ББК У053.34

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КАПИТАЛА И СПРОСА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИЗМЕНЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ В УСЛОВИЯХ САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ

Э.П. Агабекян

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент Б.И. Герасимов

Ключевые слова и фразы: саморазвивающаяся рыночная экономика; система дифференциальных уравнений; существование аттракторов; экономическая модель.

Аннотация: Исследованы модели движения капитала и спроса под воздействием изменения нормы прибыли в условиях саморазвивающейся рыночной экономики с помощью символьных вычислений в распределенной компьютерной среде для получения более точных результатов, чем ранее известные. Проведен анализ результатов исследования, и дано практическое значение данной модели.

1. Введение

В настоящее время, как известно, исследование реальных процессов, проистекающих в различных областях человеческой деятельности, невозможно без использования метода математического моделирования. Сказанное очевидным образом относится и к экономике. В частности, это относится к исследованию процессов в саморазвивающихся рыночных системах.

В книге [4] представлена распределенная модель саморазвивающейся рыночной экономики, которая представляет собой систему трех нелинейных дифференциальных уравнений, два из которых описывают изменение и интенсивность движения (диффузию) капитала и спроса в пространстве технологий под воздействием изменения нормы прибыли, которая описывается третьим обыкновенным дифференциальным уравнением.

В модели рассматривается неструктурированная замкнутая экономическая система, процесс развития которой происходит в конечномерном евклидовом пространстве R^n, называемом пространством технологий. Каждая точка *c* пространства R^n соответствует определенной технологии производства некоторого продукта и имеет своими координатами затраты $c_i, (i = 1,2,\ldots,n)$ ресурса *i* на единицу выпускаемого продукта.

В результате математических вычислений [4] получаем систему уравнений, описывающих изменения макропоказателей рыночной экономики во времени следующего вида:

$$\frac{d\widetilde{K}(t,c)}{dt} = (\nu - \mu)K + uC_T + I - R;$$

$$\frac{dD(t,c)}{dt} = C_L + C_K + G - R;$$

$$\frac{du(t,c)}{dt} = \alpha(D + M - Y - H);$$

$$\widetilde{K} = C_T + Y + M;$$

$$C_T = K + H;$$

$$R = C_K + G + I,$$

где $\widetilde{K}(t,c)$ – плотность распределения капитала в момент *t* в пространстве технологий, то есть стоимость капитала (суммарная стоимость производительного, товарного и денежного капиталов), задействованного предпринимателями в момент t в производстве некоторого потребительского продукта по технологии (по затратам) c и в производстве средств производства этого продукта; $C_T(t,c)$ – плотность распределения производительного (постоянного $K(t,c)$ и переменного $H(t,c)$) капитала предпринимателей; $Y(t,c)$ – плотность распределения товарного капитала предпринимателей, равная товарным запасам в момент t произведенного с затратами c потребительского продукта и средств для его производства; $M(t,c)$ – плотность распределения денежного капитала предпринимателей (платежеспособный спрос предпринимателей на средства производства и рабочую силу для производства продукции по технологии c); $D(t,c)$ – платежеспособный спрос предпринимателей, трудящихся и государства на произведенный по технологии c продукт; $u(t,c)$ – распределение нормы прибыли в момент t в пространстве технологий; $R(t,c)$ – текущее потребление предпринимателями, трудящимися и государством потребительских товаров, произведенных по технологии c; I – часть средств, вырученных предпринимателями от продажи, идущая на накопление; C_K и G – источники формирования платежеспособного спроса предпринимателей и государства на потребительские товары, произведенные по технологии c; C_L – источник платежеспособного спроса трудящихся; α, ν и μ – некоторые константы.

Полученная выше система сводится авторами к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= bx((1-\sigma)z - \delta y); \\ \dot{y}(t) &= x(1-(1-\delta)y + \sigma z); \\ \dot{z}(t) &= a(y - dx), \end{aligned} \tag{1.1}$$

с фиксированными значениями трех параметров: a = 7; b = 0,4; d = 1,17, где $x = \dfrac{\beta\eta}{1+\theta+\eta}\tilde{K}$; $y = \dfrac{\beta\eta(1+\gamma)}{\omega\theta}D$; $z = \dfrac{1+\gamma}{\omega}u$ (β и ω – некоторые константы; $\gamma = \dfrac{K}{H}$; $\eta = \dfrac{Y}{M}$; $\theta = \dfrac{C_T}{M}$); $a = \dfrac{\alpha\theta}{\beta\eta}$; $b = \dfrac{\omega\theta}{(1+\theta+\eta)(1+\gamma)}$; $d = \dfrac{\theta + (\eta-1)(1+\gamma)}{\omega\theta}$; δ и σ – некоторые константы.

Цель настоящей работы – исследование модели движения капитала и спроса под воздействием изменения норм прибыли в условиях саморазвивающейся рыночной экономики с помощью символьных вычислений в распределенной компьютерной среде, что должно позволить получить более точные результаты, чем ранее известные.

2. Алгоритм построения решений модели движения капитала и спроса под воздействием изменения норм прибыли в условиях саморазвивающейся рыночной экономики

Преобразуем систему (1.1) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= b(1-\sigma)xz - b\delta xy, \\ \dot{y}(t) &= x - (1-\delta)xy + \sigma xz, \\ \dot{z}(t) &= ay - adx \end{aligned} \tag{2.1}$$

Будем отыскивать решения системы (2.1) в виде рядов:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (t-t_0)^i; \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (t-t_0)^i; \\ z(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (t-t_0)^i, \end{aligned} \tag{2.2}$$

причем коэффициенты α_0, β_0 и γ_0 определяются по начальным условиям, т.е.:

$$\alpha_0 = x_0;$$

$$\beta_0 = y_0;$$

$$\gamma_0 = z_0,$$

где x_0, y_0 и z_0 – задаются, а число t_0 можно выбрать произвольно в силу автономности системы (1.1).

Применяя процедуру символьного дифференцирования, описанную в работах [3, 5], для расчета коэффициентов степенных рядов можно отыскать решения нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с заданной точностью в распределенной вычислительной среде. Однако ввиду того, что система (1.1) имеет полиноминальную правую часть, попытаемся получить формулы для расчета коэффициентов (2.2), чтобы сократить объем символьных вычислений. Для этого продифференцируем (2.2):

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\alpha_{i+1}(t-t_0)^i;$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=o}^{\infty} (i+1)\beta_{i+1}(t-t_0)^i;$$

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\gamma_{i+1}(t-t_0)^i.$$

Далее найдем произведения степенных рядов в форме Коши:

$$xz = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \alpha_j \gamma_{i-j} (t-t_0)^i;$$

$$xy = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \alpha_j \beta_{i-j} (t-t_0)^i.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, из системы (1.1) получаем рекуррентные соотношения для расчета коэффициентов рядов (2.2):

$$\alpha_{i+1} = \frac{b(1-\sigma)\sum_{j=0}^{i}\alpha_j\gamma_{i-j} - b\delta\sum_{j=0}^{i}\alpha_j\beta_{i-j}}{i+1};$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\alpha_i - (1-\delta)\sum_{j=0}^{i}\alpha_j\beta_{i-j} + \sigma\sum_{j=0}^{i}\alpha_j\gamma_{i-j}}{i+1};$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{a\beta_i - ad\alpha_i}{i+1}. \tag{2.3}$$

Несмотря на то что правая часть системы (1.1) всюду аналитична, радиус Δt сходимости рядов (2.2) ограничен. Численный эксперимент показал, что $\Delta t = 0{,}01$ для $r \in [14{,}350]$; $\sigma = 10$ и $b = \frac{8}{3}$. Поэтому данным методом мы можем получить только часть траектории.

Чтобы построить дугу L траектории системы Лоренца на отрезке времени $[0, T]$, где T – задается, рассмотрим множество точек T_k, причем:

$$T_k = k\Delta t,\ k = \overline{0,q},\ q = \operatorname{round}\frac{T}{\Delta t},$$

где round $a = a$, если a – целое; round $a = [a] + 1$ – в противном случае, делящих отрезок $[0, T]$ на отрезки $[T_{m-1}, T_m]\ (m = \overline{1,q})$ сходимости рядов (2.2). Для первого отрезка времени (при $m = 1$) мы задаем начальное условие x_0, y_0 и z_0 для момента времени $t_0 = T_0$. По формулам (2.3) вычисляем

α_i, β_i и γ_i до такого значения i, при котором имеет место оценка для заданной точности ε_c вычислений

$$\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}\,\Delta t^i < \varepsilon_c .$$

Обозначим полученные полиномы $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ для $m = 1$ через $x_1(t)$, $y_1(t)$ и $z_1(t)$ соответственно. Далее переходим к аналогичному расчету коэффициентов полиномов $x_2(t)$, $y_2(t)$ и $z_2(t)$, принимая:

$$t_0 = T_1;$$
$$x_0 = x_1(T_1);$$
$$y_0 = y_1(T_1);$$
$$z_0 = z_1(T_1).$$

В общем случае для m-го отрезка времени имеем условия:

$$t_0 = T_{m-1};$$
$$x_0 = x_{m-1}(T_{m-1});$$
$$y_0 = y_{m-1}(T_{m-1});$$
$$z_0 = z_{m-1}(T_{m-1}),$$

определяющие функции $x_m(t), y_m(t)$ и $z_m(t)$.

Обозначим через $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ функции, описывающие дугу L и составленные из функций $x_m(t), y_m(t)$ и $z_m(t)$ соответственно.

Графическое представление дуги L будем осуществлять в проекции на плоскость $x0y$. Для этого удобно использовать пакет символьных вычислений Maxima [7], развернутый в операционной системе Linux.

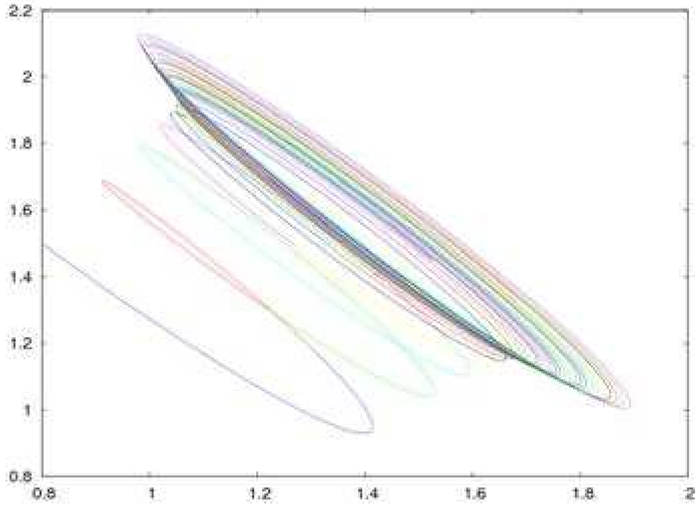
После того как произведен расчет коэффициентов полиномов $x_m(t)$ и $y_m(t)$, формируются символьные выражения для этих функций, которые потом записываются в соответствующие массивы строк m-й строкой. После завершения процедуры формирования символьных выражений для всех частей, из которых последовательно будет составлена результирующая дуга L, формируются символьные выражения для функций $X(t)$ и $Y(t)$, используя оператор if пакета Maxima. Все эти действия осуществляются в программе, разработанной на языке C++. Затем программа записывает в текстовый файл полученные выражения для $X(t)$ и $Y(t)$ и вызов функции plot2d пакета Maxima для построения кривой, заданной в параметрическом виде. Далее в программе вызывается команда maxima с использованием перенаправления ввода данных (как интерфейс взаимодействия с пакетом) для передачи данных пакету из полученного текстового файла.

Заметим, что идея такой реализации символьных вычислений использовалась в работе [5] для осуществления символьного дифференцирования и расчета значений производных.

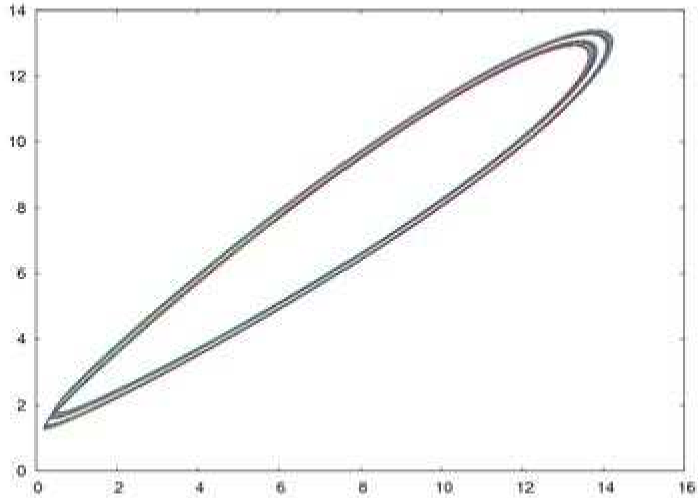
3. Результаты вычислений

Было проведено исследование поведения многих решений системы (1.1) для классических значений ее параметров (исследование проводилось с помощью программы, представленной в [6]). Вычисления показали, что гипотеза существования аттракторов в системе (1.1) вызывает сомнения. При одних и тех же значениях параметров, применяемых нами и авторами в работе [4], результаты получались не соответствующими друг другу.

Более наглядно это подтверждают графики функций, приведенные на рис. 1, *а–в*.



а)

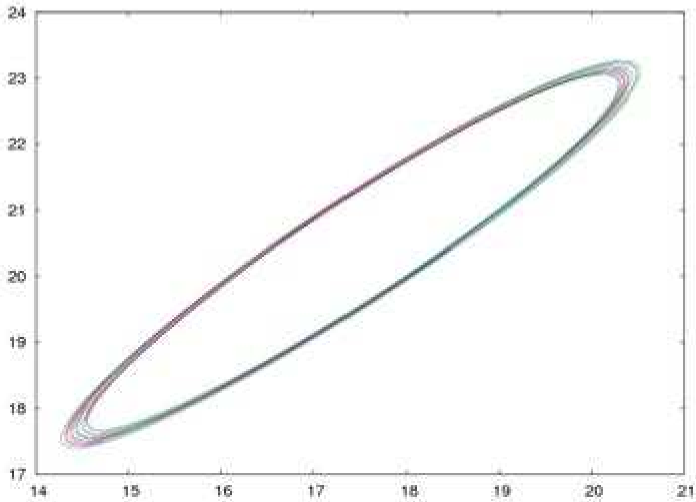


б)

Рис. 1. Проекция на плоскость (x, y) – (капитал, платежеспособный спрос) решения системы (1.1) при:

а – $\delta = 0{,}7$; $\sigma = -1$; $x = 0{,}8$; $y = 1{,}5$; $z = 0{,}9$;

б – $\delta = 0{,}65$; $\sigma = 0{,}266$; $x = 0{,}87$; $y = 1{,}63$; $z = -5{,}63$



в)

Рис. 1. Продолжение:

в – $\delta = 0{,}681$; $\sigma = 0{,}284$; $x = 20{,}4$; $y = 22{,}7$; $z = 21{,}2$

Несложный анализ приведенных графиков показывает, что в любом случае в системе не наблюдается существование аттракторов. Последнее хорошо согласуется с известными фактами экономической теории и подтверждает гипотезу о том, что подобными экономическими моделями можно пользоваться на некоторых, достаточно коротких промежутках времени.

Использование данной модели на больших промежутках времени требует постоянной коррекции параметров системы (2.1). Последнее предполагает идентификацию системы с последующей процедурой адаптации этих параметров. При выполнении этих условий становится возможным использование модели для решения задачи оптимального управления на любых промежутках времени.

Список литературы

1. Афанасьев, А.П. Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба. – М. : Эдиториал УРСС, 2007. – 240 с.
2. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонович. – М. : Наука, 1990. – 488 с.
3. Емельянов, С.В. Проблемы вычислений в распределенной среде: организация вычислений в глобальных сетях : Ч. 1 / С.В. Емельянов, А.П. Афанасьев. – М. : РОХОС, 2004. – 176 с.
4. Магницкий, Н.А. Новые методы хаотической динамики / Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров. – М. : Эдиториал УРСС, 2004. – 320 с.
5. Пчелинцев, А.Н. Об отыскании решений системы, описывающей процесс распространения тепла в неограниченной пластине, методом рядов Тэйлора / А.Н. Пчелинцев, Л.А. Мишина, Н.И. Теряев // Тр. ТГТУ. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – Вып. 21. – С. 150–154.
6. Веб-сайт вычислительного кластера Тамбовского государственного технического университета [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://cluster.tstu.ru/tiki-index.php, свободный (дата обращения 10.03.2009).
7. Maxima, a Computer Algebra System [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://maxima.sourceforge.net, свободный (дата обращения 25.02.2009).

Analysis of Capital Flow and Demand Model under Profit Fluctuation in Conditions of Self-Regulating Market System in Distributed Computer Environment

E.P. Agabekyan

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: self-regulating market system; differential equations system; attractors’ existence; economic model.

Abstract: The paper studies models of capital flow and demand under profit fluctuations in conditions of self-regulating market system via symbol calculations in distributed computer environment in order to produce more accurate results than known before. The analysis of research data is implemented; practical importance of the model is given.