плоскости xoz . Вычислим производную от функции V в силу уравнений системы (1):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\frac{c}{x^{\frac{c}{a}}} \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{c}{a} \cdot x^{\frac{c}{a}-1} \cdot \frac{dx}{dt}}{\frac{2a}{x^{\frac{c}{a}}}} = \frac{\frac{c}{x^{\frac{c}{a}}} \cdot y \cdot (c-d \cdot z) - y \cdot \frac{c}{a} \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot (a-b \cdot z)}{\frac{2a}{x^{\frac{c}{a}}}} = -\frac{\Delta}{a} \cdot \frac{yz}{x^{\frac{c}{a}}}$$

$$\frac{dV}{dt} > 0$$

Поскольку $\frac{dV}{dt} > 0$ всюду в области $\check{Y}^3_+ = \{(x,y,z) | x > 0, y > 0, z > 0\}$,

(т.е. в первом октанте), то изображающая точка движется по траекториям системы (1) пересекая поверхности уровня в сторону возрастания параметра C , то есть в направлении от плоскости xoz к плоскости xoy .

На рис. 1, для значений параметров $a=3, b=2, c=6, d=1, h=1, \xi=2, \Delta=-9$ изображена траектория системы (1), начинающаяся в точке $A(3,2; 0,01; 4)$. Легко видеть, что при $t \rightarrow +\infty$ траектория навивается на предельный цикл, лежащий в плоскости xoy . В общем случае все траектории системы (1), начинающиеся в точках области \check{Y}^3_+ , ведут себя подобным образом, и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

значит $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. Последнее означает, что из двух популяций жертвы численность одной стремится к нулю, то есть система (1) является математической моделью частного случая системы типа хищник-жертва, когда воздействие хищника приводит к гибели одной из популяций.

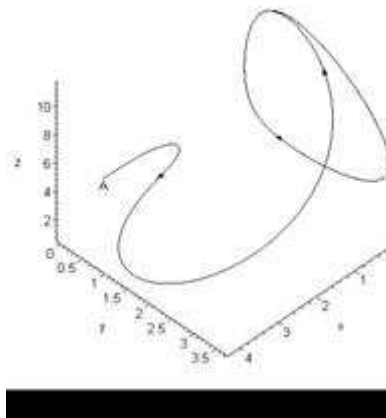


Рис. 1

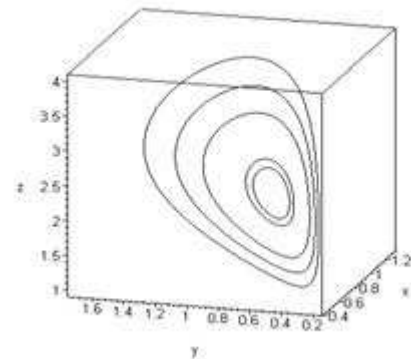


Рис. 2

Вид системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику взаимодействующих популяций, может быть определен только приближенно и на основе экспериментальных данных. В обстоятельной работе [5], посвященной рассматриваемой проблеме, отмечается единственная статья [8], содержащая результаты эксперимента. Что же касается всех остальных работ, то о них сказано следующее: «к сожалению, выбранные авторами знаки коэффициентов не допускают экологической интерпретации» [5,189]. Да и наличие большого числа экспериментальных данных не облегчает задачу исследования, поскольку ведет к росту степеней аппроксимирующих многочленов и, соответственно, к значительному усложнению самой системы уравнений.

Однако определенные выводы качественного характера относительно вида таких систем и поведения их траекторий можно сделать чисто теоретически, исходя из относительно простой системы дифференциальных уравнений (1). С этой целью используем прием, впервые примененный А.А. Александровым при исследовании колебаний тока в ламповом генераторе в случае Z-характеристики [14,190]. Суть этого метода заключается в замене экспериментально

определяемой функции на разрывную функцию, а непрерывного дифференциального уравнения – на уравнение с кусочно-непрерывными правыми частями.

Пусть область \mathbb{Y}^3_+ разбивается некоторой гладкой поверхностью S , проходящей через ось oz , на две части G^+ и G^- , и рассматриваемая система дифференциальных уравнений терпит на поверхности S разрыв, а в каждой из областей G^+ и G^- имеет вид системы (1), но с различными коэффициентами. Будем считать, что в области G^- , заключенной между плоскостью xoz и поверхностью S , динамика численностей популяций задается системой дифференциальных уравнений (2), а в области G^+ между плоскостью yoz и поверхностью S – системой (3):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot (a - b_1 \cdot z), \\ \frac{dy}{dt} = y \cdot (c - d_1 \cdot z), \\ \frac{dz}{dt} = z \cdot (-e + h_1 \cdot x + g_1 \cdot y) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot (a - b_2 \cdot z), \\ \frac{dy}{dt} = y \cdot (c - d_2 \cdot z), \\ \frac{dz}{dt} = z \cdot (-e + h_2 \cdot x + g_2 \cdot y) \end{cases} \quad (3)$$

Здесь a, c, e – коэффициенты прироста популяций [1, 11], поэтому естественно считать их одинаковыми для обеих систем (2) и (3). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $a > c$. На коэффициенты b_i, d_i ($i=1, 2$) наложим условия:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{vmatrix} = ad_1 - b_1c < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{vmatrix} = ad_2 - b_2c > 0, \quad (4)$$

из которых легко выводится неравенство:

$$\frac{b_2}{d_2} < \frac{a}{c} < \frac{b_1}{d_1}. \quad (5)$$

Если учесть, что в области G^- вблизи плоскости xoz , имеет место неравенство $y < x$, а в области G^+ вблизи плоскости yoz – неравенство $x < y$, то становится ясным биологический смысл неравенства (5) – *интенсивней истребляется хищником та из двух популяций, численность которой больше*. Последнее утверждение вполне согласуется с гипотезой встреч, а значит, описанная постановка задачи вполне оправдана.

Поведение траекторий системы (2), (3) существенно зависит от выбора поверхности S . В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением поверхностей разрыва следующих двух видов:

$$y = C_0 \cdot x^{\frac{e}{a}} \quad (C_0 > 0) \quad \text{и} \quad y = x.$$

I. Сначала исследуем случай, когда система дифференциальных уравнений, описывающая динамику численностей указанных выше популяций, терпит разрыв на параболическом цилиндре

$$S: y = C_0 \cdot x^{\frac{e}{a}} \quad (C_0 = \text{const} > 0, x > 0). \quad \text{В этом случае:}$$

$$G^- = \left\{ (x, y, z) \mid 0 < x < +\infty, \quad 0 < y < C_0 \cdot x^{\frac{e}{a}}, \quad 0 < z < +\infty \right\},$$

$$G^+ = \left\{ (x, y, z) \mid 0 < x < +\infty, \quad C_0 \cdot x^{\frac{e}{a}} < y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty \right\}.$$

Всюду в дальнейшем популяцию жертвы, численность которой обозначена через x , будем называть первой, а ту, что через y – второй. Решения системы дифференциальных уравнений (2), (3) с разрывными правыми частями будем понимать в смысле А.Ф. Филиппова [10,11].

Покажем, что в рассматриваемом случае поверхность S параболического цилиндра

$y = C_0 \cdot x^{\frac{e}{a}}$ является поверхностью скользких движений. С этой целью, рассмотрим векторы, касательные к траекториям систем (2), (3):

$$\vec{f}_1 = x \cdot (a - b_1 \cdot z) \cdot \vec{i} + y \cdot (c - d_1 \cdot z) \cdot \vec{j} + z \cdot (-e + h_1 \cdot x + g_1 \cdot y) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{f}_2 = x \cdot (a - b_2 \cdot z) \cdot \vec{i} + y \cdot (c - d_2 \cdot z) \cdot \vec{j} + z \cdot (-e + h_2 \cdot x + g_2 \cdot y) \cdot \vec{k}.$$

Предельными значениями векторов \vec{f}_1 и \vec{f}_2 при приближении к любой точке поверхности $\mathcal{F} = C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}}$ из областей G^- и G^+ являются соответственно:

$$\vec{f}^- = x \cdot (a - b_1 \cdot z) \cdot \vec{i} + C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot (c - d_1 \cdot z) \cdot \vec{j} + z \cdot (-e + k_1 \cdot x + g_1 \cdot C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}}) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{f}^+ = x \cdot (a - b_2 \cdot z) \cdot \vec{i} + C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot (c - d_2 \cdot z) \cdot \vec{j} + z \cdot (-e + k_2 \cdot x + g_2 \cdot C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}}) \cdot \vec{k}.$$

За положительное направление нормали к S принимается направление от G^- к G^+ . Находя единичный вектор нормали к поверхности S в указанном направлении и проектируя на него векторы \vec{f}^- и \vec{f}^+ , получаем следующие выражения для проекций f_n^- , f_n^+ и их разности $f_n^- - f_n^+$:

$$f_n^- = -\frac{C_0 \cdot \Delta_1 \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot z}{a \sqrt{C_0^2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{c}{a} - 1\right) + 1}}, \quad f_n^+ = -\frac{C_0 \cdot \Delta_2 \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot z}{a \sqrt{C_0^2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{c}{a} - 1\right) + 1}}, \quad f_n^- - f_n^+ = \frac{C_0 \cdot (\Delta_2 - \Delta_1) \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot z}{a \sqrt{C_0^2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{c}{a} - 1\right) + 1}}$$

Учитывая неравенства (4), имеем: $f_n^- > 0$, $f_n^+ < 0$ и $f_n^- - f_n^+ > 0$ всюду в \mathcal{U}_+^3 , а значит S - поверхность скользящих движений. Уравнения скользящих движений, как известно, в векторной форме имеют вид:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f}^0(t, \vec{r}), \quad \text{где } \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad \vec{f}^0 = \alpha \cdot \vec{f}^+ + (1 - \alpha) \cdot \vec{f}^-,$$

$$\alpha = \frac{f_n^-}{f_n^- - f_n^+}. \quad (6)$$

Подставляя в эти формулы ранее найденные значения, получим:

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 - \Delta_2}, \quad \vec{f}^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot \vec{f}^- - \frac{\Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot \vec{f}^+$$

$$\vec{f}^0 = x \cdot \left(a + \frac{\Delta_1 b_2 - \Delta_2 b_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot z \right) \cdot \vec{i} + C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot \left(c + \frac{\Delta_1 d_2 - \Delta_2 d_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot z \right) \cdot \vec{j} +$$

$$z \cdot \left(-e + \frac{\Delta_2 k_1 - \Delta_1 k_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot x + \frac{\Delta_2 g_1 - \Delta_1 g_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}} \right) \cdot \vec{k}$$

Теперь запишем уравнения скользящих движений в координатной форме:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot \left(a + \frac{\Delta_1 b_2 - \Delta_2 b_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot z \right), \\ \frac{dy}{dt} = C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}} \cdot \left(c + \frac{\Delta_1 d_2 - \Delta_2 d_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot z \right), \\ \frac{dz}{dt} = z \cdot \left(-e + \frac{\Delta_2 k_1 - \Delta_1 k_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot x + \frac{\Delta_2 g_1 - \Delta_1 g_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}} \right). \end{cases} \quad (7)$$

Поверхность S взаимно однозначно проектируется в плоскость hoz . Проекции траекторий скользящих движений на плоскость hoz удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot \left(a + \frac{\Delta_1 b_2 - \Delta_2 b_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot z \right), \\ \frac{dz}{dt} = z \cdot \left(-e + \frac{\Delta_2 k_1 - \Delta_1 k_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot x + \frac{\Delta_2 g_1 - \Delta_1 g_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}} \right). \end{cases} \quad (8)$$

В силу неравенств (4) имеем:

$$\frac{\Delta_1 b_2 - \Delta_2 b_1}{\Delta_2 - \Delta_1} < 0, \quad \frac{\Delta_2 h_1 - \Delta_1 h_2}{\Delta_2 - \Delta_1} > 0, \quad \frac{\Delta_2 g_1 - \Delta_1 g_2}{\Delta_2 - \Delta_1} > 0 \quad (9)$$

Траектории системы уравнений (8) удовлетворяют уравнению

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z \cdot \left(-e + \frac{\Delta_2 h_1 - \Delta_1 h_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot x + \frac{\Delta_2 g_1 - \Delta_1 g_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}} \right)}{x \cdot \left(a + \frac{\Delta_1 b_2 - \Delta_2 b_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot z \right)}$$

которое после разделения переменных интегрируется в элементарных функциях.

Учитывая неравенства (9), легко доказать, что все траектории системы (8) замкнутые кривые. Естественно, что и траектории системы (7), лежащие на параболическом цилиндре

$y = C_0 \cdot x^{\frac{c}{a}}$ замкнуты. На рис. 2 приведено несколько траекторий системы (7) при следующих значениях параметров: $c_0=1$; $a=3$; $c=6$; $b_1=2$; $d_1=1$; $h_1=1$; $g_1=2$, $\Delta_1=-9$, $b_2=1$, $d_2=4$, $\Delta_2=6$, $h_2=2$, $g_2=3$.

Из неравенств (4) следует, что производная $\frac{dV}{dt}$ от функции $V = \frac{y}{x^{\frac{c}{a}}}$ в области G^- положительна, а в области G^+ отрицательна. Отсюда легко выводится, что изображающая точка любой траектории, начинающейся в \check{Y}^3_+/S , достигает поверхности S за конечное время, после чего продолжает движение по замкнутой траектории скользящих движений, оставаясь на поверхности S . При этом следует иметь в виду, если в процессе колебаний какая-либо из функций $x(t)$, $y(t)$ или $z(t)$ становится достаточно малой, то в большинстве случаев это означает вымирание соответствующей популяции.

На рис.3 изображены две траектории разрывной системы (2), (3), начинающиеся в точках $A(3,1; 0,5; 2)$ и $B(3,1; 1; 3)$ области G^- . Значения параметров в уравнениях (2),(3) те же, что и на рис. 2.

II. Теперь рассмотрим случай, когда поверхностью разрыва системы (2), (3) служит часть плоскости $y=x$, лежащая в области \check{Y}^3_+ . В этом случае:

$$G^- = \{(x, y, z) | 0 < x < +\infty, 0 < y < x, 0 < z < +\infty\},$$

$$G^+ = \{(x, y, z) | 0 < x < +\infty, x < y < +\infty, 0 < z < +\infty\}.$$

Очевидно, что в области G^- численность первой популяции превосходит численность второй, а в области G^+ наоборот – численность второй превосходит численность первой. Переход изображающей точки траектории системы (2), (3) из одной области в другую с точки зрения биологии означает – как только численность одной из популяций превосходит численность другой, она сразу же начинает превалировать в рационе хищника.

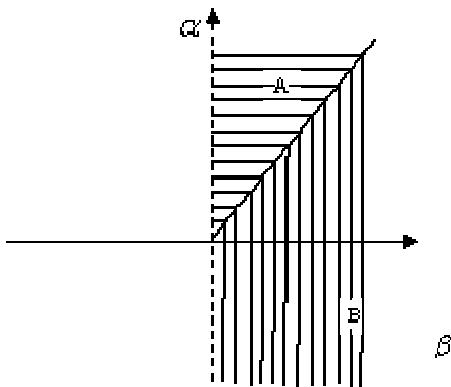


Рис. 3

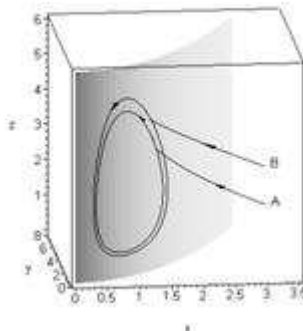


Рис. 4

Далее, проведя вычисления, аналогичные вышерассмотренным, получим:

$$\vec{f}^- = x \cdot (a - b_1 \cdot z) \cdot \vec{i} + x \cdot (c - d_1 \cdot z) \cdot \vec{j} + z \cdot [-e + (h_1 + g_1) \cdot x] \cdot \vec{k},$$

$$\begin{aligned} \vec{f}^+ &= x \cdot (a - b_2 \cdot z) \cdot \vec{i} + x \cdot (c - d_2 \cdot z) \cdot \vec{j} + z \cdot [-e + (b_2 + g_2) \cdot x] \cdot \vec{k}, \\ \vec{n} &= -\vec{i} + \vec{j}, \quad \dot{\vec{n}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \quad f_n^- = \frac{x}{\sqrt{2}}[c - a + (b_1 - d_1) \cdot z], \\ f_n^+ &= \frac{x}{\sqrt{2}}[c - a + (b_2 - d_2)z], \quad f_n^- - f_n^+ = \frac{x \cdot z}{\sqrt{2}}[b_1 - d_1 - (b_2 - d_2)] \end{aligned}$$

Выясним наличие и вид областей скользящих движений на плоскости разрыва $y = x$ в пределах области \check{Y}^3_+ . Как доказано в [10,11], условия существования скользящих движений записываются в виде: $f_n^- \geq 0$, $f_n^+ \leq 0$ и $f_n^- - f_n^+ > 0$. Учитывая приведенные выше формулы, имеем:

$$\begin{cases} f_n^- \geq 0, \\ f_n^+ \leq 0, \\ f_n^- - f_n^+ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - a + (b_1 - d_1) \cdot z \geq 0, \\ c - a + (b_2 - d_2)z \leq 0, \\ b_1 - d_1 > b_2 - d_2. \end{cases} \quad (10)$$

Последнее из неравенств (10) является следствием двух первых и показывает, что хотя бы одно из них должно быть строгим. Кроме того, разность $b_1 - d_1$ должна быть строго положительной, так как одновременное выполнение неравенства $b_1 - d_1 \leq 0$ и принятого по условию неравенства $\Delta_1 < 0$ ведёт к противоречию.

Исследуем систему неравенств (10) с учётом того, что $b_1 - d_1 > 0$.

а) Пусть $b_1 - d_1 > b_2 - d_2 > 0$. Тогда из первых двух неравенств (10) находим:

$$\frac{a-c}{b_1-d_1} \leq z \leq \frac{a-c}{b_2-d_2}.$$

Областью скользящих движений, в рассматриваемом случае является полоса

$$D^0 = \left\{ (x, y, z) \mid x > 0, y = x, \frac{a-c}{b_1-d_1} \leq z \leq \frac{a-c}{b_2-d_2} \right\}, \text{ лежащая в плоскости } y = x.$$

$$D^- = \left\{ (x, y, z) \mid x > 0, y = x, 0 < z \leq \frac{a-c}{b_1-d_1} \right\}$$

В точках полосы, находящейся под D^0 , происходит переход с траекторий системы (3) (с траекторий скользящих движений) на траектории системы (2), т.е. из области G^+ в область G^- , поскольку в точках этой области имеют место неравенства $f_n^- \leq 0$, $f_n^+ < 0$.

$$D^+ = \left\{ (x, y, z) \mid x > 0, y = x, \frac{a-c}{b_2-d_2} \leq z \right\}$$

В точках же области, лежащей над D^0 , происходит переход с траекторий системы (2) (с траекторий скользящих движений) на траектории системы (3), т.е. из области G^- в область G^+ , поскольку в точках этой области имеют место неравенства $f_n^- > 0$, $f_n^+ \geq 0$.

б) Если выполнено неравенство $b_1 - d_1 > b_2 - d_2 = 0$, то второе из неравенств (10) выполняется

всюду, а первое даёт $\frac{a-c}{b_1-d_1} \leq z$. Следовательно, область скользящих движений есть множество

$$D^0 = \left\{ (x, y, z) \mid x > 0, y = x, \frac{a-c}{b_1-d_1} \leq z \right\}$$

В точках области D^- , лежащей под D^0 изображающая точка переходит с траекторий системы (3) на траектории системы (2), т.е. из области G^+ в область G^- .

в) В случае выполнения неравенства $b_1 - d_1 > 0 > b_2 - d_2$ первые два из неравенств (10) дают:

$z \geq \frac{a-c}{b_1-d_1}$ и $z \geq \frac{a-c}{b_2-d_2}$, но поскольку $\frac{a-c}{b_2-d_2} < 0$, а мы ограничиваемся областью \check{Y}^3_+ , то остаётся

только первое из неравенств, и мы имеем ту же самую область скользящих движений, что и в предыдущем пункте.

г) При выполнении условия $b_2 - d_2 > b_1 - d_1 > 0$ последнее из неравенств (10) не выполняется, и в системе (2),(3) скользящих движений нет. Из первых двух неравенств следует, что через точки

области $D^- = \left\{ (x, y, z) \mid x > 0, y = x, 0 < z < \frac{a-c}{b_2-d_2} \right\}$ происходит переход с траекторий системы (3) на траектории системы (2), т.е. из области G^+ в область G^-

Через точки области $D^+ = \left\{ (x, y, z) \mid x > 0, y = x, \frac{a-c}{b_1-d_1} < z < 1 \right\}$ происходит переход с траекторий системы (2) на траектории системы (3), т.е. из

области G^- в область G^+ , а полоса $D^0 = \left\{ (x, y, z) \mid x > 0, y = x, \frac{a-c}{b_1-d_1} < z < \frac{a-c}{b_2-d_2} \right\}$ является полосой неустойчивости.

Рассмотренные четыре случая а) – г) исчерпывают все логически возможные соотношения между числами $b_1 - d_1$, $b_2 - d_2$ и 0 при условии $b_1 - d_1 > 0$.

Далее, введём обозначения $\alpha = b_1 - d_1$, $\beta = b_2 - d_2$. На рис.4. горизонтальной штриховкой помечена область A в плоскости (α, β) , для каждой точки которой система (2), (3) не имеет скользящих движений, а вертикальной штриховкой помечена область B , для точек которой существуют скользящие движения. Если под величиной каждой из областей A и B понимать величину полярного угла, в котором эта область содержится, то становится ясно, что три четверти систем (2), (3) имеют скользящие движения и лишь у одной четверти таких движений нет.

Найдём уравнения скользящих движений, по траекториям которых изображающая точка движется в пределах области $D^0 \neq \emptyset$. При этом, будем считать выполненным следующее дополнительное условие: $h_1 + g_1 = h_2 + g_2$. Последнее означает, что при изменении состава пищи, добываемой хищником, количество ее остается неизменным. Другими словами, цель хищника – получить необходимое количество пищи, и ни одна из жертв не является для него более предпочтительной.

Как и в пункте I, воспользовавшись формулами (6) и проведя несложные, но довольно громоздкие выкладки, получим:

$$\alpha = \frac{c - a + (b_1 - d_1)z}{[b_1 - d_1 - (b_2 - d_2)]z}, \quad 1 - \alpha = \frac{a - c + (d_2 - b_2)z}{[b_1 - d_1 - (b_2 - d_2)]z}$$

$$\dot{z} = x \cdot \left[\frac{a(d_2 - d_1) + c(b_1 - b_2)}{d_2 - d_1 + b_1 - b_2} - \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{d_2 - d_1 + b_1 - b_2} \cdot z \right] \cdot \dot{i} +$$

$$+ x \cdot \left[\frac{a(d_2 - d_1) + c(b_1 - b_2)}{d_2 - d_1 + b_1 - b_2} - \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{d_2 - d_1 + b_1 - b_2} \cdot z \right] \cdot \dot{j} +$$

$$z \cdot [-e + (h_1 + g_1) \cdot x] \cdot \dot{k}$$

Уравнения проекций траекторий скользящих движений на плоскость xoz запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot [A - B \cdot z], \\ \frac{dz}{dt} = z \cdot [-C + D \cdot x]. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь для краткости приняты обозначения:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}, \quad A = \frac{a(d_2 - d_1) + c(b_1 - b_2)}{d_2 - d_1 + b_1 - b_2}, \quad B = \frac{\Delta_3}{d_2 - d_1 + b_1 - b_2}, \quad C = e, \quad D = h_1 + g_1.$$

Особая точка $P_0(x_0, y_0)$ системы уравнений (11) имеет координаты:

$$x_0 = \frac{C}{D} = \frac{c}{h_1 + g_1}, \quad z_0 = \frac{a(d_2 - d_1) + c(b_1 - b_2)}{\Delta_3}.$$

Положительность коэффициентов C и D очевидна, так что $x_0 > 0$. Определим знаки остальных коэффициентов системы уравнений (11) и покажем, что $z_0 > 0$. По условию $\Delta_1 = ad_1 - b_1c < 0$, $-\Delta_2 = b_2c - ad_2 < 0$, складывая неравенства, получим:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = ad_1 - b_1c - (ad_2 - b_2c) = a(d_1 - d_2) + c(b_2 - b_1) < 0.$$

Тем самым справедливость неравенства $a(d_2 - d_1) + c(b_1 - b_2) > 0$ доказана.

Аналогично, раскрывая очевидное неравенство $b_1 \cdot \Delta_2 - b_2 \cdot \Delta_1 > 0$, имеем:

$$b_1 \cdot \Delta_2 - b_2 \cdot \Delta_1 = b_1 \cdot (a \cdot d_2 - c \cdot b_2) - b_2 \cdot (a \cdot d_1 - c \cdot b_1) =$$

$$= b_1 \cdot a \cdot d_2 - c \cdot b_1 \cdot b_2 - b_2 \cdot a \cdot d_1 + c \cdot b_1 \cdot b_2 = a(b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1) = a \cdot \Delta_3 > 0$$

Откуда и следует, что $\Delta_3 > 0$. Из доказанного и последнего из неравенств (10) сразу же вытекают неравенства $A > 0$, $B > 0$, и $z_0 > 0$.

Аналогично можно показать, что точка P_0 всегда лежит внутри области скользящих движений. Положительность коэффициентов A , B , C , D означает, что траектории системы (11) образуют семейство замкнутых кривых [1]. Но в таком случае в области D^0 скользящих движений обязательно найдется непустая ее часть G^0 , ограниченная некоторой замкнутой траекторией системы уравнений скользящих движений. Если изображающая точка какой-либо траектории разрывной системы (2), (3), в момент времени $t = t_0$ попадает в область G^0 , то в дальнейшем при всех $t \geq t_0$ она будет двигаться по некоторому циклу, лежащему в G^0 .

Рассмотрим систему (2), (3) для значений параметров $a = 7$, $c = 1$, $b_1 = 6.5$, $d_1 = 0.5$, $b_2 = 3$, $d_2 = 1$, $h_1 = g_2 = 1$, $g_1 = h_2 = 2$. Вычисляя величины α и β : $\alpha = b_1 - d_1 = 6.5 - 0.5 = 6$, $\beta = b_2 - d_2 = 3 - 1 = 2$, убеждаемся, что точка $(6; 2)$ лежит в области B (с вертикальной штриховкой на рис. 4) плоскости (α, β) . В этом случае область скользящих движений системы (2), (3) представляет собой полосу $D^0 = \{(x, y, z) | x > 0, y = x, 1 \leq z \leq 3\}$.

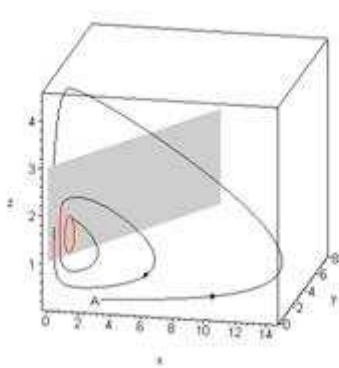


Рис. 5

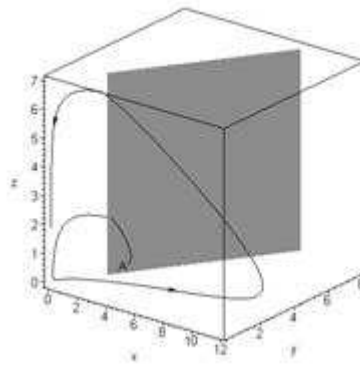


Рис. 6

Авторами данной статьи разработан пакет программ, позволяющих интегрировать системы дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями и строить траектории таких систем. Для разрывной системы (2), (3) с указанными значениями параметров с помощью одной из программ пакета, построена траектория, начинающаяся в точке $A(3; 1; 0.1)$. Эта траектория вместе с областью скользящих движений изображена на рис.5, из которого видно, что траектория заканчивается циклом, лежащим в области скользящих движений.

Рассмотрим теперь систему уравнений (2),(3) со значениями параметров $a = 2$, $c = 1$, $b_1 = 3$, $d_1 = 1$, $b_2 = 7$, $d_2 = 4$, $h_1 = g_2 = 1$, $g_1 = h_2 = 2$. Вычислив величины α и β : $\alpha = b_1 - d_1 = 3 - 1 = 2$, $\beta = b_2 - d_2 = 7 - 4 = 3$, видим, что точка $(2;3)$ лежит в области A плоскости (α, β) (с горизонтальной штриховкой на рис. 4). В этом случае, система (2), (3) не имеет скользящих движений.

Для этого случая траектория системы (2), (3), начинающаяся в точке $(3; 2; 0, 45)$, изображена на рис.6. Очевидно, траектория представляет собой раскручивающуюся спираль с неограниченно растущей амплитудой. Гибель всех популяций системы в этом случае очевидна.

Следует отметить, что и при наличии циклов на поверхности скольжения существуют траектории, для которых одна или несколько переменных в процессе колебаний становятся очень малыми, что означает гибель некоторых популяций.

Проведенное исследование позволяет сделать некоторые выводы.

1) В системе взаимодействующих популяций, в которой хищник питается двумя различными популяциями жертв, при подходящих значениях параметров, устанавливается устойчивый периодический режим.

2) Длительное время могут сосуществовать только такие сообщества, колебания численностей которых незначительно отклоняются от состояния равновесия. Если в результате внешнего воздействия амплитуда колебаний сильно возрастет, одна или несколько из взаимодействующих популяций могут погибнуть.

3) Рассмотренная система автономна, то есть в ней принято, что первичный источник энергии (солнечное излучение, вода, минералы) имеют непериодический характер. Следовательно, она представляет собой пример автоколебательной системы, так как за счет «непериодического источника энергии создает периодический процесс» [14,222].

Список литературы

1. Вольтера, В. Математическая теория борьбы за существование / В.Вольтера. – М. : Наука, 1976. – 286 с.
2. Свирежев, Ю.М. Устойчивость биологических сообществ / Ю.М.Свирежев, Д.О. Логофет. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
3. Пых, Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики / Ю.А. Пых. – М. : Наука, 1983. – 182 с.
4. Мари, Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии / Дж. Мари // Лекции о моделях: Пер. с англ. – М. : Мир, 1983. – 397 с.
5. Базыкин, А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.
6. Романовский, Ю.М. Математическое моделирование в биофизике / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский // Введение в теоретическую биофизику. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 472 с.
7. Ризниченко, Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии / Г.Ю. Ризниченко. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 98 с.
8. Paine, R.T. Food web complexity and species diversity / R.T. Paine // Amer. Natur., 1966, vol. 100, p. 65-75.
9. Одум, Ю. Основы экологии / Ю. Одум. – М. : Мир, 1975. – 498 с.
10. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.
11. Уткин, В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой / В.И. Уткин. – М. : Наука, 1974. – 272 с.
12. Бутенин, Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний / Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М. : Наука, 1976. – 384 с.
13. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М. : Наука, 1966. – 530 с.
14. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э.Хайкин. – М. : Наука, 1981. – 568 с.

Research in Mathematical Model for Dynamics of Three Interacting Populations

M.A. Amatov, G.M. Amatova, I.S. Kuznetsova

Belgorod State University, Belgorod

Key words and phrases: auto oscillations; population dynamics; differential equations; specific points; discontinuous right-hand sides; slide mode; predator-prey relationship.

Abstract: The paper studies the mathematical model, which describes the dynamics of the three species populations, one of which is the predator feeding on the two others. The theoretical application of differential equations with discontinuous right-hand sides enables to prove that in such systems it is possible to establish stable periodic oscillations under slide mode.

© М.А. Амагов, Г.М. Амагова, И.С. Кузнецова, 2009