УДК 517.982.3

ПЕРВОНАЧАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ С. БАНАХА ОБ ИЗОМОРФНОСТИ НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГИЛЬБЕРТОВЫМ

В.О. Яндаров

ГОУ ВПО «Грозненский государственный нефтяной институт им. акад. М.Д. Миллионщикова», г. Грозный

Рецензент Н.П. Пучков

Ключевые слова и фразы: банахово пространство; гиперподпространство; подпространство; сопряженность.

Аннотация: В работе рассматриваются бесконечномерные банаховы пространства X_1, X и их подпространства в ситуации, когда X_1 слабо компактно и плотно вложено в X $X_1 \in E(X)$.

В данной статье приводятся результаты, вытекающие из результатов исследований автора, опубликованных в работах [8–11], причем используется та же терминология. Например, под X_1 и X понимаются бесконечномерные банаховы пространства над одним и тем же числовым полем. Если X_1 слабо компактно и плотно (тождественно) вложено в X, то вводится обозначение $X_1 \in E(X)$, а если существует банахово пространство X_0 такое, что $X_0 \in E(X_1)$, то вводится обозначение $X_1 \in F$.

Теорема 1. Для того чтобы сепарабельное банахово пространство $X_1 \in E(X)$ не содержало подпространств, изоморфных ℓ_1, необходимо и достаточно, чтобы каждое замкнутое подпространство Y^* в X_1^* было изометрически изоморфно некоторому замкнутому подпространству сепарабельного банахова пространства X_0^*, сопряженного к некоторому замкнутому подпространству X_0 в X_1.

Доказательство. *Необходимость.* Если сепарабельное банахово пространство X_1 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1, то, как известно [8–11], X_1^* сепарабельно; при этом имеется в виду, что $X_1 \in E(X)$. Поэтому любое замкнутое подпространство Y^* в X_1^* изометрически изо-

---

Яндаров В.О. – сотрудник кафедры высшей математики Грозненского государственного нефтяного института им. акад. М.Д. Миллионщикова, г. Грозный.

морфно замкнутому подпространству сепарабельного пространства X_0^*, сопряженного к некоторому замкнутому подпространству X_0 в X_1.

Достаточность. Пусть каждое замкнутое подпространство Y^* в X_1^* удовлетворяет условию теоремы. Тогда X_1 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1. В самом деле, если предположить, что X_1 содержит подпространство, изоморфное ℓ_1, то, как известно [8–11], каждое бесконечномерное замкнутое подпространство пространства, изоморфного ℓ_1, содержит подпространство, изоморфное ℓ_1. Поэтому не каждое замкнутое подпространство Y^* в X_1^* будет замкнутым подпространством сепарабельного пространства X_0^*, сопряженного к некоторому замкнутому подпространству X_0 в X_1, а это противоречит условию требуемого утверждения. Теорема 1 доказана.

Определение. Банахово пространство Y называется n-кратно сопряженным к некоторому банахову пространству Y_1, если $Y = Y_1^{n*} (n \geq 1)$, т.е. Y изометрически изоморфно Y_1^{n*} при естественном вложении Y в Y_1^{n*}.

Теорема 2. Пусть $X_1 \in E(X)$ и X_1 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1. Тогда банахово пространство X_1^*, сопряженное к X_1, представимо в виде прямой суммы каких-то двух бесконечномерных замкнутых подпространств.

Доказательство. Как известно [11], если X_1 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1, то X_1^* представляет прямую сумму замкнутых подпространств Y_0^* и $\left(Y_0^{*\perp}\left(X_1^*\right)\right)^*$, где $Y_0 \subset X_1$, $Y_0 \in (W)$. Из сказанного следует, что теорема 2 будет доказана, если Y_0^* – сопряженное к Y_0 пространство будет прямой суммой бесконечномерных замкнутых подпространств. Введем оператор сужения P_Y пространства Y_0^* на замкнутое подпространство Y в Y_0, т.е. для любого $x^* \in Y_0^*$ выполняется равенство $P_Y\left(x^*\right) = x^*|Y$. Иными словами, $P_Y\left(Y_0^*\right)$ – множество всех элементов $x^* \in Y_0^*$, рассматриваемых на Y. Отсюда следует, что $P_Y\left(Y_0^*\right)$ изоморфно сопряженному или является сопряженным к подпространству Y. Однако $P_Y\left(Y_0^*\right)$ может и не быть замкнутым подпространством в Y_0^*. В нашем случае Y_0 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1, и $Y_0^* = Z^*$ – замыкание X^* в X_1^* (по норме). Очевидно, Y^* – замыкание X^*, рассматриваемого на Y, в X_1^*, т.е. в Y_0^*. Отсюда следует, что Y^* – замкнутое подпространство в Y_0^* и, кроме того, Y^* – сопряженное к Y пространство.

Таким образом, каждое замкнутое подпространство Y^* в Y_0^*, изоморфное сопряженному, есть сопряженное к некоторому замкнутому подпространству Y в Y_0, т.е. $P_Y\left(Y_0^*\right)=Y^*$. Оператор сужения P_Y пространства Y_0^* на любое замкнутое подпространство Y в Y_0 является проектором (непрерывным). Непрерывность его очевидна, так как тождественное отображение Y^* на Y^* непрерывно продолжается на Y_0, т.е. $P_Y\left(Y_0^*\right)=Y^*$ и $P_Y\left(Y^*\right)=Y^*$. Очевидно, $P_Y\left(P_Y\left(Y_0^*\right)\right)=P_Y\left(Y_0^*\right)=Y^*$. Нетрудно проверить, что оператор $I-P_Y$, где I – тождественный оператор, отображает Y_0^* на замкнутое подпространство в Y_0^* всех элементов $x^*\in Y_0^*$, обращающихся в нуль на Y. Таким образом, для любого замкнутого подпространства Y в Y_0, существует непрерывный оператор сужения – проектор P_Y, т.е. имеет место равенство:

$$Y_0^* = Y^* \oplus Y^{\perp}\left(Y_0^*\right), \tag{1}$$

где $Y^{\perp}\left(Y_0^*\right)$ – аннулятор Y в Y_0^*, т.е. $\left(I-P_Y\right)\left(Y_0^*\right)=Y^{\perp}\left(Y_0^*\right)$. Так как представление (1) справедливо для любого замкнутого подпространства Y в Y_0, то теорема 2 справедлива.

Замечание. Если Y^* – замкнутое подпространство в X_1^*, изоморфное сопряженному пространству, а $X_1^*=Z^*$, то Y^{**} совпадает с некоторым замкнутым подпространством в $W_X(X_1)$, которое имеет наименьшее замкнутое или неприводимое подпространство Y_1 в $X_1(X_1\subseteq X_1^{**})$. Очевидно, Y^* – сопряженное к Y_1 пространство. Очевидно, если Y^* – сопряженное к $Y_1\subseteq X_1$ пространство, то так как Y^* является замыканием X^*, рассматриваемого на Y_1, в пространстве X_1^*, то Y^{**} изометрически изоморфно в смысле естественного вложения некоторой замкнутой части $W_X(X_1)$, которую обозначим через $W_X(Y)$. Отсюда следует, что Y^* – замкнутое подпространство в X_1^*. В силу изометрического изоморфизма между Z^{**} и $W_X(X_1)$ (в смысле естественного вложения) и, следовательно, между Y^{**} и $W_X(Y)$ для каждого $y^{**}\in Y^{**}$ существует элемент $x_0\in W_X(Y)\subseteq W_X(X_1)$ такой, что $x^{**}\left(x^*\right)=x^*(x_0)\forall x^*\in X_1^*$ и, следовательно, $\forall y^*\in Y^*$. Тогда Y^* – замкнутое подпространство в X_1^*, определенное на $W_X(X_1)$. В самом деле, для любого $x^*\in X_1^*$ и $x^*\notin Y^*$ существует элемент $x\in W_X(X_1)=Z^{**}$ такой, что $x\left(x^*\right)=1$ и $x\left(Y^*\right)=0$. Отсюда ясно, что если x – ненулевой элемент из $W_X(X_1)$, то x – нулевой элемент на Y^*, а если рассматривать x на X_1^*, то $x\notin W_X(Y)$. Таким образом, Y^* определено и на $W_X(X_1)$ и $X_1^{**}=Y^{**}\oplus Y^{*\perp}\left(X_1^{**}\right)$.

Следствие 1. Пусть банахово пространство Y является n-кратно сопряженным к некоторому банахову пространству $\mathrm{X}_1 \in \mathrm{E}(\mathrm{X})$, не содержащему подпространств, изоморфных ℓ_1. Тогда Y представляет прямую сумму бесконечномерных замкнутых подпространств в $\mathrm{Y}(n \geq 1)$.

Данное доказательство использует доказательство теоремы 2.

Теорема 3. Пусть $\mathrm{X}_1 \in \mathrm{E}(\mathrm{X})$. Для того чтобы $\mathrm{X}_1^* = \mathrm{Z}^*$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого подпространства Y в X_1 выполнялось соотношение $\mathrm{P}_\mathrm{Y}\left(\mathrm{X}_1^*\right) = \mathrm{Y}^* \subset \mathrm{Z}^*$, где оператор P_Y непрерывен.

Доказательство. *Необходимость* справедлива на основании теоремы 2.

Достаточность. Пусть $\mathrm{P}_\mathrm{Y}\left(\mathrm{Z}^*\right) = \mathrm{Y}^*$. Это равенство выражает тот факт, что для любого замкнутого подпространства Y в X_1 пространство Y^*, сопряженное к Y, является замкнутым подпространством в Z^*. Предположим, что существует замкнутое подпространство Y в X_1 такое, что Y изоморфно ℓ_1.

По определению, Z^* – замыкание X^* в X_1^* и поэтому Z^* сепарабельно, если сепарабельно X, конечно, при условии, что $\mathrm{X}_1 \in \mathrm{E}(\mathrm{X})$. Так как Y сепарабельно, то будет сепарабельно и Z_Y^* – замыкание X^* в Y^*. Однако, сопряженное к Y пространство Y^* несепарабельно, так как Y изоморфно ℓ_1. Поэтому Y^* не может быть замкнутым подпространством в Z_Y^* и, следовательно, в Z^*. Следовательно, X_1 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1. Тогда, как известно, X_1^* представимо в виде прямой суммы:

$$\mathrm{X}_1^* = \mathrm{Z}^* \oplus \mathrm{Y}_0{}^{\perp}\left(\mathrm{X}_1^*\right), \tag{2}$$

где $\mathrm{Y}_0 \in (W)$ и $\mathrm{Y}_0{}^{\perp}\left(\mathrm{X}_1^*\right)$ – аннулятор Y_0 в $\mathrm{X}_1^* \subseteq \mathrm{X}_1^{***}$. Чтобы доказать равенство $\mathrm{X}_1^* = \mathrm{Z}^*$, надо доказать, что $\mathrm{Y}_0{}^{\perp}\left(\mathrm{X}_1^*\right) = \{0\}$ – множество из одного элемента нуль. Очевидно, $\mathrm{Y}_0^* = \mathrm{Z}^*$.

Докажем, что $\mathrm{Z}^* = \mathrm{X}_1^*$. Предположим, что существует элемент $x^* \in \mathrm{X}_1^* \setminus \mathrm{Z}^*$. Следовательно, x^* – дефлектор в X_1^* и пусть $x_0 \in \mathrm{X}_1 \setminus \mathrm{Y}_0$, такой, что $x^*(x_0) = 1$. Очевидно, существует ядро $\mathrm{Y} = \mathrm{Ker}\, y^*$ какого-нибудь дефлектора $y^* \in \mathrm{X}_1^* \setminus \mathrm{Z}^*$ $\left(x^* \neq y^*\right)$, которое содержит элемент x_0 $\left(\mathrm{Ker}\, y^* \in (W)\right)$. Следовательно, на Y тождественно в нуль не обращается дефлектор x^*. Очевидно, сопряженное к Y пространство Y^* не является подпространством в Z^*, что противоречит условию доказываемого утверждения. Следовательно, предположение о существовании дефлектора

$x^* \in X_1^*$, не верно и справедливо равенство $X_1^* = Z^*$, т. е. второе слагаемое в равенстве (2) – нуль – множество: $Y_0^{\perp}(X_1^*) = \{0\}$. Теорема 3 доказана.

Предложение 1. Банахово пространство m, сопряженное к ℓ_1, может быть представлено в виде прямой суммы бесконечномерных замкнутых подпространств, одно из которых изоморфно сопряженному и несепарабельно.

Доказательство. Пусть Y – некоторое бесконечномерное замкнутое подпространство в ℓ_1 и P_Y – оператор сужения m на Y. Так как $m = c_0^{**}$, где c_0 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1, то на основании теоремы 2 и ее следствия 1 пространство m представимо в виде прямой суммы:

$$m = Y^* \oplus Y^{\perp}(m),$$

где $Y^{\perp}(m)$ – аннулятор в m. Очевидно, Y^* несепарабельно, так как Y^* есть сопряженное к замкнутому подпространству в ℓ_1. В самом деле, как известно [4–6], каждое бесконечномерное замкнутое подпространство в ℓ_1 содержит подпространство, изоморфное ℓ_1, а сопряженное к ℓ_1 пространство несепарабельно. Так как подпространство Y в ℓ_1 можно указать таким, что Y^* и $Y^{\perp}(m)$ будут бесконечномерными, то предложение 1 доказано.

Предложение 2. Пусть $X_1 \in E(X)$ и X_1 не содержит подпространство, изоморфных ℓ_1. Тогда каждое замкнутое подпространство Y^* в X_1^*, изоморфное сопряженному, дополняемо.

Справедливость предложения 2 вытекает из рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 2.

Теорема 4. Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы каждое замкнутое подпространство $Y \subset X_1^*$ было изоморфно сопряженному, т.е. чтобы каждое сопряженное к Y пространство Y^* имело неприводимое подпространство Y_1 такое, что $Y_1^* = Y^*$, необходимо и достаточно, чтобы X_1 было рефлексивно.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть Y – произвольное замкнутое подпространство в X_1^*, изоморфное сопряженному пространству, т.е. $Y = Y_1^*$, где Y_1 – некоторое замкнутое подпространство в X_1. Тогда выполняется равенство (2):

$$X_1^* = Y_1^* \oplus Y_1^{\perp}(X_1^*). \qquad (*)$$

Пространство Z^*, которое (по определению) является замыканием пространства X^*, сопряженного к X, в пространстве X_1^*, сопряженном к X_1, является замкнутым подпространством в X_1^*: $Z^* \subset X_1^*$. Тогда выполняется равенство (*), когда $Y_1^* = Z^*$, т.е. выполняется равенство (2), когда $Y_0 = Y_1 \subset X_1$. Рассуждая так же, как и в доказательстве достаточности теоремы 3, получаем $X_1^* = Z^*$. Предположим, что выполняется неравенство: $X_1 \neq W_X(X_1)$. Тогда для любого элемента $x \in W_X(X_1) \setminus X_1$ существует элемент $x^* \in W_X(X_1)^*$, сопряженного к $W_X(X_1)$, такой, что

$$x^*(x) = 1, \quad x^*(X_1) = 0,$$

где $x^*(X_1) = 0$ равносильно равенствам: $x^*(x) = 0 \;\; \forall x \in X_1$.

Ядро $Y = Kerx \subset X_1^*$ элемента $x \in W_X(X_1) \setminus X_1$, рассматриваемого как линейный непрерывный функционал на пространстве $X_1^* = Z^*$, сопряженном к X_1, тотально на X_1 и поэтому оно не является регулярно замкнутым в X_1^*, т.е. не является $(*)$ – замкнутым в топологии $\sigma = \sigma(X_1^*, X_1)$. Отсюда следует, что оно не является и сопряженным к X_1, так как Y – собственное замкнутое подпространство в X_1^*. Это противоречит условию доказываемого утверждения. Следовательно, предположение о неравенстве $X_1 \neq W_X(X_1)$, не верно. Тогда равенства $X_1^* = Z^*$, $X_1 = W_X(X_1)$ равносильны рефлексивности. Необходимость доказана, а достаточность очевидна. Теорема 4 доказана.

Предложение 3. Пусть X_1^{n*} – n-кратно сопряженное к некоторому банахову пространству $X_1 \in E(X)$ и $X_1 \in F$.

Для того чтобы X_1 не содержало подпространств, изоморфных ℓ_1, необходимо и достаточно, чтобы существовал непрерывный проектор $P_{X_1^{(n-3)*}}$ такой, что

$$P_{X_1^{(n-3)*}}\left(X_1^{n*}\right) = Z^{(n-2)*}, \tag{3}$$

где Z^* – замыкание в X_1^* сопряженного к X пространства X^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Необходимость*. Так как $X_1 \in E(X)$ и $X_1 \in F$ (см. в начале статьи), то, как известно [11], из того, что X_1 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1, следует, что $X_1^* = Z^*$. Отсюда следует, что выполняется равенство (3).

Достаточность. Пусть выполняется (3) и $n = 3$. Тогда $P_{X_1}\left(X_1^{3*}\right) = Z^*$. Так как $P_{X_1}\left(X_1^{3*}\right) = X_1^*$, из предыдущего равенства следует, что $X_1^* = Z^*$. Отсюда следует, что X_1 не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1.

Теорема 5. Во всяком рефлексивном банаховом пространстве X_1 всякое бесконечномерное замкнутое подпространство дополняемо.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как X_1 рефлексивно, то рефлексивно и X_1^*. Следовательно, по известной теореме 3 из [11] и теореме 4 каждое замкнутое подпространство в X_1^* изоморфно сопряженному пространству. Отсюда следует, что существует непрерывный проектор-оператор сужения P_Y на любое замкнутое подпространство Y в X_1: $P_Y\left(X_1^*\right)=Y^*$. Следовательно, пространство X_1^* представимо в виде прямой суммы

$$X_1^* = Y^* \oplus Y^{\perp}\left(X_1^*\right), \tag{4}$$

где $Y^{\perp}\left(X_1^*\right)$ – аннулятор Y в X_1^*, который является замкнутым подпространством в X_1^*. Равенство (4) доказывает теорему 5.

В самом деле, переходя к сопряженным пространствам в равенстве (4), получим

$$X_1^{**} = Y^{**} \oplus \left(Y^{\perp}\left(X_1^*\right)\right)^*. \tag{5}$$

Так как X_1 рефлексивно, то рефлексивными являются и замкнутые подпространства в X_1. Поэтому равенство (5) можно записать в виде

$$X_1 = Y \oplus \left(Y^{\perp}\left(X_1^*\right)\right)^*. \tag{6}$$

Равенство (6) показывает, что каждое замкнутое подпространство $Y \subset X_1$ дополняемо (в других работах нами показано, что $\left(Y^{\perp}\left(X_1^*\right)\right)^* = Y^{*\perp}\left(X_1^{**}\right)$).

Таким образом, теорема 5 доказана, если выполняется хотя бы одно из равенств (4) и (6).

Можно привести другой вариант доказательства теоремы 5.

Из того, что X_1 рефлексивно следует, что $X_1^* = Z^*$, так как в случае рефлексивности можно рассматривать ситуацию, когда $X_1 \in E\left(X_1\right)$, т.е. X_1 слабо компактно и плотно вложено в X_1. Тогда $X_1^* = Z^*$ – замыкание сопряженного к X_1 пространства X_1^* в X_1^* совпадает с X_1^* и Z^*, кроме того, $W_X\left(X_1\right) = Z^{**} = X_1^{**}$. Поэтому если $x \in X_1 \setminus Y_0$, то ядро $\operatorname{Ker} x \subset Y_0^*$ не будет тотально на Y_0, так как в противном случае из того, что $x \in X_1 \setminus Y_0$, следовало бы, что $x \in W_{X_1}\left(Y_0\right) \setminus Y_0$. Но этого не может быть, так как Y_0 рефлексивно и $Y_0 = Y_0^{**} = W_{X_1}\left(Y_0\right)$. Тогда $\operatorname{Ker} x \subset Y_0^*$ будет не тотально на Y_0. Пусть x_0 – элемент $x \in X_1$, рассматриваемый на Y_0^*: $x|Y_0^* = x_0$. Тогда $x - x_0 \in Y^{*\perp}\left(X_1\right)$. Таким образом, если положить $y = x - x_0$, получаем единственное представление элемента x: $x = x_0 + y$, где $x_0 \in Y$, $y \in Y^{*\perp}\left(X_1\right)$. Следовательно, каждое замкнутое подпространство $Y \subset X_1$ дополняемо (супердополняемо) в X_1: $X_1 = Y \oplus Y^{*\perp}\left(X_1\right)$. Теорема 5 доказана.

Предложение 4. Для того чтобы X_1 было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы каждое дополняемое в X_1^* замкнутое подпространство было изоморфно сопряженному пространству.

Доказательство. *Необходимость* очевидна на основании теоремы 5.

Достаточность. Если каждое бесконечномерное и дополняемое замкнутое подпространство в X_1^* изоморфно сопряженному пространству, то будет изоморфно сопряженному любое гиперподпространство в X_1^*, а это на основании теоремы 3 из [11] означает, что X_1^* рефлексивно. Отсюда следует рефлексивность и X_1.

Предложение 5. Пусть $X_1 \in E(X)$. Следующие утверждения эквивалентны: 1) X_1 рефлексивно; 2) каждое гиперподпространство в X_1 изоморфно сопряженному пространству; 3) каждое гиперподпространство в $W_X(X_1)$ изоморфно второму сопряженному к некоторому замкнутому подпространству в X_1.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 2) вытекает на основании теоремы из [11].

Из утверждения 3) следует, что X_1^{**} изоморфно $W_X(X_1)$. Поэтому каждое гиперподпространство в $W_X(X_1)$ будет сопряженным к некоторому замкнутому подпространству в X_1^*, которое также будет изоморфно сопряженному. Следовательно, каждое гиперподпространство в X_1^* является изоморфным сопряженному пространству, что на основании теоремы 3 из [11] означает рефлексивность X_1. Таким образом, справедлива импликация 3) → 1).

Предложение 6. Для того чтобы банахово пространство X_1 было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы всякое представление X_1^* в виде прямой суммы своих замкнутых подпространств было прямой суммой замкнутых подпространств в X_1^*, изоморфных сопряженным пространствам.

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Так как каждое гиперподпространство $H_{X_1^*}\left(x^{**}\right)$ в $X_1^* / x^{**} \in X_1^{**} /$ дополняемо, то по условию предложения оно изоморфно сопряженному пространству. Следовательно, по теореме 3 из [11], пространство X_1^* рефлексивно вместе с пространством X_1.

Известна следующая проблема [4]: каждое ли банахово пространство есть прямая сумма каких-то двух бесконечномерных замкнутых подпространств? Насколько нам известно, эта проблема ни положительно и ни отрицательно не решалась. Некоторый прогресс в ее положительном решении осуществляют теоремы 2 и 5.

Известно [5, 7, 14], что если в банаховом пространстве все замкнутые подпространства дополняемы, то оно изоморфно гильбертову пространству. Это утверждение корректируется теоремой 5. Очевидно, не всякое рефлексивное пространство и банахово пространство, не содержащее подпространств, изоморфных ℓ_1, тем более, будут изоморфными гильбертовым пространствам. Например, пространство $L_P[0,1]$ ($1< p < \infty$) рефлексивно и не изоморфно гильбертовому пространству при $p \neq 2$. В частности, это пространство относится к классу пространств, для которых верна теорема 5. Например, теорема 5 верна и для пространств О.В. Бесова [2]. Далее, пространство c_0 также обладает свойством: каждое дополняемое замкнутое подпространство в c_0 содержит подпространство, изоморфное c_0. Более того, каждое бесконечномерное замкнутое подпространство в c_0 дополняемо. Этот факт новый и будет вытекать из доказанной ниже теоремы. Таким образом, напрашивается перестройка в теории банаховых пространств, которая поставила бы все результаты в ней на свои места. Это касается той ее части, которая разрабатывается, начиная с 1950 года.

Отметим, что пространство $C^*[0,1]$, сопряженное к $C[0,1]$, содержит подпространство $L_1[0,1]$, неизоморфное сопряженному. Последний результат принадлежит И.М. Гельфанду [3] и является отправным в некоторых исследованиях автора. Из сказанного выше следует, что не существует оператора сужения P_Y (непрерывного) пространства $C^*[0,1]$ на какое-нибудь замкнутое подпространство Y в $C[0,1]$ такое, что $P_Y\left(C^*[0,1]\right) = L_1[0,1]$.

Если предположить, что это не так, то существует замкнутое подпространство Y в $C[0,1]$ такое, что $P_Y\left(C^*[0,1]\right) = L_1[0,1]$. Так как $C[0,1] \in E\left(L_2[0,1]\right)$, то $Z^* = L_1[0,1]$ – замыкание $L_2^*[0,1]$ в $C^*[0,1]$. Следовательно, $Y \in (W)$, т.е. $W_{L_2[0,1]}(Y) = W_{L_2[0,1]}\left(C[0,1]\right) = L_\infty[0,1]$. Кроме того, Y не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1, так как $Y^* = L_1[0,1]$ сепарабельно. Отсюда, как это было ранее нами доказано, будет следовать, что $C[0,1]$ не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1, что, как известно, неверно. Таким образом, не существует непрерывного оператора сужения P_Y пространства $C^*[0,1]$ на какое-нибудь замкнутое подпространство Y в $C[0,1]$ со свойством $Y \in (W)$, т.е. $W_{L_2[0,1]}(Y) = W_{L_2[0,1]}\left(C[0,1]\right)$.

Пример. Пусть $X_1 = c_0$, $X_1^* = \ell_1$ и $X_1^{**} = m$. Пусть $x_0 \notin c_0$. Очевидно, можно считать, что $H_{\ell_1}(x_0)$ не изоморфно сопряженному пространству, так как $W_{\ell_2}(\ell_1) = \ell_1 = W_{\ell_2}\left(H_{\ell_1}(x_0)\right)$. Следовательно, не существует оператора сужения (непрерывного) P_Y пространства ℓ_1 на какое-нибудь замкнутое подпространство Y в c_0 такого, что $P_Y(\ell_1) = H_{\ell_1}(x_0)$. Таким образом, хотя $\ell_1 = R \oplus \mathrm{H}_{\ell_1}(x_0)$, т.е. хотя ℓ_1 прямая сумма своих подпространств, не существует оператора сужения (непрерывного) $\mathrm{P_Y}$.

Пример. Пусть $\mathrm{X}_1 = C'[0,1]$ – пространство всех непрерывно дифференцируемых функций на $[0,1]$, $\mathrm{X}_1^* = C'^*[0,1]$ – сопряженное к $C'[0,1]$ пространство, $W_C(C'[0,1]) = \mathrm{H}_1[0,1]$ – пространство всех функций на $[0,1]$, удовлетворяющих условию Липшица. Не существует непрерывного оператора сужения $\mathrm{P}_{C'[0,1]}$ пространства $\mathrm{H}_1^*[0,1]$ на $C'[0,1]$ такого, что $\mathrm{P}_{C'}(\mathrm{H}_1^*[0,1]) = C'^*[0,1]$, где $C' = C'[0,1]$. Если бы это было не так, то $C'[0,1]$ не содержало бы подпространств, изоморфных ℓ_1.

Например, если X_1 – произвольное банахово пространство, то существует непрерывный оператор сужения $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_1}(\mathrm{X}_1^{***}) = \mathrm{X}_1^*$ пространства X_1^{***} на $\mathrm{X}_1 \subseteq \mathrm{X}_1^{**}$. Отсюда следует, что пространство X_1^{***} есть прямая сумма пространства X_1^* и некоторого замкнутого подпространства в X_1^{***}, которое можно считать аннулятором X_1 в X_1^{***} – $\mathrm{X}_1^{\perp}(\mathrm{X}_1^{***})$. Итак, $\mathrm{X}_1^{***} = \mathrm{X}_1^* \oplus \mathrm{X}_1^{\perp}(\mathrm{X}_1^{***})$.

Например, пространство $m^* = c^{***} = \ell_1 \oplus c_0^{\perp}(m^*)$, где $c_0^{\perp}(m^*)$ – аннулятор c_0 в m^*. Нетрудно заметить, что $m = W_{\ell_2(2^{-n})}(c_0)$, где $c_0 \in \mathrm{E}(\ell_2(2^{-n}))$. Следовательно, $W^*_{\ell_2(2^{-n})}(c_0) = \ell_1 \oplus c_0^{\perp}\left(W^*_{\ell_2(2^{-n})}(c_0)\right)$. В общем случае, для произвольных банаховых пространств $\mathrm{X}_1 \in \mathrm{E}(\mathrm{X})$ это не так, т.е. не всегда $W_{\mathrm{X}}^*(\mathrm{X}_1) = \mathrm{X}_1^* \oplus \mathrm{X}_1^{\perp}(W_{\mathrm{X}}^*(\mathrm{X}_1))$. Если же пространство X_1 рефлексивно, то очевидно $W_{\mathrm{X}}^*(\mathrm{X}_1) = \mathrm{X}_1^*$ и $\mathrm{X}_1^{\perp}(W_{\mathrm{X}}^*(\mathrm{X}_1)) = \{0\}$. Если же пространство $\mathrm{X}_1 = \ell_1$, то $W_{\ell_2}^*(\ell_1) = m$ и здесь $\ell_1^{\perp}(W_{\ell_2}^*(\ell_1)) = \{0\}$.

Список литературы

1. Бурбаки, Н. Топологические векторные пространства / Н. Бурбаки. – М. : Иностранная литература, 1959. – 410 с.
2. Бесов, О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1975. – 480 с.
3. Гельфанд И.М. Abstrakte Funktioneu und lineare Operatoren // Матеем. сборник. – 1938. – No. 4. – S. 235–285.
4. Кадец, М.И., Левитан Б.М. В кн. Математическая энциклопедия. – М. : Советская энциклопедия, 1977. – Т. 1. – 1051 с.
5. Мильман, В.Д. Геометрическая теория банаховых пространств / В.Д. Мильман // Успехи математических наук. – 1971. – Т. 26, №6. – С. 73–149.

6. Петунин, Ю.И. Теория характеристик подпространств и ее приложения / Ю.И. Петунин, А.Н. Пличко. – Киев : Вища школа, 1980. – 217 с.

7. Rosenthall? H.P. Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces / H.P. Rosenthall // Bull Amer. Math. Soc. – 1978. – V. 84, No. 5. – Pp. 803–831.

8. Яндаров, В.О. Критерий рефлексивности и сопряженности некоторых банаховых пространств / В.О. Яндаров // Сообщения АН Груз. ССР. – 1987. – Т. 125, №3. – С. 481–484.

9. Яндаров, В.О. Свойства некоторых банаховых пространств, не содержащих подпространств, изоморфных ℓ_1 / В.О. Яндаров // Сообщения АН Груз. ССР. – 1987. – Т. 126, № 1. – С. 45–48.

10. Яндаров, В.О. Слабо компактно вложенные банаховы пространства / В.О. Яндаров // Сообщения АН Груз. ССР. – 1987. – Т. 126, №3. – С. 493–496.

11. Яндаров, В.О. О некоторых проблемах в теории банаховых пространств / В.О. Яндавро // Укр. мат. журн. – 1987. – Т. 39, №4. – С. 512–517.

12. Яндаров, В.О. Рефлексивность и прямые суммы банаховых пространств / В.О. Яндаров. – Рук. деп. в ВИНИТИ, 1988, №5878 – В88. – 48 с.

13. Яндаров, В.О. Разложения банаховых и гильбертовых пространств / В.О. Яндаров. – Рук. деп. В ВИНИТИ, 1993, №92 – В93. – 23 с.

14. Яндаров, В.О. Дополняемые подпространства банаховых пространств / В.О. Яндаров // Исслед. по интегро-дифферн. уравнениям. – Бишкек : Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 202–214.

15. Яндаров, В.О. Пространства со свойством Пелчиньского / В.О. Яндаров // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. – 2007. – Т. 2, № 4(10). – С. 119–129.

Gilbertov's Initial Solution to S.Banach's Problem of Some Banach Space Isomorphism

V.O. Yandarov

Grozny State Oil University named after M.D. Millionschikov, Grozny

Key words and phrases: Banach space; hypersubspace; isomorphic to conjugate;subspace; conjugacy.

Abstract: The paper deals with infinite-dimensional Banach spaces X_1, X and their subspaces when X_1 is slightly compact and tightly embedded in X $X_1 \in E(X)$.
