

## ИССЛЕДОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ЦЕНТРОБЕЖНОГО СПЕКАНИЯ И ПРИПЕКАНИЯ В ПОРОШКОВЫХ СИСТЕМАХ

Т.М. Абрамович, Н.И. Витиска, Д.В. Задорожний

*ГОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт», г. Таганрог*

*Рецензент В.Ф. Першин*

**Ключевые слова и фразы:** вычислительный эксперимент; кинетика уплотнения; модели пористого тела; порошковые системы; порошковый слой; центробежное спекание и припекание.

**Аннотация:** Предложены уточненные математические модели, описывающие процессы центробежного спекания и припекания. Рассмотрено несколько теоретических подходов при описании закрепления порошковых систем с учетом различных условий, а именно: вязкое течение в окрестности выделенной поры; сферическая симметрия протекания процессов; различие в активности подсистем; наноуровень активирования процессов спекания и нагрев припекаемого слоя с некоторой постоянной скоростью. Получены сложные дифференциальные уравнения процессов спекания и припекания, решение которых в настоящее время возможно осуществить на современных вычислительных системах. Приведены результаты отдельных расчетов, выполненных на основе полученных соотношений при ограничениях в конструируемой модели.

### Введение

В работе рассматриваются полные физические модели центробежных процессов спекания и припекания к основе порошковых систем, представляющих из себя сплошные термодинамические существенно неравновесные системы, обладающие значительной избыточной свободной энергией за счет развитой поверхности, обусловленной наличием пор.

Известно [1, 2], что интенсивность тепло- и массообмена в порошковой системе возрастает с повышением температуры и увеличением сило-

---

Витиска Н.И. – доктор технических наук, профессор, проректор Таганрогского государственного педагогического института; Задорожний Д.В. – аспирант ТГПИ, г. Таганрог.

вого воздействия, а также существенно зависит от наследственных свойств порошковых композиций. Активность припекаемых к подложке порошковых слоев обусловлена их повышенной неравновесностью, и активирование процесса припекания сводится к уменьшению тех дефектов, которые интенсифицируют процессы ликвидации в системе двумерных и трехмерных макродефектов, стимулируют образование прочных связей между частицами порошка друг с другом и частицами порошка с подложкой.

Строгая и последовательная теория процессов спекания и припекания часто строится на основе общих принципов термодинамики необратимых процессов и физической кинетики [3].

Мы также считаем, что превалирующим процессом в моделях, вполне удовлетворительно описывающих центробежное спекание и припекание порошковых слоев, является вязкое течение пористого тела в условиях высокой температуры. Температуру спекания обычно полагают  $T_{сп} \approx (0,8...0,9)T_{пл}$ , где  $T_{пл}$  – температура плавления основного компонента порошковой смеси.

В процессе вязкого течения порошкового тела, в соответствии с модельными представлениями о нем, мы полагаем это тело сплошным. Изменения объема  $V$  связаны с изменением его пористости  $\Pi$  и плотности тела  $\rho = \rho_m(1 - \Pi)$ , где плотность материала частиц порошка  $\rho_m$  можно считать постоянной, так как нагрузки, действующие на тело, относительно невелики [2, 4].

При исследованиях рассматривают, прежде всего, соотношение между коэффициентами сдвиговой вязкости  $\eta$  и объемной вязкости  $\zeta$  для пористого тела, а также считают неограниченной пористую среду, причем в начале координат помещен центр одной из пор. В модели поры принимают одинаковыми, сферическими, радиус  $r$  каждой из которых может достигнуть значения  $R$ . Далее полагают процессы усадки пор достаточно медленными, а количественным выражением усадки  $\dot{U}$  является  $\text{div} \dot{U} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$ , т.е. величина уменьшения объема  $V$  всех пор тела за единицу времени  $t$ .

Если в моделях рассматривать вязкое течение в окрестности выделенной поры, то естественно полагать сферическую симметрию протекающих процессов и можно считать  $\dot{U} \sim \bar{r}$ , а потому  $\text{rot} \dot{U} = 0$  ( $\text{rot} \bar{r} = 0$ ), а  $\nabla \text{div} \dot{U} = 0$ .

Как показано в [5], коэффициент объемной вязкости среды  $\zeta = \frac{4}{3} \eta(1 - \Pi)/\Pi$ , который при  $\eta = \eta_m(1 - \Pi)^2$ , имеет вид  $\zeta = \frac{4}{3} \eta \frac{(1 - \Pi)^3}{\Pi}$ , используемый в последующих соотношениях ( $\eta_m$  – коэффициент сдвиговой вязкости материала частиц порошка).

## Кинетика уплотнения порошковых систем в модели вязкого течения пористого тела

Здесь и ниже мы будем придерживаться модели вязкого течения пористого тела, т.е. полагаем для тензора вязких напряжений пористой системы

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(V)} = 2\eta \left( \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \dot{U} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \dot{U}, \quad (1)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\dot{U}_\alpha}{dX_\beta} - \frac{d\dot{U}_\beta}{dX_\alpha} \right)$  – компоненты вектора скорости деформаций;

$\dot{U}_\alpha$  – вектор скорости деформации пористого тела,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots$ ;

$\eta = \eta_m g_1(\Pi)$ ,  $\zeta = \eta_m g_2(\Pi)$ ,  $g_1 = (1 - \Pi)^2$ ,  $g_2 = \frac{4(1 - \Pi)^3}{3\Pi}$ , которые будут использованы для анализа кинетики припекания порошковых слоев к подложке в различных условиях.

Активность металла частиц порошка по отношению к процессам высокотемпературной ползучести, обеспечивающим вязкое течение в порошковом теле, можно охарактеризовать с помощью кинетической константы  $A = \frac{1}{\eta_m}$ .

Для оценки изменения этой величины с течением времени выберем модель спекающейся среды, как «раствор» подсистем различной активности по отношению к спеканию [2]. Различие в активности обусловлено различием структур подсистем (жидкофазные прослойки; области повышенной концентрации дефектов структуры в поверхностных и объемных фазах частиц порошка), содержанием источников и стоков диффузий различной активности.

По мере развития процесса содержание неравновесных элементов структуры в пористой системе снижается, происходит ее перестройка, начинают преобладать состояния пониженной активности, и тогда  $A_1 \gg A_2 \gg A_3 \gg \dots \gg A_i$ , где  $A_i$  – константы подсистем различной активности.

Далее считаем, что кинетическая константа пористого тела

$$A = \sum_{i=1}^n A_i f_i, \text{ где } f_i \text{ – объемная функция для } i\text{-ой подсистемы в «растворе»}$$

или вероятность реализации  $i$ -ой подсистемы в данный момент времени;  $n$  – число подсистем.

Если ограничиться приближением  $n = 2$ , имеем  $f_1 \cong e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ ,  $f_2 = 1 - f_1$ , здесь  $\tau_1$  – время жизни подсистемы с кинетической константой  $A_1$ . Тогда влияние температуры на величины  $A_1, A_2, \tau_1$  можно учесть следующим образом:  $A_1 = A_{10} e^{-\frac{E_{a1}}{kT}}$ ,  $A_2 = A_{20} e^{-\frac{E_{a2}}{kT}}$ , а частоту переходов  $1/\tau_1$  от подсисте-

мы 1 к подсистеме 2 оцениваем согласно  $\frac{1}{\tau_1} = \nu_0 e^{-\frac{\Delta\Phi_a}{kT}}$ , где  $E_{a1}$  и  $E_{a2}$  – энергии активации процессов диффузии, ответственных за высокотемпературную ползучесть в подсистемах 1, 2;  $A_{10}$  и  $A_{20}$  – слабо зависящие от температуры константы;  $\Delta\Phi_a$  – изменение термодинамического потенциала при переходе активных комплексов через энергетический барьер, разделяющий подсистемы 1 и 2;  $\nu_0$  – характерная частота атомов активированных комплексов в области барьера (наноуровень активирования процессов спекания).

В процессе спекания  $f_1 \rightarrow 0$  и  $f_2 \rightarrow 1$ .

Если учесть (1) и для медленно протекающих процессов спекания и

припекания  $\langle \dot{\vartheta} \rangle = \frac{\iint (\bar{P}^{(e)} \bar{r}) dS}{3\Delta V \zeta}$ , где  $\bar{P}^{(e)}$  – сила внешнего давления на границе слоя, отнесенная к  $m^2$  площадки поверхности;  $\bar{r}$  – радиус-вектор в точке приложения силы. Полученное соотношение для  $\langle \dot{\vartheta} \rangle$  позволяет рассчитать кинетику уплотнения слоя для многих практически важных случаев.

Так, например, для слоя порошка в жесткой обойме зададим объем следующим образом  $0 \leq x_1 \leq l_1$ ,  $0 \leq x_2 \leq l_2$ ,  $0 \leq x_3 \leq h$ , где  $h$  – высота слоя, тогда вычисление поверхностного интеграла приводит к выражению  $\langle \dot{\vartheta} \rangle = -\frac{3}{4} \frac{Ap\Pi}{(1-\Pi)^2}$ , которое с учетом  $A = \frac{1}{\eta_m} = A_1 f_1 + A_2 f_2 = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 (1 - e^{-t/\tau_1})$  может быть проинтегрировано в предположении постоянства температуры спекания и тем самым будет получено уравнение кинетики уплотнения слоя в жесткой обойме в виде:

$$\Delta F = F(\Pi) - F(\Pi_0) = \frac{3}{4} (A_1 - A_2) (1 - e^{-t/\tau_1}) \tau_1 p + \frac{3}{4} A_2 p t. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь случай уплотнения пористой системы, если принять, что припекаемый слой нагревается с некоторой постоянной скоростью  $W = \frac{dT}{dt}$ .

Если упрощенно принять в интервале температуры нагревания для усредненной по этому интервалу кинетической константы  $\bar{A} = A_0 e^{-\frac{T_a}{T}}$ , а  $T_a = \frac{E_a}{k}$ , и сделать замены при интегрировании  $\langle \dot{\vartheta} \rangle$  согласно  $t = \frac{\Delta T}{W}$ ,  $\xi = \frac{T_a}{T}$ , то получим следующее уравнение для процесса уплотнения слоя [5, 6]:

$$\Delta F = \frac{3}{4} A_0 p \frac{T_a}{W} \left[ \frac{T}{T_a} e^{-\frac{T_a}{T}} + Ei\left(-\frac{T_a}{T}\right) \right] - \frac{3}{4} A_0 p \frac{T_a}{W} \left[ \frac{T_0}{T_a} e^{-\frac{T_a}{T_0}} + Ei\left(-\frac{T_a}{T_0}\right) \right],$$

$Ei(-\xi) = -\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi$ , причем при  $\xi \gg 1$  можно приближенно принять

$$Ei(-\xi) \approx e^{-\xi} \left( \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi} \right).$$

Поэтому для  $T \ll T_a$  уравнение принимает вид

$$\Delta F = \frac{3}{4} A_0 p \frac{T_a}{W} \left( \frac{T}{T_a} \right)^2 e^{-\frac{T_a}{T}}. \quad (3)$$

### Вычислительный эксперимент по кинетике уплотнения порошкового слоя

Используя (2), получаем изотермы уплотнения порошка ПГ–СРЧ (Ni – 70,61 %; Cr – 16,5 %; В – 3,62 %; Si – 4,2 %; С – 0,65 %; Fe – 4,42 %), которые при припекании в условиях  $p = 30$  МПа и  $T_{\text{сп}} = 1023 \dots 1173$  К, как видно из рис. 1, совпадают с экспериментальными измерениями, отмеченными точками.

Влияние температуры на кинетические константы  $A_1$  и  $A_2$  модели припекания показано на рис. 2. Прямые на этом рисунке соответствуют величинам  $\ln A_i$ .

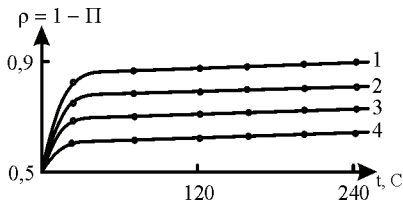


Рис. 1

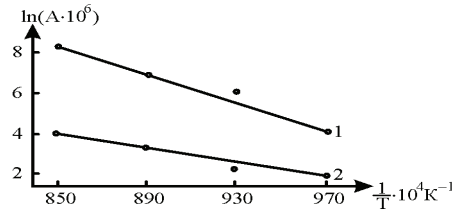


Рис. 2

На рис. 3 представлена теоретическая зависимость  $\ln \frac{1}{\tau_1}$  от величины  $1/T$ .

На рис. 4 представлены экспериментальные зависимости пористости слоя порошка ПГ–СРЧ от температуры при его припекании.

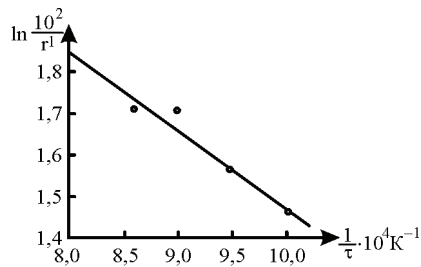


Рис. 3

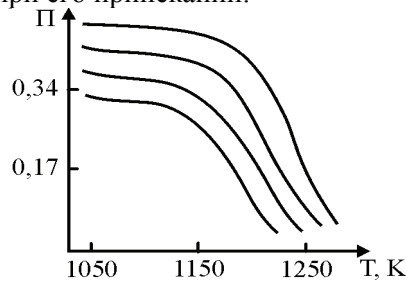


Рис. 4

**Кинетика уплотнения порошковых слоев  
в условиях центробежного припекания**

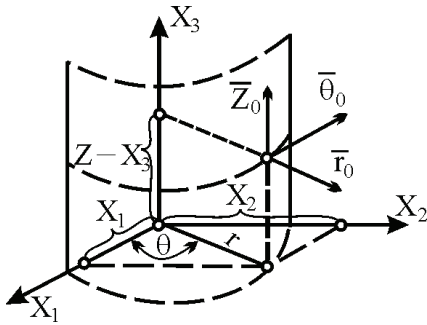


Рис. 5

Порошковый цилиндрический слой представлен на рис. 5, для которого  $\text{div} \hat{\sigma} + \rho \bar{f} = \rho \ddot{U}$ , где  $\rho \bar{f}$  – вектор силы, отнесенный к  $\text{м}^3$  тела;  $\rho$  – плотность порошкового тела;  $\ddot{U}$  – вектор ускорения;  $\hat{\sigma}$  – тензор напряжений.

Тензор напряжений в цилиндрических координатах удобно записать с помощью трех напряжений, отнесенных к элементарным площадкам с нормальными к ним  $\bar{r}_0, \bar{\theta}_0, \bar{z}_0$ , причем

$$|\bar{r}_0| = |\bar{\theta}_0| = |\bar{z}_0| = 1 \text{ и } \hat{\sigma} = (\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z), \text{ где}$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_r = \sigma_{rr} \bar{r}_0 + \sigma_{r\theta} \bar{\theta}_0 + \sigma_{rz} \bar{z}_0, \\ \bar{\sigma}_\theta = \sigma_{\theta r} \bar{r}_0 + \sigma_{\theta\theta} \bar{\theta}_0 + \sigma_{\theta z} \bar{z}_0, \\ \bar{\sigma}_z = \sigma_{zr} \bar{r}_0 + \sigma_{z\theta} \bar{\theta}_0 + \sigma_{zz} \bar{z}_0. \end{cases}$$

Вектор скорости деформации  $\dot{u}$  может быть записан в цилиндрических координатах в виде:  $\dot{U} = \dot{U}_r \bar{r}_0 + \dot{U}_\theta \bar{\theta}_0 + \dot{U}_z \bar{z}_0$ .

Уравнения движения пористого тела примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \rho f_r = \rho \ddot{U}_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = \rho \ddot{U}_\theta, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho f_z = \rho \ddot{U}_z. \end{cases}$$

Здесь и ниже полагается, что  $\sigma_{\alpha\beta} \equiv \sigma_{\alpha\beta}^{(V)}$ , причем в цилиндрических координатах уравнение (1) преобразуется в следующую систему:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \tilde{\lambda} \dot{\vartheta} + 2\eta \dot{\epsilon}_{rr}, \quad \sigma_{r\theta} = 2\eta \dot{\epsilon}_{r\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} = \tilde{\lambda} \dot{\vartheta} + 2\eta \dot{\epsilon}_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\theta z} = 2\eta \dot{\epsilon}_{\theta z}, \\ \sigma_{zz} = \tilde{\lambda} \dot{\vartheta} + 2\eta \dot{\epsilon}_{zz}, \quad \sigma_{rz} = 2\eta \dot{\epsilon}_{rz}. \end{cases}$$

Выражения для компонент тензора скоростей деформаций в цилиндрических координатах:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{U}_r}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial z}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial \theta} - \frac{\dot{U}_\theta}{r} + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial r} \right), \\ \dot{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial \theta} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial z} + \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial r} \right). \end{cases}$$

Отметим также, что

$$\operatorname{div} \dot{U} \equiv \dot{\vartheta} = \dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{U}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial z}.$$

Предварительно получаем уравнения движения пористой среды:

$$\begin{cases} (\tilde{\lambda} + 2\eta) \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial r} - \frac{2\eta}{r} \left[ \frac{\partial \dot{\omega}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r \dot{\omega}_\theta)}{\partial z} \right] + \rho f_r = \rho \ddot{U}_r, \\ (\tilde{\lambda} + 2\eta) \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial \theta} - 2\eta \left[ \frac{\partial \dot{\omega}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\omega}_z}{\partial r} \right] + \rho f_\theta = \rho \ddot{U}_\theta, \\ (\tilde{\lambda} + 2\eta) \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial z} - \frac{2\eta}{r} \left[ \frac{\partial (r \dot{\omega}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \dot{\omega}_r}{\partial \theta} \right] + \rho f_z = \rho \ddot{U}_z, \end{cases}$$

в которых введены выражения компонент вращения:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_z = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial \theta} - \frac{\dot{U}_\theta}{r} - \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial r} \right), \\ \dot{\omega}_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial \theta} \right), \quad \dot{\omega}_\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial r} - \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Моделирование данной системы дифференциальных уравнений должно ориентироваться на использование численных методов [8], создание специального программного обеспечения, ориентированного на сверхмощные суперкомпьютеры, а также на реализацию алгоритмов с распараллеливанием вычислительного процесса за счет разбиения общей задачи на отдельные подзадачи, каждая из которых в многопроцессорной вычислительной системе реализуется на отдельной группе процессоров (кластере).

Для решения проблем нанесения порошковых покрытий на внутренние и наружные поверхности цилиндрических деталей методом центробежного припекания [6] особое значение имеет осесимметричный случай, когда  $\dot{U}_\theta = 0$ ,  $\dot{U}_r = \dot{U}_r(r, z)$ ,  $\dot{U}_z = \dot{U}_z(r, z)$ . Отличными от нуля компонентами тензора скоростей деформаций являются:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{\dot{U}_r}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial z}, \\ \dot{\varepsilon}_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial z} + \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial r} \right). \end{cases}$$

Далее  $\dot{\vartheta} = \operatorname{div} \dot{\vec{U}} = -\frac{d\rho}{\rho dt} = \frac{\dot{\Pi}}{1-\Pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\dot{U}_r)}{\partial r} + \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial z}$  и окончательно

уравнения движения принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_r = \rho \ddot{U}_r, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = \rho \ddot{U}_z. \end{cases}$$

Компоненты тензора напряжений, отличные от нуля:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \tilde{\lambda} \dot{\vartheta} + 2\eta \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \tilde{\lambda} \dot{\vartheta} + \frac{2\eta \dot{U}_r}{r}, \\ \sigma_{zz} = \tilde{\lambda} \dot{\vartheta} + 2\eta \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial z}, \quad \sigma_{rz} = 2\eta \left( \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial z} + \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial r} \right). \end{cases}$$

Получаем следующую систему уравнений движения в осесимметричном случае:

$$\begin{cases} \left( \tilde{\lambda} + 2\eta \right) \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial r} - \frac{2\eta}{r} \frac{\partial(r\dot{\omega}_\theta)}{\partial z} + \rho f_r = \rho \ddot{U}_r, \\ \left( \tilde{\lambda} + 2\eta \right) \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial z} - \frac{2\eta}{r} \frac{\partial(r\dot{\omega}_\theta)}{\partial r} + \rho f_z = \rho \ddot{U}_z. \end{cases} \quad (4)$$

В качестве примера применения полученной системы (4), рассмотрим проблему уплотнения припекаемого порошкового слоя на внутренней поверхности цилиндрической детали, вращающейся с постоянной угловой скоростью. При этом основа предполагается жесткой, а торцовые поверхности слоя – закрепленными.

Положим для данной задачи:

$$\dot{U}_r = \dot{U}_r(r), \quad \dot{U}_z = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = 0, \quad a \leq r \leq b. \quad (5)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\dot{U}(b) = 0, \quad \sigma_{rr}(a) = 0, \quad (6)$$

где  $a, b$  – внутренний и внешний радиусы цилиндрического слоя соответственно.

Полагаем, что процессы вязкого течения протекают достаточно медленно, так что можно положить  $\ddot{U} \approx 0$ .

Массовая сила имеет вид  $f_r \equiv f = \omega^2 r$ , где  $\omega$  – угловая скорость цилиндрического слоя в процессе припекания.



Уравнение в системе (4) с учетом (5) принимает вид  $\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial r} = -\frac{\omega^2 \rho r}{\tilde{\lambda} + 2\eta}$ ,

интегрируя которое, находим  $\dot{\vartheta} = -\frac{C_0 r^2}{2} + C_1$ , где положено  $C_0 = \frac{\omega^2 \rho}{\tilde{\lambda} + 2\eta}$ .

При интегрировании по  $r$ , величины  $\rho$ ,  $\tilde{\lambda} + 2\eta$  взяты усредненными по отрезку интегрирования.

Имея в виду выражение  $\text{div} \dot{U} \equiv \dot{\vartheta}$ , находим при повторном интегрировании по  $r$   $r\dot{U} = -\frac{C_0 r^4}{8} + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2$ , где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находим из граничных условий (6), т. е. имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_2 = \frac{C_0 b^4}{8} - \frac{C_1 b^2}{2}, \\ (\tilde{\lambda} + \eta)C_1 - \frac{2\eta}{a^2}C_2 = \frac{C_0 a^2}{2} \left( \tilde{\lambda} + \frac{3}{2}\eta \right). \end{cases}$$

Отсюда получаем для постоянных интегрирования  $C_2 = \frac{C_0 a^2}{2} \alpha$ ,

$C_2 = \frac{C_0 b^4}{4} \beta$ , в выражениях которых содержатся функции  $\alpha$  и  $\beta$  кинетиче-

ских параметров слоя  $\tilde{\lambda}$ ,  $\eta$  и отношения  $\xi_0 = \frac{a}{b}$ . Имеем:

$$\alpha = \frac{\tilde{\lambda} + \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\xi_0^4\eta}{\tilde{\lambda} + \eta + \xi_0^4\eta}; \quad (7)$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{2}(\tilde{\lambda} + \eta) - \frac{\tilde{\lambda} + \frac{3}{2}\eta}{\xi_0^2}}{\tilde{\lambda} + \eta + \xi_0^2\eta}. \quad (8)$$

Выразим компонент тензора напряжений в слое:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{\tilde{\lambda} + \eta}{2} C_0 a^2 \alpha - \frac{\tilde{\lambda} + \frac{3}{2}\eta}{2} C_0 r^2 - \frac{\eta C_0 \beta b^4}{2r^2}, \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\tilde{\lambda} + \eta}{2} C_0 a^2 \alpha - \frac{\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}\eta}{2} C_0 r^2 + \frac{\eta C_0 \beta b^4}{2r^2}, \\ \sigma_{zz} = -\frac{\tilde{\lambda} C_0}{2} (r^2 - \alpha a^2). \end{cases}$$

Подставляя в (7), (8) выражения (2) и (3) получим следующие выражения для функций  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha = \frac{1 + 0,375(\xi_0^4 - 1)\Pi}{1 + 0,750(\xi_0^2 - 1)\Pi}, \quad \beta = -\frac{1}{2} \frac{4\left(\frac{2}{\xi_0^2} - 1\right) + 3\Pi\left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)}{4 + 3\Pi(\xi_0^2 - 1)},$$

из которых следует, что для достаточно тонких порошковых слоев, когда  $\xi_0^2 \approx 1$  при любой пористости  $\Pi \leq 0,5$  имеем  $\alpha \approx 1$  и  $\beta \approx -\frac{1}{2}$ .

Рассмотрим теперь подробнее кинетическое уравнение для  $\langle \dot{\vartheta} \rangle$ . При-

нимая во внимание, что  $\tilde{\lambda} + 2\eta = \frac{4}{3}\eta_m \frac{(1-\Pi)^2}{\Pi}$ , находим окончательно дифференциальное уравнение кинетики уплотнения порошкового слоя:

$$-\frac{\dot{\Pi}}{\Pi} = \frac{3}{8} A \omega^2 \rho_m a^2 \tilde{\phi}(\xi_r), \quad (9)$$

в котором  $\tilde{\phi}(\xi_r) = \xi_r^2 - \alpha$ ,  $\xi_r = \frac{r}{a}$ .

Отметим, что в области  $r \approx a$  припекание слоя происходит под воздействием сил поверхностного натяжения [7].

Для приближенных оценок можно получить из (9) следующее уравнение кинетики уплотнения:

$$\Delta F = \ln \frac{\Pi_0}{\Pi} = \frac{3}{8} (A_1 - A_2) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \omega^2 \rho_m a^2 \tau_1 \overline{\tilde{\phi}(\xi_r)} + \frac{3}{8} A_2 \omega^2 a^2 \rho_m \overline{\tilde{\phi}(\xi_r)} t,$$

где  $\overline{\tilde{\phi}(\xi_r)} = \xi_r^2 - \bar{\alpha}$  – усредненное за время припекания значение величины  $\tilde{\phi}$ .

Если учесть выражение для  $\alpha$  и  $\beta$  и провести интегрирование уравнения (9) более точно, то получим:

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= \ln \frac{\Pi_0(1+b_1\Pi)}{\Pi(1+b_1\Pi_0)} + \frac{a_1}{b_1} \ln \frac{1+b_1\Pi_0}{1+b_1\Pi} = \\ &= \frac{3}{8} (A_1 - A_2) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \omega^2 \rho_m a^2 \tau_1 \tilde{\phi}_0 + \frac{3}{8} A_2 \omega^2 a^2 \rho_m \tilde{\phi}_0 t. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь положено  $\tilde{\phi}_0 = \xi_r^2 - 1$  и принято  $a_1 = 0,750(\xi_0^2 - 1)$ ,

$b_1 = \frac{\xi_0^2 - 1}{\tilde{\phi}_0} [0,750(\tilde{\phi}_0 + 1) - 0,375(\xi_0^2 + 1)]$ . Для достаточно тонких слоев –

$\xi_0 \approx 1$  и  $a_1, b_1 \rightarrow 0$ . В этих условиях можно с достаточной степенью точности пользоваться уравнением:

$$\ln \frac{\Pi_0}{\Pi} \approx \frac{3}{8} \omega^2 \rho_m a^2 \tilde{\phi}_0 \left[ (A_1 - A_2) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \tau_1 + A_2 t \right]. \quad (11)$$

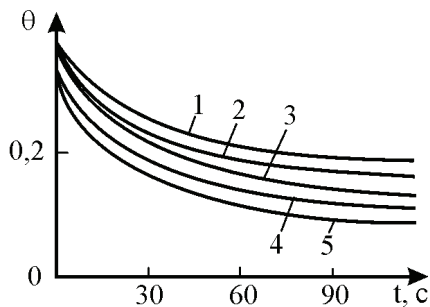


Рис. 6, кПа:  
1 – 20; 2 – 60; 3 – 120; 4 – 160; 5 – 200

Результаты расчета кинетики припекания сопоставлялись с экспериментальными данными по центробежному припеканию порошков БрОФ–10–1 и ПГ–СРЗ при различных давлениях и температурах. На рис. 6 приведены экспериментальные кривые для изменения пористости порошков при различных давлениях. Центробежное давление на слой порошка у основы ( $r \approx b$ ) может

быть рассчитано согласно простому соотношению:

$$p_c = \omega^2 \rho_m \Delta_{cl}, \quad (12)$$

где  $r_c = \frac{a+b}{2}$ ,  $\Delta_{cl} = b-a$ . Сопоставление экспериментальных кривых с теорией показало их хорошее согласование.

В дальнейших исследованиях предполагается рассмотреть систему уравнений (4) при  $U_z \neq 0$  и дополнительными граничными условиями  $U_z(0) = 0$ ,  $U_z(h) = 0$ . Таким образом, мы рассмотрим зависимость пористого припекаемого слоя не только от  $r$ , но и от осевой координаты слоя  $Z$  (см. рис. 5), что представляет определенную ценность для практики использования покрытия при упрочнении и восстановлении цилиндрических поверхностей.

### Заключение

Построена модель, использующая коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости среды и два возможных состояния ее активности по отношению к вязкому течению. В цилиндрических координатах получены компоненты тензоров скоростей деформации и вязких напряжений. Составлены весьма общие уравнения движения для модели вязкой пористой среды в осесимметричном случае. Осуществлено решение радиального уравнения, когда пористый слой претерпевает усадку в радиальном направлении.

### Список литературы

1. Скороход, В.В. Реологические основы теории спекания / В.В. Скороход. – Киев : Наукова думка, 1972. – 152 с.
2. Дорожкин, Н.Н. Импульсные методы нанесения порошковых покрытий / Н.Н. Дорожкин, Т.М. Абрамович, В.К. Ярпошевич. – Минск : Наука и техника, 1985 – 278 с.
3. Ландау, Л.Д. Статистическая физика / Л.Д. Ландау, Е.Ф. Лифшиц. – М. : Наука, 1978. – 448 с.
4. Гегузин, Я.Е. Физика спекания / Я.Е. Гегузин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1984. – 312 с.

5. Введение в физику твердых, жидких и пористых систем. Ч. 1 / Т.М. Абрамович [и др.] ; под ред. Н.Н. Дорожкина. – 2-е изд., доп. – Таганрог : Изд-во ТГПИ, 2004. – 104 с.
  6. Ландау, Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.Ф. Лифшиц. – М. : Наука, 1987. – 248 с.
  7. Центробежное припекание покрытий при переменных силовых воздействиях / Н.Н. Дорожкин [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1993. – 159 с.
  8. Об одном подходе в конструировании разностных схем / В.Т. Жуков [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, №2. – С. 222–234.
- 

### **Research and Modeling of Physical Processes of Centrifugal Sintering and Baking in Powder Systems**

**T.M. Abramovich, N.I. Vitiska, D.V. Zadorozhniy**

*Taganrog State Pedagogical Institute, Taganrog*

**Key words and phrases:** computational experiment; compression kinetics; porous body model; powder systems; powder layer; centrifugal sintering and baking.

**Abstract:** Refined mathematical models describing the process of centrifugal sintering and baking are proposed. Several theoretical approaches to description of powder systems fixing with regard for various conditions, i.e. viscous flow in the area of selected pore, spherical symmetry of processes flow, difference in sub-systems activity, nanolevel of sintering processes activation and baking layer heating at some permanent speed, are considered. Complicated differential equations of sintering and baking processes are produced; their solution is possible only via modern computational systems. The results of some calculations made on the basis of produced ratio under limitations of constructed model are given.

---

© Т.М. Абрамович, Н.И. Витиска, Д.В. Задорожний, 2007