УДК 519.6:681.3

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ И РАЗВЕРТЫВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

Я.Е. Ромм, Е.Н. Богданенко

ГОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт», г. Таганрог

Рецензент Г.М. Куликов

Ключевые слова и фразы: системы линейных алгебраических уравнений; собственные значения матриц; параллельные схемы; трехдиагональная матрица; характеристический полином.

Аннотация: Изложены параллельные схемы решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей и развертывания ее характеристического полинома. Параллельное решение трехдиагональной системы выполняется с временной сложностью $T(n) = O(\log n)$, коэффициенты характеристического полинома вычисляются с оценкой $T\left(n^2\right) = O\left(\log_2^2 n\right)$.

Постановка вопроса. Необходимость решения систем линейных алгебраических уравнений (**СЛАУ**) с ленточными, в частности с трехдиагональными, матрицами, а также нахождения их собственных значений, возникает в задачах математического моделирования физических [1, 2] и социальных [3] процессов. Ниже ставится задача ускорения решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей и решения полной проблемы собственных значений для трехдиагональных матриц за счет представления алгоритмов в параллельной форме.

Метод решения системы с трехдиагональной матрицей. Пусть рассматривается трехдиагональная система линейных алгебраических уравнений:

$$AX = B, \tag{1}$$

где

Ромм Я.Е. – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информатика» ТГПИ; Богданенко Е.Н. – аспирант кафедры «Информатика» ТГПИ, г. Таганрог.

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Если при разложении $A = Z\,Y$ в произведение верхней и нижней треугольных матриц [4] элементы главной диагонали матрицы Z будем считать единичными, то

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ z_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & z_3 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & z_n & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} y_1 & c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & c_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & y_{n-1} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & y_n \end{pmatrix}.$$

Вычисление элементов разложения осуществляется по известным рекуррентным соотношениям [5]

$$y_1 = a_1, \quad y_i = a_i - \frac{d_i}{y_{i-1}}, \quad d_i = b_i c_i, \quad z_i = \frac{b_i}{y_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n \qquad (3)$$

где y_k может быть представлено в виде цепной дроби

$$y_1 = a_1, \;\; y_k = a_k - \cfrac{d_{k-1}}{a_{k-1} - \cfrac{d_{k-2}}{a_{k-2} - \ddots \; a_2 - \cfrac{d_1}{y_1}}}, \; k = 2, 3, \ldots, n$$

которая, в свою очередь, может быть заменена подходящей дробью $y_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$, где числа P_k и Q_k определяются из соотношений [6]

$$\left.\begin{aligned} P_k &= a_{n-k}P_{k-1} - d_{n-k}P_{k-2} \\ Q_k &= a_{n-k}Q_{k-1} - d_{n-k}Q_{k-2} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$P_{-1} = 1,\ Q_{-1} = 0,\ \ P_0 = a_n,\ \ Q_0 = 1\,.$$

С целью получения максимально параллельной формы рекурсия для P_k и Q_k из (4) выражается в виде [5, 7]:

$$\begin{pmatrix} P_{k+1} \\ P_k \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{k-1} \begin{pmatrix} a_{n-i} & -d_{n-i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} Q_{k+1} \\ Q_k \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{k-1} \begin{pmatrix} a_{n-i} & -d_{n-i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_0 \end{pmatrix}.$$

С применением известной техники fan-in [5, 7] для всех k ($k = 2, 3, \dots, n-1$) весь набор матриц параллельно вычисляется на n процессорах: $T(n) = O(\log n)$ [7]. В результате все y_k окажутся найденными за время единичного порядка на n процессорах. С такой же оценкой окажутся найденными все z_k из (3).

После нахождения элементов разложения решаются две системы $Z\,W = B$ и $Y\,Z = W$ по схемам, данным в [7]. Суммарная временная сложность точного решения этих двух систем составит

$$T(n) = O(\log n)\,.$$

В итоге последняя оценка сохраняется для всего решения системы (1).

Нахождение коэффициентов характеристического полинома трехдиагональной матрицы. Рассматривается характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0\,, \qquad (5)$$

для трехдиагональной матрицы вида (2). Коэффициенты матрицы (2) связаны с коэффициентами характеристического уравнения (5) равенством [8]

$$\begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ I & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_1 \\ D_0 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где D_n – вектор искомых коэффициентов, компоненты которого определяются из рекурсии [8]

$$D_k = \begin{pmatrix} d_{kk} \\ d_{k(k-1)} \\ d_{k(k-2)} \\ \vdots \\ d_{k1} \\ d_{k0} \end{pmatrix}, \quad D_{k-1} = \begin{pmatrix} d_{(k-1)(k-1)} \\ d_{(k-1)(k-2)} \\ \vdots \\ d_{(k-1)1} \\ d_{(k-1)0} \end{pmatrix}, \quad A_k = \left(\underbrace{ \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a_k & 1 & 0 \\ 0 & a_k & 1 \\ 0 & 0 & a_k \\ \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} k+1 \begin{matrix} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & a_k & 1 \\ \dots & 0 & a_k \end{matrix} }_{k} \right),$$

$$B_k = \left(\begin{array}{c} \left. \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & O & \\ -b_k c_k & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 0 \\ & O & & & -b_k c_k & 0 \\ & & & & 0 & -b_k c_k \end{matrix} \right\} k+1 \\ \underbrace{\hphantom{0000000000000000000000000000000000}}_{k-1} \end{array} \right), \; k = 1, 2, \dots, n, \quad D_0 = 1 .$$

Умножение матриц в (6) по схеме сдваивания за $\lceil \log_2 n \rceil$ шагов, на каждом из которых параллельно умножаются пары блочных матриц, влечет [8]

$$T(R) = O\left(\log_2^2 n\right), \quad R < 2\left(n^2 + 2n + 2\right).$$

Для вычисления корней полинома можно использовать схему из [9].

Заключение. Синтезированные схемы ориентированы на параллельные вычислительные системы. Представленный метод решения СЛАУ является модификацией итерационного метода, который переходит в точный с логарифмическим числом шагов со сложностью $T(n) = O(\log n)$, $R = O(n^2)$. Параллельная схема развертывания характеристического полинома отличается от известных по построению, выражением коэффициентов полинома через элементы матрицы и сокращенным числом процессоров по сравнению со случаем матрицы общего вида: $T\left(n^2\right) = O\left(\log_2^2 n\right)$.

Список литературы

1 Кершоу, Д. Решение одной трехдиагональной системы линейных уравнений и векторизация алгоритма сопряженных градиентов с переобусловливанием с помощью неполного разложения Холецкого на ЭВМ CRAY-1 / Д. Кершоу // Параллельные вычисления / под ред. Г. Родрига. – М. : Наука, 1986. – С. 88–101.

2 Коллатц, Л. Задачи на собственые значения / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968. – 461 с.

3 Лаптев, А.А. Математическое моделирование социальных процессов / А.А. Лаптев. // Математические структуры и моделирование (Омск. гос. ун-т). – 1999. – № 3. – С. 109–124.

4 Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 548 с.

5 Солодовников, В.И. Верхние оценки сложности решения систем линейных уравнений / В.И. Солодовников ; В кн. : Теория сложности вычислений. I : Записки научных семинаров ; ЛОМИ АН СССР. – Л., 1982. – Т. 118. – С. 159–187.

6 Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон – М. : Физматгиз, 1963. – 660 с.

7 Ромм, Я.Е. Метод сокращения числа итераций при решении систем линейных алгебраических уравнений с приложениями к вопросам устойчивости и случаю систем с трехдиагональной матрицей / Я.Е. Ромм, Е.Н. Богданенко ; ТГПИ. – Таганрог, 2003. – 38 с. – Деп. В ВИНИТИ 26.05.03. № 1013-В2003.

8 Ромм, Я.Е. Параллельная схема решения проблемы собственных значений для трехдиагональных матриц / Я. Е. Ромм, Е. Н. Богданенко // сб. материалов 4-й междунар. науч.-практ. конф. «Составляющие научно-технического прогресса». – Тамбов, 23–24 апреля 2008. – С. 96–104.

9 Ромм, Я.Е. Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. Кн. I : Кибернетика и системный анализ / Я.Е. Ромм. – Киев, 2007. – № 1. – С. 165–182.

Parallel Solution to the System of Linear Algebraic Equations with Three-Diagonal Matrix and Expansion of Characterisitic Polynom

Ya. E. Romm, E.N. Bogdanenko

Taganrog State Teachers' Training Institute, Taganrog

Key words and phrases: systems of linear algebraic equations; latent root; parallel schemes; three-diagonal matrix; characterisitic polynom.

Abstract: The paper presents parallel schemes of solution to the systems of linear algebraic equations with three-diagonal matrix and expansion of its characteristic polynom. Parallel solution to three-diagonal system is implemeted with time complexity $T(n) = O(\log n)$, coefficients of characterisitic polynom are calculated with the value $T\left(n^2\right) = O\left(\log_2^2 n\right)$.
