УДК 527.62, 517.518.85

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТА ПО НАВИГАЦИОННЫМ ОТМЕТКАМ

**Е.Б. Зварыч, М.Е. Корягин, О.Ю. Слободенюк**

*ГОУ ВПО «Кузбасский государственный технический университет», г. Кемерово*

*Рецензент Н.П. Пучков*

**Ключевые слова и фразы:** интерполяция; математическое моделирование; навигационные системы; транспорт.

**Аннотация:** Исследуются функции движения транспортных средств по данным навигационных приборов. Построены интерполяционные формулы, учитывающие возможность мгновенного изменения ускорения.

## 1. Введение

Рост автомобилизации в России приводит к ухудшению условий движения автотранспорта по городской дорожной сети, поэтому необходимо исследовать потоки транспорта [2, 4]. На практике для анализа могут быть получены лишь характеристики движения транспортного средства в отдельные моменты времени. Например, такая информация может быть получена по данным навигационных приборов GPS или ГЛОНАСС.

Так, в Кемерово многие автобусы оборудованы навигационной системой [1], накапливающей информацию о местоположении транспортного средства и скорости его движения через каждые 30 секунд. Чтобы грамотно изучать движение транспорта по таким статистическим данным необходимо интерполировать параметры движения транспортного средства в промежуточные моменты времени.

Особенностью движения транспорта является возможность мгновенного изменения ускорения, то есть начало торможения, замедления, ускорения происходят мгновенно. Конечно, функции скорости и перемещения являются непрерывными. Сложность состоит в том, что для интерполяции

---

Зварыч Е.Б. – старший преподаватель кафедры «Автомобильные перевозки» Новокузнецкого филиала КузГТУ, г. Новокузнецк; Корягин М.Е. – кандидат технических наук, доцент кафедры «Автомобильные перевозки» КузГТУ, г. Кемерово; Слободенюк О.Ю. – старший преподаватель кафедры «Автомобильные перевозки» Новокузнецкого филиала КузГТУ, г. Новокузнецк.

используются гладкие функции, то есть функции с непрерывными производными высоких порядков [3].

Например, кубический сплайн имеет непрерывные производные [3], и если мы рассматриваем движение автомобиля, то ускорение (вторая производная перемещения) будет непрерывным. То есть моделирование движения сплайнами заведомо отвергает возможность мгновенного (или даже «быстрого») изменения ускорения. К тому же сплайны не учитывают ограничения, поэтому возможно возникновение отрицательного значения скорости, что на практике невозможно. В данной работе рассмотрен другой подход к интерполяции движения транспортного средства.

## 2. Общая постановка задачи

Пусть известны моменты времени $t_0, t_1, ..., t_n$, в которые проводились замеры, также существует информация $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ и скорости $v_0, v_1, ..., v_n$ транспортного средства в данные моменты времени. Для спрямленного пути местоположение транспортного средства – $S_0, S_1, ..., S_n$.

Необходимо получить функциональную зависимость $F(t)$. При этом необходимо выполнение (в случае высокой точности наблюдений) ограничений:

$$F(t_i) = S_i, \quad i = \overline{0, n}, \tag{1}$$

$$\frac{dF(t_i)}{dt} = v_i, \quad i = \overline{0, n}. \tag{2}$$

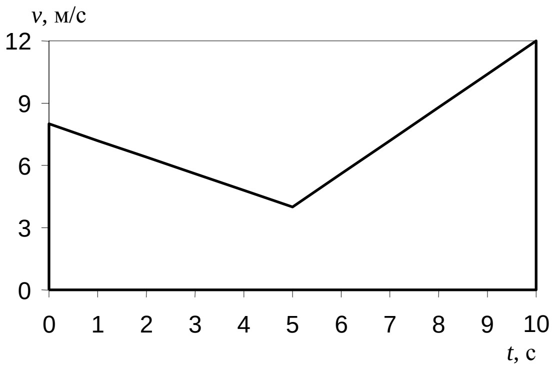
Для движения автомобиля важно также, чтобы функция движения $F \in C^1[t_0, t_1]$, то есть была непрерывно дифференцируема. На самом деле условие обеспечивает непрерывное изменение скорости и местоположения транспортного средства.

Очевидно, что для большого количества интервалов функция должна быть задана кусочно. Также понятно, что множество функций, удовлетворяющих условиям (1), (2), безгранично. Необходимо ограничить выбор наиболее простыми функциями, например, полиномами. В данной работе в качестве кусочной функции использована парабола.

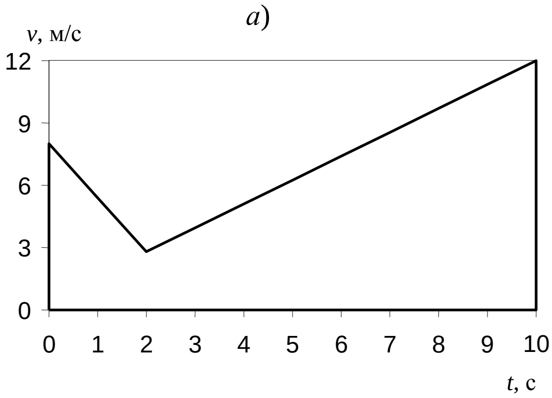
Позволим функции $F(t)$ мгновенно менять ускорение (вторую производную) в точках наблюдения и еще в промежуточные моменты (по 1 точке в каждом наблюдаемом интервале).

В данном случае будем рассматривать каждый интервал независимо. И в этом интервале возможно одно изменение ускорения, поэтому функция на этом интервале будет состоять из двух парабол.

Рассмотрим график изменения функции скорости на примере. Исходные данные задачи: интервал времени 10 с ($t_0 = 0$, $t_1 = 10$); начальная скорость $v_0 = 8$ м/с; конечная скорость $v_1 = 12$ м/с; перемещение $\Delta S_1 = 70$ м ($S_0 = 0$, $S_1 = 70$).




*а*)




*б*)

**Рис. 1. Варианты однократного изменения ускорения**

Возможно бесконечное множество вариантов решения данной задачи. На рис. 1 представлены 2 варианта с изменением характера движения в момент 5 и 7 секунд соответственно. При этом выполняются условия соответствия скорости (2) наблюдаемым значениям, а также площадь фигуры (перемещение) равна 70 метрам.

## 3. Поиск оптимальных параметров интерполяционной функции

Если функция перемещения состоит из двух парабол, то функция скорости (производная функции перемещения) состоит из двух прямых линий. Необходимо найти ускорения на первом и на втором участках, а также момент времени $\tau$, в который происходит изменение скорости. Две кусочные функции:

$$\varphi_1(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad t \in [t_0, \tau];$$

$$\psi_1(t) = d_1 t^2 + e_1 t + f_1, \quad t \in [\tau, t_1].$$

Запишем условия, выполняемые для данных функций. Во-первых, равенство скорости:

$$\frac{d\varphi_1(t_0)}{dt} = v_0; \tag{3}$$

$$\frac{d\psi_1(t_1)}{dt} = v_1; \tag{4}$$

$$\frac{d\psi_1(\tau)}{dt} = \frac{d\varphi_1(\tau)}{dt}; \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi_1(\tau)}{dt} \geq 0 . \tag{6}$$

Последнее условие важно тем, что скорость не может принимать отрицательное значение, а минимальное значение скорости возможно только в точке $\tau$ (на границах интервалов скорость положительна всегда). Во вторых, условия на перемещение:

$$\varphi_1(t_0) = S_0; \tag{7}$$

$$\psi_1(t_1) = S_1; \tag{8}$$

$$\varphi_1(\tau) = \psi_1(\tau). \tag{9}$$

При этом остается открытым вопрос о (9) условии (так как параметров 7). Это условие может быть найдено из ограничения ускорения, то есть необходимо минимизировать смену ускорения на данном интервале

$$\left(\frac{d^2\psi_1(\tau)}{dt^2} - \frac{d^2\varphi_1(\tau)}{dt^2}\right)^2 \to \min . \tag{10}$$

Проведем расчеты параметров при начальном перемещении $S_0 = 0$, начальной скорости $v_0 = 0$ и моменте времени $t_0 = 0$, тогда из (3), (7):

$$\varphi_1(t_0) = c_1 = S_0 = 0; \tag{11}$$

$$\frac{d\varphi_1(t_0)}{dt} = b_1 = 0, \tag{12}$$

то есть первая функция приобретает вид

$$\varphi_1(t) = a_1 t^2 .$$

Для второй функции (4), (8):

$$\frac{d\psi_1(t_1)}{dt} = 2d_1 t_1 + e_1 = v_1; \tag{13}$$

$$\psi_1(t_1) = d_1 t_1^2 + e_1 t_1 + f_1 = S_1 . \tag{14}$$

Ограничение (14) может быть упрощено за счет вычитания ограничения (13):

$$e_1 t_1 + 2 f_1 = 2S_1 - v_1 t_1 .$$

Условия в точке $\tau$ (5), (9):

$$2a_1\tau = 2d_1\tau + e_1; \tag{15}$$

$$a_1\tau^2 = d_1\tau^2 + e_1\tau + f_1. \tag{16}$$

Ограничение (16) может быть упрощено за счет вычитания (15):

$$0 = e_1\tau + 2f_1. \tag{17}$$

Сначала решим задачу без учета ограничения (6), то есть используем целевую функцию (10):

$$(a_1 - d_1)^2 \to \min .$$

Таким образом, для поиска параметров $a_1, d_1, e_1, f_1, \tau$ необходимо решить задачу (18), (19):

$$g = x^2 = (a_1 - d_1)^2 \to \min , \tag{18}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2d_1t_1 + e_1 = v_1; \\ e_1t_1 + 2f_1 = 2S_1 - v_1t_1; \\ 2a_1\tau = 2d_1\tau + e_1; \\ 0 = e_1\tau + 2f_1. \end{cases} \tag{19}$$

Проведем дальнейшие упрощения. Из третьего равенства системы (19) получим

$$x = \frac{e_1}{2\tau}.$$

Сложим четвертое и второе равенства (19) и получим:

$$e_1t_1 - e_1\tau = 2S_1 - v_1t_1, \quad \text{то есть} \quad e_1 = \frac{2S_1 - v_1t_1}{t_1 - \tau}, \tag{20}$$

тогда получим

$$x = \frac{2S_1 - v_1t_1}{2\tau(t_1 - \tau)} = \frac{2S_1 - v_1t_1}{2t_1}\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{(t_1 - \tau)}\right].$$

Оптимальное значение критерия находится на границах интервала $\tau = t_0$, $\tau = t_1$ или при равенстве нулю первой производной:

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{(2S_1 - v_1t_1)^2}{2t_1\tau(t_1 - \tau)}\left[-\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{(t_1 - \tau)^2}\right] = 0. \tag{21}$$

Равенство (21) выполняется в середине интервала

$$\tau = \frac{t_1}{2}. \tag{22}$$

Остальные параметры функций:

$$e_1 = \frac{2S_1 - v_1t_1}{t_1 - \tau} = \frac{4S_1}{t_1} - 2v_1; \tag{23}$$

$$f_1 = -\frac{e_1\tau}{2} = \frac{v_1 t_1}{2} - S_1; \qquad (24)$$

$$d_1 = \frac{v_1 - e_1}{2t_1} = \frac{3v_1}{2t_1} - \frac{2S_1}{t_1^2}; \qquad (25)$$

$$a_1 = d_1 + \frac{e_1}{t_1} = \frac{2S_1}{t_1^2} - \frac{v_1}{2t_1}. \qquad (26)$$

Таким образом, решением исходной системы (3)–(5), (7)–(10) является (11), (12), (22)–(26) Теперь перейдем к обобщенной постановке: $v_0 \neq 0$, тогда заменой переменных: $v_0' = 0$, $v_1' = v_1 - v_0$, $S_1' = S_1 - v_0 t_1$ сведем данную постановку задачи к упрощенной модели (11), (12), (22)–(26).

## 4. Особый случай решения задачи

Важно отметить, что существует ограничение на скорость движения (6) – очевидно, что данная скорость не может быть отрицательной. Решение же задачи (3)–(5), (7)–(10) может привести к такому результату, если в середине интервала скорость окажется отрицательной:

$$\frac{v_0 + v_1}{4} t_1 > S_1, \qquad (27)$$

то есть изменение ускорения в середине интервала не приведет к удовлетворению ограничения (6) на перемещение транспортного средства на заданном интервале. В этом случае необходимо решить задачу в следующей постановке (скорость в «переломный» момент $\tau$ равна нулю):

$$\begin{cases} d_1 t_1^2 + e_1 t_1 + f_1 = S_1; \\ 2d_1 t_1 + e_1 = v_1; \\ 2d_1\tau + v_1 = 0; \\ 2a_1\tau + v_0 = 0; \\ a_1\tau^2 + v_0\tau = d_1\tau^2 + e_1\tau + f_1. \end{cases} \qquad (28)$$

Решением системы уравнений является:

$$\tau = \frac{2S_1 - v_1 t_1}{v_0 - v_1}; \qquad (29)$$

$$a_1 = \frac{v_0 - v_1}{4S_1 - 2v_1 t_1} v_0; \qquad (30)$$

$$d_1 = \frac{v_1 - v_0}{4S_1 - 2v_0 t_1} v_1; \qquad (31)$$

$$e_1 = v_1 - \frac{v_1 - v_0}{2S_1 - v_0 t_1} v_1 t_1; \qquad (32)$$

$$f_1 = S_1 - v_1 t_1 + \frac{v_1 - v_0}{4S_1 - 2v_0 t_1} v_1 t_1^2 . \qquad (33)$$

Однако и система (28) может не иметь приемлемого решения по $\tau$, то есть $\tau$ не войдет в интервал $[0, t_1]$. Решение системы возможно при условиях:

$$\frac{\min[v_0, v_1]}{2} t_1 < S_1 < \frac{\max[v_0, v_1]}{2} t_1 . \qquad (34)$$

Очевидно равенство, полученное из (27), находится в (34). Однако граничные значения $S_1$ (34) также неприемлемы, так как предполагают бесконечное ускорение или замедление (разрыв скорости).

Например, на рис. 2 рассмотрены два решения задачи (18)–(19) и (28). Для второго подхода характерно резкое торможение (4 м/с$^2$), а затем ускорение (1,5 м/с$^2$). Для первого подхода торможение более постепенно (1,44 м/с$^2$), а ускорение выше (2,24 м/с$^2$). Вопрос, какой подход выбрать, лежит в плоскости максимально возможных ускорения и торможения.

К тому же не корректные значения ускорения и замедления могут возникнуть, если интервал времени позволяет несколько раз сменить характер движения (более 1 раза). Таким образом, можно обосновать необходимую длину интервала.

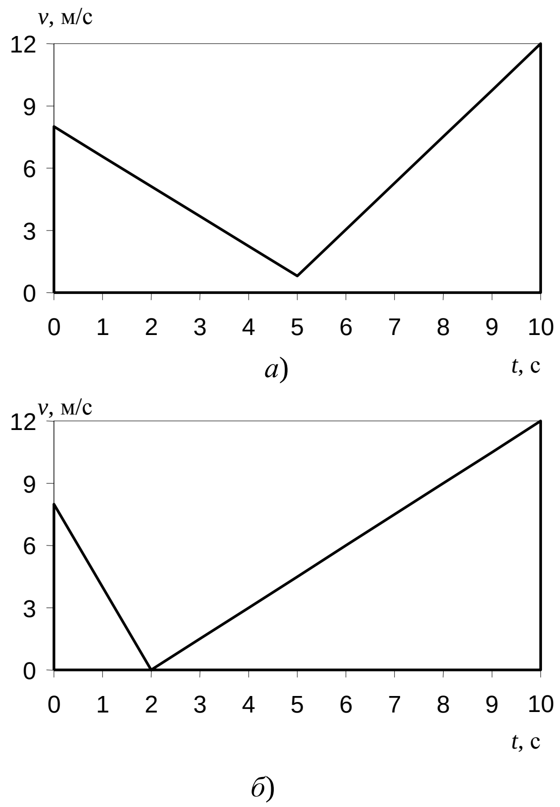



**Рис. 2. Скорость движения автомобиля при условии (34)**

Рассмотрим возможность два раза сменить ускорение на интервале. Условие (34) не выполняется в случае, когда перемещение незначительное. В этом случае скорость равномерно падает до 0, затем наступает период остановки, после чего начинается равноускоренное движение. Необходимо определить две точки смены ускорения. Для этого существует лишь одно условие – перемещение за интервал. Другими условиями могут выступать ограничения на максимальное замедление и ускорение. В нашем случае ограничим сумму ускорений.

Пусть $\tau'$ и $\tau''$ – два момента времени, в которые происходит смена ускорения. Тогда перемещение составит

$$\frac{v_0\tau'}{2}+0+\frac{v_1\left(t_1-\tau''\right)}{2}=\Delta S_1; \tag{35}$$

смена ускорения

$$g=\frac{v_0}{\tau'}+\frac{v_1}{\left(t-\tau''\right)}\to\min. \tag{36}$$

Решением (35), (36) являются точки:

$$\tau'=\frac{2\Delta S_1}{v_0+v_1},\ \tau''=t_1-\frac{2\Delta S_1}{v_0+v_1}; \tag{37}$$

$$b_1=v_0,\ c_1=0; \tag{38}$$

$$a_1=-\frac{v_0\left(v_0+v_1\right)}{4\Delta S_1}; \tag{39}$$

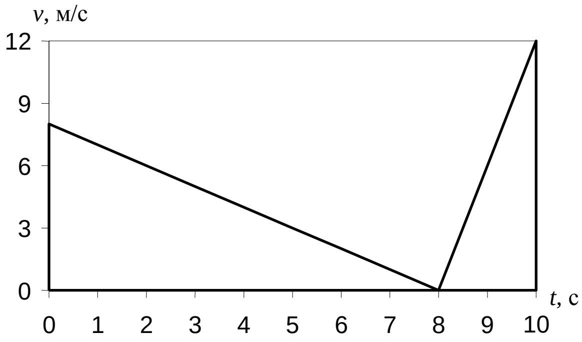
$$d_1=\frac{v_1\left(v_0+v_1\right)}{4\Delta S_1}; \tag{40}$$

$$e_1=v_1-\frac{v_0+v_1}{2\Delta S_1}v_1t_1; \tag{41}$$

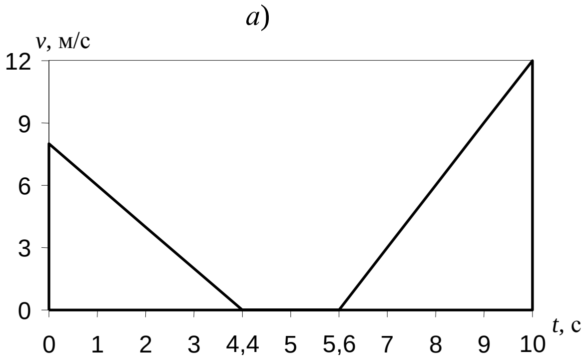
$$f_1=\Delta S_1-v_1t_1+\frac{v_0+v_1}{4\Delta S_1}v_1t_1^2. \tag{42}$$

Решение (37)–(42) дополняет решение задачи (3)–(10) с точки зрения выполнения условия (6). На рис. 3 возможны два решения задачи по (11)–(12), (29)–(33) и (37)–(42). Отметим, что требование однократного изменения ускорения приводит к торможению (1 м/с$^2$) и резкому ускорению (6 м/с$^2$), что является невозможным. Другой подход приводит к более резкому торможению (≈ 1,8 м/с$^2$), но более плавному ускорению (≈ 2,7 м/с$^2$). Для полученных формул не важно ускорение происходит или замедление, если начальную и конечную скорости поменять то получим обратную картину (замедление заменится на ускорение). В этом случае однократное изменение ускорения может выглядеть более правдоподобным, чем двукратное.

В некоторых условиях невозможно применять первый и второй подходы, поэтому только третий подход даст результат (рис. 4). Однако, при уменьшении перемещения ускорение и замедление возрастают, что приводит к неадекватным результатам, это можно объяснить недостоверными




*а*)




*б*)

**Рис. 3. Скорость движения автомобиля при нарушении условия (34)**

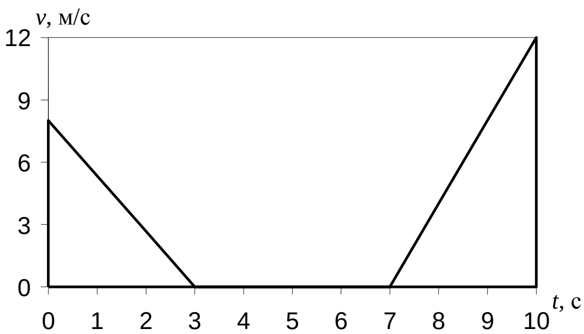



**Рис. 4. Скорость движения автомобиля при двукратном изменении ускорения**

данными о перемещении или скорости (так как если на границах интервала скорость ненулевая, а перемещения не произошло, то задача некорректна).

## 5. Заключение

Результатом работы является алгоритм построения функции интерполирующей движение транспортного средства по дискретным навигационным отметкам.

Определены границы использования формул в зависимости от перемещения $\Delta S_1$ на интервале:

– если $\Delta S_1 \geq \frac{\max[v_0, v_1]}{2} t_1$, то необходимо применять формулы (11), (12), (22)–(26);

– если $\frac{v_0 + v_1}{4} t_1 \leq \Delta S_1 \leq \frac{\max[v_0, v_1]}{2} t_1$, то необходимо применять формулы (11), (12), (22)–(26) или (11), (12), (29)–(33);

– если $\frac{\max[v_0, v_1]}{2} t_1 \leq \Delta S_1 \leq \frac{v_0 + v_1}{4} t_1$, то необходимо применять формулы (11), (12), (29)–(33) или (37)–(42);

– если $\Delta S_1 \leq \frac{\max[v_0, v_1]}{2} t_1$, то необходимо применять формулы (37)–(42).

Отметим, что задача легко может быть обобщена на случай большого количества интервалов (вычисления на каждом интервале простые), что позволит определить картину перемещения транспортного средства. Например, характер перемещения определяют энергетические критерии, требующие для расчетов функцию перемещения, а не отдельные данные замеров.

*Список литературы*

1. Воронов, Ю.Е. Сравнение спутниковых навигационных систем, применяемых на автомобильном транспорте / Ю.Е. Воронов, А.В. Косолапов // Вестн. Кузбас. гос. техн. ун-та. – 2004. – № 5. – С. 80–85.

2. Зырянов, В.В. Критерии оценки условий движения и модели транспортных потоков / В.В. Зырянов. – Кемерово : Изд-во Кузбас. политех. ин-та, 1993. – 164 с.

3. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.

4. Пржибыл, П. Телематика на транспорте / П. Пржибыл, М. Свитек ; под ред. В. В. Сильянова. – М. : Изд-во МАДИ (ГТУ), 2003. – 540 с.

---

**Traffic Modeling from Navigator Waypoints**

**E.B. Zvarych, M.E. Koryagin, O.Y. Slobodenyuk**

*Kuzbass State Technical University, Kemerovo*

**Key words and phrases:** interpolation; mathematic modeling; navigation system; traffic.

**Abstract:** A function of vehicular traffic based on navigation data collection is studied. The interpolation formulas considering the possibility of instantaneous acceleration are constructed.

---