УДК 656.072, 519.853.3

КОНКУРЕНЦИЯ ОПЕРАТОРОВ ГОРОДСКОГО ПАССАЖИРСКОГО ТРАНСПОРТА В УСЛОВИЯХ РЕГУЛИРОВАНИЯ УЛИЧНОГО ДВИЖЕНИЯ

Е.Б. Зварыч, И.А. Жуков, М.Е. Корягин

ГОУ ВПО «Кузбасский государственный технический университет», г. Кемерово; Новокузнецкий филиал, г. Новокузнецк

Рецензент И.Н. Дрогобыцкий

Ключевые слова и фразы: выпуклое программирование; городской пассажирский транспорт; поток транспорта; теория игр; функции многих переменных.

Аннотация: Построена модель потока городского пассажирского транспорта в условиях светофорного регулирования. На основе модели получены среднее время ожидания общественного транспорта пассажиром и распределение пассажиропотоков между маршрутами. Доказано существование равновесия Нэша на рынке городских пассажирских перевозок.

При исследовании работы городского пассажирского транспорта начинать следует с самого сложного субъекта в перевозочном процессе – пассажира. От того, когда у человека возникнет потребность в перевозке, между какими остановочными пунктами, насколько важна эта поездка, какой вид транспорта предпочтет человек, зависит режим функционирования транспортной системы города.

Основным фактором, определяющим поведение пассажиров, является время передвижения в частности время ожидания. Для транспортных операторов важен выбор пассажиром маршрута. Муниципалитеты должны ориентироваться на интересы как одной, так и второй стороны.

Разветвленная маршрутная сеть городского пассажирского транспорта приводит к тому, что пассажир может выбрать для перемещения один из нескольких маршрутов. В настоящее время фактор наложения маршрутов неучтен при оптимизации работы городского пассажирского транспорта, рассматриваются лишь изолированные маршруты [3], а в иностранной литературе основным объектом исследования является выбор способа передвижения (личный автомобиль, служебный транспорт, такси, общественный транспорт).

К тому же отмечается недостаток публикаций в области моделирования процесса конкуренции транспортных операторов [1]. В работе [4] построены игровые модели конкуренции транспортных операторов при условии простейшего потока общественного транспорта, однако в условиях светофорного регулирования такое предположение является грубой моделью транспортного потока.

В данной работе представлена модель потока городского пассажирского транспорта в условиях светофорного регулирования. На основе данной модели построены задачи оптимизации городского пассажирского транспорта (**ГПТ**).

1. Моделирование подъезда общественного транспорта к остановочному пункту

В литературе [4, 5] предполагалось, что поток транспорта пуассоновский. Однако движение транспорта в городской среде подвержено светофорному регулированию, которое приводит к тому, что поток транспорта не является простейшим – движение осуществляется «пачками», формирующимися за время горения зеленого сигнала светофора. Поэтому необходимо разработать более адекватную модель движения транспорта, на основе которой требуется рассчитать среднее время ожидания ГПТ и распределение пассажиропотоков по маршрутам.

На рис. 1 показано расположение транспортных средств и пассажиров на остановочном пункте. Как правило, остановочный пункт расположен за перекрестком, поэтому пассажиры имеют возможность заранее определить состав транспортного потока, то есть определить, есть ли среди потока общественный транспорт и к каким маршрутам они относятся. Если есть номера маршрутов, которые пассажир может использовать, то он выбирает направление передвижения в пределах остановочного пункта для обеспечения быстрой посадки.

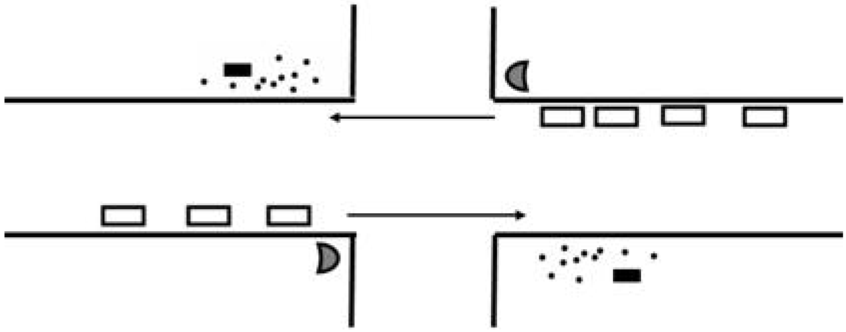

Рис. 1. Расположение транспортных средств и пассажиров на остановочном пункте

Продолжительность цикла светофорного регулирования обычно составляет 60–90 секунд, из этого времени около 30 секунд приходится на подъезд общественного транспорта к остановочному пункту, то есть общественный транспорт разбивается на «пачки», состав которых может изменяться в зависимости от времени посадки, скорости движения транспорта и т.д.

Если в «пачке» находится несколько маршрутов, способных перевезти пассажира до места назначения, то чем дальше находится транспортное средство, тем меньше вероятность того, что пассажир его выберет. Однако порядок распределения транспортных средств в «пачке» может быть любым, поэтому в целом пассажиропоток распределяется между маршрутами равномерно.

Отметим также, что движение общественного транспорта регулируется на конечных остановочных пунктах, для того чтобы повысить регулярность движения транспорта и предотвратить скапливание транспортных средств одного маршрута на остановочном пункте. Поэтому маловероятным является наличие транспортных средств одного маршрута в одной «пачке».

2. Среднее время ожидания общественного транспорта

Введем основные параметры модели. В первую очередь τ – продолжительность цикла светофорного регулирования. Пусть K количество маршрутов, способных перевезти пассажира до места назначения, на *k*-м маршруте интенсивность движения общественного транспорта составляет η_k.

Количество транспортных средств *k*-го маршрута в «пачке» n_k, однако «в пачке» могут находиться транспортные средства каждого маршрута в количестве не более 1, тогда $n_k \in \{0; 1\}$.

Отметим, что продолжительность светофорного цикла значительно меньше интервала движения по маршруту, то есть

$$\tau << \frac{1}{\eta_k}.$$

В данных условиях вероятность появления транспортного средства *k*-го маршрута в «пачке» можно приближенно записать как $\eta_k \tau$.

Соответственно вероятность, что транспортное средство не появится за цикл $1 - \eta_k \tau$.

Вероятность того, что ни одно транспортное средство не приедет за цикл составит

$$\rho = \prod_{k=1}^{K} [1 - \eta_k \tau].$$

Время ожидания представим в виде количества светофорных циклов. Вероятность того, что время ожидания составит *i*-циклов, рассчитывается как $(1 - \rho)\rho^i$, где первая часть является нормировочным коэффициентом.

Среднее количество циклов до приезда первого транспортного средства составит

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(1 - \rho)\rho^i = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Данное выражение получено аналогично среднему количеству заявок в системе массового обслуживания $M/M/1$.

Таким образом, среднее время ожидания

$$W_q = \frac{\tau \prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]}{1-\prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]} = \frac{\tau}{1-\prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]} - \tau. \qquad (1)$$

Отметим, что в пределе среднее время ожидания совпадет с формулами, полученными ранее для простейшего потока [4]

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\tau \prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]}{1-\prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\eta_k}.$$

Выражение (1) обладает свойством выпуклости вниз по интенсивностям движения транспорта. Для этого покажем, что частные производные больше нуля

$$\frac{\partial^2 W_q}{\partial\eta_i \partial\eta_j} = \frac{\tau^3\left(1-\prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]\right)\prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]}{[1-\eta_i \tau][1-\eta_j \tau]\left(1-\prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]\right)^3} \ge 0;$$

$$\frac{\partial^2 W_q}{\partial{\eta_i}^2} = \frac{\tau^3\left(\prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]\right)^2}{[1-\eta_i \tau]^2\left(1-\prod_{k=1}^{K}[1-\eta_k \tau]\right)^3} \ge 0.$$

Соответственно квадратичная форма является положительно определенной, а функция среднего времени ожидания выпуклой вниз.

3. Задача минимизации суммарных потерь населения и транспорта

Данная постановка является обобщением [5] для рассматриваемого в данной статье потока городского пассажирского транспорта.

Для того чтобы перейти к математической постановке задачи, необходимо описать переменные и параметры, входящие в модель: N – количество остановочных пунктов, по которым движутся транспортные средства и перемещаются пассажиры; K – количество маршрутов, по которым передвигаются транспортные средства; α_k – себестоимость одного рейса транспортного средства на *k*-м маршруте ($k=\overline{1,K}$); $A_{i,j}^{k}$ – принимает значение 1, если по *k*-му маршруту можно переехать с *i*-го остановочного пункта на *j*-й, иначе принимает значение 0 ($i, j=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,K}$); μ_k – переменная, описывающая интенсивность пуассоновского потока транспортных средств, движущихся по маршруту в единицу времени ($k=\overline{1,K}$); $\lambda_{i,j}$ – интенсивность пуассоновского потока пассажиров, поступающих на *i*-й остановочный пункт с желанием переехать на маршрутном транспортном средстве на остановочный *j*-й пункт в единицу времени поступления ($i, j=\overline{1,N}$); γ – стоимость единицы времени (пассажирочаса), потерянной пассажиром в ожидании транспорта на остановочном пункте.

После введения всех переменных запишем уравнения, неравенства и критерий для того, чтобы завершить постановку задачи. Очевидно, что интенсивность потоков транспортных средств, движущихся по каждому маршруту, не отрицательна:

$$\mu_k \geq 0,\ k = \overline{1, K}. \qquad (2)$$

Затраты городского пассажирского транспорта на перевозку составят

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \mu_k. \qquad (3)$$

Целевой функцией в данной задаче являются суммарные затраты транспорта на передвижение транспортных средств по маршрутам в единицу времени (2) и потери времени пассажиров в ожидании (1):

$$F(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_{i,j} \gamma \tau \prod_{k=1}^{K} \left[1 - A_{i,j}^{k} \mu_k \tau\right]}{1 - \prod_{k=1}^{K} \left[1 - A_{i,j}^{k} \mu_k \tau\right]} + \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \mu_k \rightarrow \min. \qquad (4)$$

Как показано в предыдущем разделе, левая часть целевой функции (4) выпукла вниз, а так как правая часть линейна, то (2), (4) является задачей выпуклого программирования и имеет единственное решение.

4. Распределение пассажиропотока между маршрутами

Для расчета наполняемости транспортных средств и количестве перевезенных пассажиров необходимо рассчитывать распределение пассажиропотоков между маршрутами. Движение общественного транспорта на одном маршруте практически не связано с другими маршрутами, то есть появление в «пачке» транспортных средств не зависит друг от друга. Поэтому вероятность формирования «пачки» $n = (n_1, n_2, \ldots, n_K)$

$$\prod_{k=1}^{K} \left[(\eta_k \tau)^{n_k} (1 - \eta_k \tau)^{1 - n_k}\right].$$

Соответственно вероятность выбора пассажиром маршрута из «пачки» $n = (n_1, n_2, \ldots, n_K)$ каждого из маршрутов равновероятна $\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{K} n_k}$.

Обозначим множество всех возможных составов пачек B, тогда общая доля s-го маршрута пропорциональна

$$\sum_{\substack{n \in B \\ n_s = 1}} \prod_{k=1}^{K} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{K} n_k} (\eta_k \tau)^{n_k} (1 - \eta_k \tau)^{1 - n_k}\right].$$

Учитывая нормировочный коэффициент $1 - \rho$, получим вероятность выбора s-го маршрута пассажирами

$$\frac{\sum_{\substack{n \in B \\ n_s = 1}} \prod_{k=1}^{K} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{K} n_k} (\eta_k \tau)^{n_k} (1 - \eta_k \tau)^{1 - n_k}\right]}{1 - \prod_{k=1}^{K} \left[1 - \eta_k \tau\right]}. \qquad (5)$$

При решении задачи [4] необходимо показать выпуклость вверх (5) по интенсивности движения транспорта η_s, что позволит доказать существование равновесия Нэша в данных задачах.

Представим (5) в виде суммы слагаемых, причем $n_s = 1$ (иначе пассажиропоток не может быть перевезен на маршруте *s*)

$$R_k = \frac{\eta_s \tau \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{K} \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{K} n_k} (\eta_k \tau)^{n_k} (1 - \eta_k \tau)^{1-n_k} \right]}{1 - \prod\limits_{k=1}^{K} [1 - \eta_k \tau]}.$$

Тогда вторая производная будет отрицательной

$$\frac{\partial^2 R_k}{\partial \eta_k^{\ 2}} = -\frac{2\tau^2 \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{K} \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{K} n_k} (\eta_k \tau)^{n_k} (1 - \eta_k \tau)^{1-n_k} \right] \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{K} [1 - \eta_k \tau]}{\left(1 - \prod\limits_{k=1}^{K} [1 - \eta_k \tau] \right)^3} -$$

$$- \frac{3\tau^2 \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{K} [1 - \eta_k \tau] \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{K} \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{K} n_k} (\eta_k \tau)^{n_k} (1 - \eta_k \tau)^{1-n_k} \right] \left(1 - \tau \eta_s \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{K} [1 - \eta_k \tau] \right)}{\left(1 - \prod\limits_{k=1}^{K} [1 - \eta_k \tau] \right)^4}.$$

Во втором слагаемом $\tau \eta_s < 1$ и $\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{K} [1 - \eta_k \tau] < 1$, поэтому вторая производная меньше нуля.

5. Ситуация равновесия на рынке городских пассажирских перевозок

В постановке (2), (4) предполагалось, что общественный транспорт работает в интересах города, то есть муниципальные органы власти определяют расписание движение транспорта и распределяют дотации между транспортными операторами. Однако в настоящее время многие транспортные операторы сами определяют оптимальную интенсивность движения пассажирского транспорта в целях получения максимальной прибыли в борьбе за пассажиров. Поэтому опишем задачу конкуренции транспортных операторов с точки зрения теории игр.

Предлагаемая постановка задачи является обобщением [4] для рассматриваемого в данной статье потока городского пассажирского транспорта. Дополнительно введем параметр β – стоимость проезда на городском пассажирском транспорте.

Для универсализации постановок задач предположим, что каждый маршрут управляется одним оператором и каждый оператор управляет одним маршрутом. На самом деле более сложная постановка задачи [4] также имеет решение для рассматриваемого в данной статье потока транспорта.

Выигрыш или прибыль *s*-го маршрута (доходы от оплаты пассажирами проезда минус расходы на перевозку) в единицу времени:

$$H_s(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\beta\lambda_{i,j}\mu_s\tau \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq s \\ A_{i,j}^k=1}}^{K} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{K} n_k} (\mu_k\tau)^{n_k} \left(1 - A_{i,j}^k \mu_k \tau\right)^{1-n_k} \right]}{1 - \prod\limits_{k=1}^{K} \left[1 - A_{i,j}^k \mu_k \tau\right]} - \alpha_s \mu_s,$$

$$s = \overline{1, K}. \qquad (6)$$

Транспортные операторы работают независимо друг от друга, и каждый стремится максимизировать собственную прибыль, изменяя интервал движения транспортных средств на своем маршруте. Для описания данной ситуации построим игру $\Gamma\left\langle K, \{\mu_s\}_{s=\overline{1,K}}, \{H_s\}_{s=\overline{1,K}} \right\rangle$. Особое значение в теории игр приобретает точка равновесия по Нэшу [2], от которой каждому в отдельности предприятию не выгодно отклоняться (изменять интервалы движения на своем маршруте).

Вторые производные от функций выигрыша (6) игроков по своей стратегии (интервалам движения транспорта по маршруту) отрицательны, поэтому игра Γ имеет точки равновесия по Нэшу в чистых стратегиях [2].

6. Заключение

Представленная в данной работе модель позволяет составить оптимальный график движения городского пассажирского транспорта по маршрутам при условии конкуренции транспортных операторов. Разработана более сложная модель потока транспорта с учетом светофорного регулирования, на основе которой получены формулы расчета среднего времени ожидания и распределения пассажиропотоков между маршрутами.

Поставлена задача выпуклого программирования для решения задачи оптимизации городского пассажирского транспорта с точки зрения социально-экономического равновесия. Данная задача может быть применена при значительной роли муниципалитета в управлении городским пассажирским транспортом.

Доказано существование ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в задаче конкуренции транспортных операторов. Точки равновесия характеризуют условия договора конфликтующих сторон, которые обеспечивают равновесие на рынке пассажирских услуг, то есть определяются интервалы движения транспорта, отклонение от которых невыгодно ни одному из участников рынка. Подобная задача применима в условиях большой доли частных транспортных операторов на рынке городских пассажирских перевозок.

Поэтому построенные модели могут быть эффективно использованы при планировании работы городского маршрутизированного транспорта в современных условиях.

Список литературы

1. Hollander Y., Prashker J. N. Applicability of Non-Cooperative Game Theory in Transport Analysis // Transportation – 2006. – V. 33 (5). – P. 481–496.

2. Moulin H. Theorie des jeux pour l'economie et la politique. Paris. – 1981.

3. Лопатин, А.П. Моделирование перевозочного процесса на городском пассажирском транспорте / А.П. Лопатин. – М. : Транспорт. – 1985. – 200 с.

4. Корягин, М.Е. Конкуренция потоков общественного транспорта / М.Е. Корягин // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 8. – С. 120–130.

5. Корягин, М.Е. Оптимизация потоков общественного транспорта в городской среде / М.Е. Корягин, О.С. Семенова // Вопр. современ. науки и練. Ун-т им. В.И. Вернадского. – 2008. – № 1(11). – Т. 2. – С.70–79.

Competition Among Providers of Public Passenger Transport in Conditions of Traffic Regulation

E.B. Zvarych, I.A. Zhukov, M.E. Koryagin

Kuzbass State Technical University, Kemerovo

Key words and phrases: convex programming; public transport system; traffic flow; game theory; functions of variables.

Abstract: The paper presents the model of public traffic flow in conditions of signal control. On the basis of the model the average time of expectation of public transport by a passenger and distribution of passenger traffic flow between the routes are produced. The existence of Nash equilibrium on the market of city passenger transport is proved.