ББК У9(2)-56

РАЗВИТИЕ МОДЕЛИ КРЕДИТНО-ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Д.Н. Протасов

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Рецензент Б.Н. Герасимов

Ключевые слова и фразы: инвестиции, экономико-математические модели, однофакторные производственные функций, финансовая поддержка, динамическая модель, темп роста основных фондов, динамика развития.

Аннотация: Представлены экономико-математические модели, которые позволяют исследовать динамику развития предприятия в зависимости от выбранной инвестиционной стратегии. Данные модели основаны на решении дифференциальных уравнений с возмущением, которые описывают различные способы инвестирования в бизнесе.

Наблюдаемые в настоящее время условия формирующегося рынка, полная экономическая самостоятельность предприятий, новая система взаимосвязей переменных, принципиально иная налоговая система требуют нового этапа исследований для применения адекватных методов и моделей, позволяющих исследовать динамику развития предприятия, в зависимости от выбранных инвестиционных стратегий: «чистых» (использование одного инвестиционного источника) и «смешанных» (применение комбинированных схем финансирования). С учетом внешних возмущений, обусловленных влиянием внешних факторов (учет кредитов, налоговых льгот для предприятий), а также внешних факторов с импульсным возмущением (изменение курса валют, инфляция, изменение цен на сырье и т.п.), возникающих в условиях нестабильного рынка и определяющих многоканальный характер инвестиционных процессов в сфере бизнеса.

Рассмотрим ранее известную базовую модель динамики предприятия, использующего внешние инвестиции как форму государственной поддержки (модель М1), рассмотренную С.Р. Хачатряном и предназначенную для промышленных предприятий, функционирующих в условиях, описываемых системой предпосылок:

1) предприятие может развиваться как за счет внутренних источников (прибыли, амортизации), так и за счет государственной поддержки в виде инвестиций;

2) рассматриваются три различных стратегии государственной поддержки бизнеса: а) постоянная (с фиксированными объемами инвестиций для каждого периода); б) линейно возрастающая (с известным постоянным темпом роста инвестиций); в) нелинейно возрастающая (с нарастающим темпом и минимальным уровнем гарантированного государственного субсидирования). Собственная инвестиционная стратегия предприятия определяется долей чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование, которая предполагается постоянной;

3) основные производственные фонды являются единственным лимитирующим фактором, от которого зависит выпуск продукции;

4) любое предприятие функционирует при неизменной технологии, что предполагает постоянство его фондоотдачи;

5) производственная деятельность описывается однофакторной функцией Леонтьева. Темпы развития предприятия характеризуются динамикой основных производственных фондов, которые, в свою очередь, определяются величиной инвестиционных ресурсов (отчислениями от прибыли и величиной финансовой поддержки), а также влиянием внешних факторов с возмущением, прогнозировать которые мы не можем.

Соотношения модели М1 показывают взаимосвязь между агрегированными переменными (такими, как объем выпуска, стоимость основных производственных фондов и темпы их прироста, общая и чистая прибыль, сумма налоговых отчислений и т.д.) и могут быть представлены следующей системой уравнений:

$$P(t) = fA(t); \tag{1}$$

$$M^{\text{об}}(t) = (1-c)P(t); \tag{2}$$

$$M(t) = M^{\text{об}}(t) - N(t); \tag{3}$$

$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 K_\Lambda (1-\xi) M(t); \tag{4}$$

$$dA/dt = \xi M(t) + I(t) + \alpha\delta(t); \tag{5}$$

$t \in [0,T]$, $t_0 \in [0,T)$, $\xi \in [0,1]$, $K_\Lambda \in (0,1]$, $\delta(t) = \theta'(t)$,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } & t - t_0 \ge 0 \\ 0, \text{ при } & t - t_0 < 0; \end{cases} \tag{6}$$

где $P(t)$ – выпуск продукции в момент t в стоимостном выражении; f – показатель фондоотдачи; $A(t)$ – стоимость основных производственных фондов; *c* – удельная себестоимость выпуска продукции в стоимостном выражении; $M^{\text{об}}(t)$ – общая прибыль промышленного предприятия; $M(t)$ – чистая прибыль предприятия за вычетом налоговых отчислений; $N(t)$ – сумма налоговых отчислений; τ_1, τ_2 – ставки налогообложения на объем выпуска и прибыль соответственно; ξ – доля чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование, $0 \le \xi \le 1$; K_Λ – коэффициент, характеризующий соотношение общей и чистой прибыли предприятия, $K_\Lambda = M^{\text{об}}(t)/M(t)$; $I(t)$ – внешние инвестиции; $\theta(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } & t - t_0 \ge 0 \\ 0, \text{ при } & t - t_0 < 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда; α – внешние возмущения.

Формула (1) определяет линейную производственную функцию предприятия; (2) – характеризует процесс формирования его общей прибыли за вычетом издержек производства; (3) – описывает величину чистой прибыли за вычетом общей суммы налоговых отчислений.

Соотношение (4) требует специальных пояснений. Оно является обобщенным способом расчета налоговых отчислений, представляющим собой линейную комбинацию альтернативных вариантов налогообложения, действующих в бизнесе (предполагается, что переменные τ_1, τ_2 могут принимать нулевые значения при отсутствии соответствующего налогового варианта). С достаточной условностью можно выделить три группы вариантов, определяющих зависимость налогов от: 1) объемов производства; 2) общей прибыли; 3) объемов производства и общей прибыли. Так, в российских условиях, характеризующихся множественностью вариантов налогообложения, налоги могут рассчитываться по одной из трех схем: общей (третья группа); упрощенной в двух вариантах (первая и вторая группа, соответственно); вмененному доходу (первая группа). В целях общности описания в соотношении (4) учтен также вариант льготного налогообложения инвестиционно активных предприятий, в соответствии с которым реинвестированная часть чистой прибыли $M(t)$ не облагается налогом. Таким образом, имеем:

$$\tau_1 = \begin{cases} 0, & \text{если налоги не зависят от объемов производства,} \\ \bar{\tau}_1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\tau_2 = \begin{cases} 0, & \text{если налоги не зависят от общей прибыли предприятия,} \\ \bar{\tau}_2, & \text{ставка налогов по льготной схеме,} \\ \bar{\tau}_2/1-\xi, & \text{ставка налогов при отсутствии льгот,} \end{cases}$$

где $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ – ставки налогообложения по действующему налоговому законодательству. Льготы, предоставляемые предприятиям, реинвестирующим свою прибыль в производство, учитываются с помощью доли инвестиционных отчислений ξ и коэффициента K_Λ (величина его обычно зависит от границы действия льгот $\xi \le \bar{\xi}$);

Уравнение (5) описывает динамику прироста основных производственных фондов за счет собственных средств и внешних инвестиций, с учетом колебаний, обусловленных влиянием внешних факторов.

Подставляя (2) и (4) в соотношение (3), получаем:

$$M(t) = P(t)(1-c) - \tau_1 P(t) - \tau_2 K_\Lambda (1-\xi) M(t) =$$

$$= P(t)[(1-c) - \tau_1] - \tau_2 K_\Lambda (1-\xi) M(t). \qquad (7)$$

Выражая явным образом переменную $M(t)$ в соотношении (7), имеем

$$M(t) = (1-c-\tau_1)P(t)/1 + \tau_2 K_\Lambda (1-\xi). \qquad (8)$$

Отсюда, после подстановки (8) в (5) имеем

$$dA/dt = \hat{a}P(t) + I(t) + \alpha\delta(t), \qquad (9)$$

где $\hat{a} = \dfrac{(1-c-\tau_1)\xi}{1+\tau_2 K_\Lambda (1-\xi)}$.

Учитывая (1), система соотношений (1)–(6) преобразуется к дифференциальному уравнению с возмущением

$$dA/dt = aA(t) + I(t) + \alpha\delta(t), \qquad (10)$$

где $a = f\hat{a}$.

Общим решением дифференциального уравнения является

$$A(t) = A_0 \exp\left(\int_0^t a\,ds\right) + \int_0^t \exp\left(\int_0^t a\,ds\right)\left(I(t) + \alpha\delta(t)\right) ds, \qquad (11)$$

где $A_0 = A(0)$.

Рассмотрим три частных случая динамики инвестиций $I(t)$:

1) $I(t) = I_0 = \mathrm{const}$; 2) $I(t) = \beta t$; 3) $I(t) = Be^{\beta t}$.

Они соответствуют трем стратегиям государственной финансовой поддержки малого предпринимательства:

а) постоянной – с фиксированными объемами инвестиций для каждого периода;

б) возрастающей – по линейному закону с темпом роста инвестиций $\beta > 0$;

в) возрастающей – по нелинейному (экспоненциальному) закону со средним темпом $\beta > 0$ и с минимальным уровнем гарантированной государственной поддержки ($I(0) = B$ при $t = 0$).

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (10) для рассматриваемых правых частей имеет вид:

$$A(t) = \left(A_0 + I_0/a + \alpha\theta(t)/a\right)e^{at} - I_0/a - \alpha\theta(t)/a; \qquad (12)$$

$$A(t) = \left(A_0 + \beta/a^2 + \alpha\theta(t)/a\right)e^{at} - \beta(at+1)/a^2 - \alpha\theta(t)/a; \qquad (13)$$

$$A(t) = \left(A_0 + B/(a-\beta) + \alpha\theta(t)/a\right)e^{at} - Be^{\beta t}/(a-\beta) - \alpha\theta(t)/a, \qquad (14)$$

где $A_0 = A(0)$.

Сопоставляя темпы роста основных фондов для различных вариантов инвестирования предприятия, убеждаемся в том, что они соответствуют интенсивности финансовой поддержки, а также зависят от параметров, характеризующих деятельность рассматриваемого экономического объекта, экономических характеристик предприятия, определяющих значение переменной a, и учитывающихся в соотношениях (9) и (10).

Математическая структура основного уравнения динамики предприятия (10), как и структура полученных решений (12)–(14), соответствует результатам дифференциального анализа применительно к предприятию как хозяйственному объекту. Однако экономическое содержание переменных, входящих в полученные решения, для сопоставляемых исследований различно и определяется исходными посылками рассматриваемых в каждом случае моделей.

Рассмотрим более сложный случай, при котором не только внешние, но и внутренние инвестиции предприятия являются функцией времени. Этот случай учитывается в модели путем описания динамики переменной, отражающей долю чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование, как известной функции времени $\xi(t)$. Модель предприятия становится нелинейной при любом виде функции $\xi(t)$.

Примем следующие предпосылки.

Предприятие рассматривается на временном интервале $[0,T]$. Пусть $\xi(t)$ – известная монотонно возрастающая функция времени, для которой задан верхний предел изменения Ψ (определяемый экспертно или на основе статистического анализа $0<\Psi\le 1$, $\xi(T)=\Psi$). Внешние инвестиции являются некоторой функцией времени $I(t)$, причем $\int_0^t I(t)dt = I^t$. Требуется определить верхнюю границу изменения основных фондов предприятия $A(t)$ и оценить их величину к концу периода T.

С учетом сделанных предпосылок уравнение (10) имеет вид:

$$dA/dt = a(t)A(t) + I(t) + \alpha\delta(t); \tag{15}$$

где

$$a(t) = (1-c-\tau_1)\xi(t)/1+\tau_2 K_\lambda(1-\xi(t)). \tag{16}$$

Соотношение (15) – нелинейное дифференциальное уравнение с толчками, решение которого зависит от вида функции $I(t)$. Если оно неразрешимо в явном виде относительно $A(t)$, его можно решать приближенными методами. Кроме того, определим для него верхнюю оценку динамики $A(t)$.

Проинтегрировав обе части уравнения (15) на интервале $[0,t]$, получаем:

$$A(t) - A(0) = \int_0^t a(t)A(t)dt + \int_0^t I(t)dt + \int_0^t \alpha\delta(t)dt. \tag{17}$$

С учетом того, что $A_0 = A(0)$, $\theta(t_0) = \int_a^b \delta(t)dt$, $t_0 \in [0,T]$ и $\int_0^t I(t)dt = I^t$, получаем

$$A(t) = A_0 + I^t + \int_0^t a(t)A(t)dt + \alpha\theta(t). \tag{18}$$

Применим оценку Гронуолла–Беллмана для уравнения (18)

$$A(t) \le \left(A_0 + I^t + \alpha\theta(t)\right)\exp\left(\int_0^t a(t)dt\right). \tag{19}$$

Заметим, что $a(t)$ растет монотонно с ростом $\xi(t)$, что следует из соотношения (16). Следовательно, максимального значения функция $a(t)$ достигает при $\xi(t)$ в конце периода T. Это позволяет получить верхнюю оценку динамики основных фондов в упрощенном виде

$$A(t) \le (A_0 + I^t + \alpha\theta(t))\exp\left(\bar{a}t\right). \tag{20}$$

где $\bar{a} = a(T)$ *при* $\xi(t) = \Psi$.

Зададим функцию $\xi(t)$ в виде степенной функции

$$\xi(t)=\gamma t^2, \tag{21}$$

где γ – темп «наращивания» процесса реинвестирования средств предприятия. Данная функция отражает ситуацию улучшения инвестиционного климата и активизацию инвестиционных процессов, в частности, процессов самофинансирования предприятия. В соответствии со сделанными предпосылками считается:

$$\xi(t)=\begin{cases}\gamma t^2, & \text{при } t\le T;\\ \psi, & \text{при } t=T.\end{cases} \tag{22}$$

Так как $\xi(T)=\gamma T^2=\Psi$ по определению заданной функции (22), получаем величину темпа реинвестирования

$$\gamma=\Psi/T^2. \tag{23}$$

Подставляя (23) в выражение (22), получаем

$$\xi(t)=\Psi t^2/T^2. \tag{24}$$

Полученное выражение (24) позволяет определить параметр $a(t)$ в соответствии с формулой (16). Обозначив $m=f(1-c-\tau_1)$ и $n=\tau_2 K_\Lambda$, приходим к выражению

$$a(t)=\frac{m\Psi t^2}{T^2\left(1+n-\frac{n\Psi}{T^2}t^2\right)}. \tag{25}$$

Подставив (25) в формулу (19), можно получить оценку для верхней границы фондов $A(t)$ для рассмотренного вида функции $\xi(t)$. С этой целью вычислим интеграл $E(t)=\int\limits_0^t a(z)dz$.

Очевидно, что

$$E(t)=\frac{m\Psi}{T^2}\int\limits_0^t\frac{z^2}{1+n-\frac{n\Psi}{T^2}z^2}dz. \tag{26}$$

Обозначим $g=1+n$, $G=n\Psi/T^2$.

Тогда

$$E(t)=\frac{mG}{n}\int\limits_0^t\frac{z^2}{g-Gz^2}dz=\frac{m}{n}\left[-t+g\int\limits_0^t\frac{dz}{g-Gz^2}\right]. \tag{27}$$

Обозначив $\mu=\sqrt{\frac{G}{g}}$ и преобразуя выражение (27), получаем

$$E(t)=\frac{m}{n}\left[-t+\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t\frac{d\mu z}{1-(\mu z)^2}\right]=\frac{m}{n}\left[-t+\frac{1}{2\mu}\ln\left|\frac{1-\mu t}{1+\mu t}\right|\right].$$

Итак, оценка верхней границы основных фондов при $z=T$ в соответствии с формулой (19) имеет вид:

$$A(T)\le\left(A_0+I^T+\alpha\theta(T)\right)\exp\left\{\frac{m}{n}\left[-t+\frac{1}{2\mu}\ln\left|\frac{1-\mu T}{1+\mu T}\right|\right]\right\} \tag{28}$$

или

$$A(T)\le\left(A_0+I^T+\alpha\theta(T)\right)\left|\frac{1-\mu t}{1+\mu t}\right|^{\frac{1}{2\mu}}\exp\left\{-\frac{mT}{n}\right\},$$

где $m=f(1-c-\tau_1)$, $n=\tau_2 K_\Lambda$, $\mu=\sqrt{n\psi/T^2(1-n)}$.

Из формулы (28) следует, что величина верхней границы динамики основных фондов зависит от их начального уровня A_0, общего объема выделенных за период инвестиций I^T, возмущений α и от целого ряда других факторов. К числу факторов, форсирующих динамику процесса, относятся переменные, определяющие эффективность производства и величину удельной прибыли предприятия (входят в параметр m). К числу факторов, тормозящих динамику, относятся переменные, ограничивающие долю инвестирования и характеризующие налоговое давление на предприятие (входят в параметры n и μ). Влияние возмущения α на динамику и развитие предприятия зависит от воздействия его в заданный момент на образующий фактор.

Исследование «форсирующих» факторов роста предприятия как функций времени означает использование в экономико-математическом анализе производственных функций нелинейного типа, что определяет необходимость разработки соответствующих модификаций модели.

Список литературы

1. Егорова, Н.Е. Динамические модели развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционные ресурсы / Н.Е. Егорова, С.Р. Хачатрян. – М. : ЦЭМИ РАН, 2001. – 44 с.
2. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. для гос. ун-тов / Л.С. Понтрягин. – 3-е изд., стереотип. – М. : Наука, 1970. – 331 с.
3. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 225 с.
4. Буянов, В.П. Методы и модели решения экономических задач : учеб. пособие / В.П. Буянов, М.В. Пинегина, С.Р. Хачатрян. – М. : Экзамен, 2005. – 384 с.

Advancement of Model of Credit Investment Resources of Industrial Enterprise

D.N. Protasov

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: investments; economic- mathematical models; one-factor production functions; finance support; dynamic model; rates of growth of main assets; dynamics of development.

Abstract: The economic-mathematical models permitting to investigate the dynamics of the enterprise development depending on the selected investment strategy are introduced. The models are based on solving differential equations, describing different ways of investment in business.